Pólya–Szegő szeminárium 3.
2. feladatsor
2005. február 21.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n)d(n) \geq n$ minden n pozitív egész számra (itt $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív számok száma, $d(n)$ pedig n pozitív osztóinak száma).

2. Mutassuk meg, hogy ha $n > 4$, akkor nincs olyan nem konstans egészegyütthatós polinom, amelynek n különböző egész helyen 1 vagy -1 az értéke. Mutassunk ilyen polinomot $n = 4$ esetén.

3. Mutassuk meg, hogy ha zárt intervallumon folytonos függvények sorozata monoton módon tart egy folytonos függvényhez, akkor a konvergencia egyenletes.

4. Mutassuk meg, hogy ha zárt intervallumon monoton függvények sorozata folytonos függvényhez tart, akkor a konvergencia egyenletes.

5. Egy $n \times n$-es $0-1$ mátrixban nincs két-két olyan sor és oszlop, amelyek keresztezési mezőiben mind a négy helyen egyes áll. Bizonyítsuk be, hogy a mátrixban legfeljebb $\frac{n}{2} + n\sqrt{n}$ egyes lehet.

6. Legyen f egy 1 főegyütthatós n-edfokú komplex polinom. Lássuk be, hogy legfeljebb n különböző pozitív egész x hely lehet, ahol $|f(x)| < n!/2^n$.