Pólya–Szegő szeminárium 4.
0. feladatsor
2005. szeptember 12.

1. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2^{2^0}+1, 2^{2^1}+1, \ldots, 2^{2^k}+1, \ldots$$

sorozat tagjai páronként relatív prímek.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-hez van olyan $p_1, p_2, \ldots p_n$ pozitív prímekből álló növő sorozat, hogy $\frac{p_n}{p_1} < \frac{n+1}{n-1}$.

3. Jelölje C_n azon $2n$ hosszú sorozatok halmazát, amelynek n tagja $+1$, a többi n tagja -1, és minden kezdőszeletének összege nemnegatív.

Adjunk kétféle kombinatorikus bizonyítást arra, hogy

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

Lássuk be, hogy egy $n+2$ oldalú szabályos sokszöget C_n-féle módon lehet felbontani háromszögekre.

Lássuk be, hogy egy $2n$ oldalú szabályos sokszög oldalfelezőit C_n-féle módon lehet párosával összekötni úgy, hogy az összekötő szakaszok ne messék egymást.

4. Tegyük fel, hogy az $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_nz^n$ polinom az $|z| < 1$ egységkörlemezt egyrétűen (injektív módon) képezi le. Bizonyítsuk be, hogy $n|a_n| \leq 1$.

5. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan színezzük véges sok színnel a végtelen szabályos háromszögrács csúcsait, mindenképpen lesz olyan szabályos háromszög, melynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel és csúcsai egyszínűek.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy racionális függvény végtelen sok egész helyen egész számot vesz fel, akkor polinom.

7. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ függvényt, amelyre teljesül a következő függvényegyenlet.

$$f(x^2+y^2) = (f(x))^2 + (f(y))^2$$

8. Tegyük fel, hogy $1 < d_k$ egész, és $d_k^2 \leq d_{k+1}$ minden k természetes számra. Lássuk be, hogy a

$$\sum_{0\leq k} \frac{1}{d_n}$$

sor összege irracionális.