Pólya–Szegő szeminárium 4.
1. feladatsor, javított változat
2005. szeptember 19.

1. Mutassuk meg, hogy ha egy egész elemû mátrix minden sorának összege osztható d-vel, akkor a mátrix determinánsa is osztható d-vel.

2. Határozzuk meg az n-dimenziós, R sugarú gömb térfogatát.

3. Bizonyítsuk be, hogy a $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$ polinom abszolút értékének maximuma a $|z| = 1$ körön legalább 1.

4.

(a) Az egységkörvonalon felveszünk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az általuk meghatározott (konvex) sokszög területének várható értékét.

(b) Legyen a_n a körlapból *kimaradó* terület várható értéke az előbbi esetben és b_n a kimaradó terület szabályos n-szög esetén. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 6.$$

5. Definiáljuk az $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots$ hatványsorhoz tartozó Hankel-féle determinánsokat a következőképpen:

$$A_n^{(r)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+r-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \dots & a_{n+r} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & \dots & a_{n+r+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & a_{n+r+1} & \dots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix}$$

Legyen $f(z)$ racionális függvénye z-nek $r-1$ fokú nevezővel, és p fokú számlálóval. Legyen $d = \max(0, r-q)$. Lássuk be, hogy ekkor

$$0 = A_d^{(r)} = A_{d+1}^{(r)} = \dots = A_{d+k}^{(r)} = \dots$$

Igaz-e az állítás megfordítása?

6. Legyen $f(x,y) = (xy) \bmod (x+y)$, és valamely x_0, x_1 pozitív egészekre definiáljuk az x_k sorozatot a következő módon:

$$x_k = f(x_{k-1}, x_{k-2}).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészhez van olyan x_0 és x_1, hogy az így kapott számsorozat egy n hosszú ciklus.