Pólya–Szegő szeminárium 4.
2. feladatsor
2005. szeptember 26.

1. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetrácson bármely üres rácsháromszög magasságpontja is rácspont.

2. Van-e olyan $A \subset \mathbb{Z}^+$ végtelen halmaz, melyre teljesülnek az alábbiak:

(i) $a, b \in A$ esetén a nem osztója b-nek és (b nem osztója a-nak),

(ii) $a, b \in A$ esetén $(a, b) > 1$, és

(iii) A összes elemének legnagyobb közös osztója 1?

3. Definiáljuk a Legendre-polinomokat a következőképpen.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Lássuk be, hogy teljesül a következő ortogonalitási feltétel, ha $K(x)$ legfeljebb $n-1$ fokú polinom.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) K(x)\, dx = 0$$

Lássuk be, hogy a következő rekurzió teljesül minden $2 \le n$ esetén.

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}\, x\, P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(x)$$

4. Legyen $\Pi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bijekció. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Pi(n)} < \infty.$$

Van-e olyan C konstans, ami minden Π-re felső korlátja az előbbi összegnek?

5. Legyenek n, k pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k}$$

összeg nem egész.

6. Adott a négyzetrácson egy (a rácsegyenesekkel párhuzamos oldalú) rácstéglalap. A téglalapot felosztjuk üres rácsháromszögekre. Bizonyítsuk be, hogy a rácsháromszögek között legalább kétszer annyi derékszögű van, amilyen hosszú a téglalap rövidebbik oldala.