Pólya–Szegő szeminárium 4.
4. feladatsor, javított változat
2005. október 10.

1. Legyenek $a_1, a_2, \ldots$ páronként relatív prím összetett számok. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty.$$

2. (A feladat hibás.) Legyen $s_0 = 0$, s_1 egész, és definiáljuk az s_n sorozatot a következő homogén lineáris rekurzióval: $s_{n+2} = A_0 s_n + A_1 s_{n+1}$, ahol A_0, A_1 egészek. Bizonyítsuk be, hogy minden n, k egészre

$$(s_n, s_k) = s_{(n,k)}$$

Ahol (a, b) jelöli a és b legnagyobb közös osztóját.

Fontos speciális eset, ha s a Fibonacci-számok sorozata, illetve ha $s_n = 2^n - 1$.

3. Vegyünk három egybevágó téglalapot, melyek oldalainak hossza 2 és $1 + \sqrt{5}$. Helyezzük el őket a térbeli koordinátarendszerben úgy, hogy a középpontja mindnek az origó legyen, az első az xy síkba essen és hosszabbik oldala párhuzamos x-szel, a második az yz síkba essen és hosszabbik oldala párhuzamos y-nal, a harmadik a zx síkba essen és hosszabbik oldala párhuzamos z-vel. Mutassuk meg, hogy a három téglalap 12 csúcsa egy szabályos ikozaéder csúcsai.

4. Tavaly beláttuk, hogy a

$$G_{n,k}(q) = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k}$$

Gauss-féle binomiális együtthatók q polinomjai, és teljesítik a következő rekurziót:

$$G_{n+1,k}(q) = G_{n,k}(q) + G_{n,k-1}(q) q^{n-k+1}$$

Vegyünk most fel a négyzetrácson egy k magas, és $n-k$ széles téglalapot. Tekintsük a k felfelé és $n-k$ jobbra menő szakaszból álló utakat a téglalap bal alsó csúcsából a jobb felső csúcsába. Jelölje $c_{n,k,\alpha}$ ezen utak közül azoknak a számát, amelyek alatt a téglalapban α egységnyi terület van.

Lássuk be, hogy

$$G_{n,k}(q) = \sum_{0 \le \alpha \le k(n-k)} c_{n,k,\alpha}\, q^{\alpha}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögmentes gráf beágyazható részgráfként egy elég nagy Myczielski-gráfba. (Ez utóbbiak a következő módon származnak: M_2 egy két csúcsú gráf a két csúcs között éllel; M_{n+1}-et úgy képezzük, hogy felvesszük M_n egy példányát, annak minden v_i csúcsához egy új u_i csúcsot, melyet összekötünk v_i szomszédaival (de v_i-vel nem), végül felveszünk egy w csúcsot, melyet összekötünk az összes u_i-vel.)

6. Legyen

$$g(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\vartheta + \mu_1 \cos\vartheta + \cdots + \lambda_n \cos(n\vartheta) + \mu_n \sin(n\vartheta)$$

valós trigonometrikus polinom (λ_k, μ_k valósak).

Lássuk be, hogy ha $0 \leq g(\vartheta)$ minden valós ϑ-ra, akkor felírható

$$g(\vartheta) = |h(e^{i\vartheta})|^2$$

alakban, valamely n-edfokú h valós polinomra.