Pólya–Szegő szeminárium 3.
3. feladatsor
2005. március 7.

1. Lássuk be, hogy $\varphi(n)+d(n) \leq n+1$ minden n pozitív egészre. Milyen n-ekre áll egyenlőség?

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely $p(x)$ polinomnak van olyan $p(x)q(x)$ (nullától különböző) többszöröse, amelyben csak x prím kitevőjű hatványai szerepelnek.

3. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

integrált.

4. Tegyük fel, hogy a $|z_1|+\ldots+|z_n|+\ldots$ sor divergens. Lássuk be, hogy van olyan α irányszög, hogy bármely $0<\varepsilon$-ra a $z_1,\ldots,z_n,\ldots$ sor tagjai közül azoknak, amelyek irányszöge $\alpha-\varepsilon$ és $\alpha+\varepsilon$ közé esik, divergens az összege.

5. Legyenek az A és B $n\times n$-es valós mátrixok, $AB=I$. Mutassuk meg, hogy ha az A mátrix elemei nemnegatív számok, akkor B elemei között legalább n pozitív és legalább n negatív szám van.

6. Tegyük fel, hogy az $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ polinom minden gyöke valós. Lássuk be, hogy ekkor a gyökök benne vannak a

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_{n-2}}$$

végpontú intervallumban.