Pólya–Szegő szeminárium 3.
6. feladatsor
2005. április 11.

1. Hagyjuk el az

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

harmonikus összegből azon tagokat, amelyekben a nevezőben van 6-os számjegy. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott sor konvergens.

2. Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\dots+(-1)^{(n-1)}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$

3. Legyen f folytonosan differenciálható valós függvény az (a,b) intervallumon és $a<\xi<b$. Igaz-e, hogy mindig vannak olyan x_1, x_2 pontok, hogy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$$

és $a<x_1<\xi<x_2<b$?

4.
Legyen az a_k olyan monoton csökkenő pozitív sorozat, hogy az

$$a_1+a_2+\dots+a_k+\dots$$

sor divergens, de alkalmas ϵ_k előjelsorozattal

$$\epsilon_1a_1+\epsilon_2a_2+\dots+\epsilon_ka_k+\dots$$

már konvergens (itt $\epsilon_k=\pm1$ minden k-ra).

Lássuk be, hogy ekkor

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\dots+\epsilon_n}{n}\le 0\le\limsup_{n\to\infty}\frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\dots+\epsilon_n}{n},$$

vagyis az előjelek aránya torlódik 1/2-hez.

5. Van-e olyan szigorúan monoton növő valós függvény, ami majdnem minden pontban deriválható és a deriváltja majdnem minden pontban 0?

6. Előáll-e az irracionális számok halmaza megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként?