Pólya–Szegő szeminárium 4.
6. feladatsor
2005. október 24.

1. Lássuk be, hogy egy irányított körmentes gráf csúcsait meg lehet számozni úgy, hogy csak kisebb számú csúcsból nagyobb számúba mutat él. Másképpen szólva lássuk be, hogy minden részben rendezés (véges halmazon) kiterjeszthető teljes rendezéssé.

2. Hányféleképpen lehet egy n centis mérőszalagot egy centi hosszú darabokra vágni, ha minden lépésben (a) minden egy centinél hosszabb darabot, illetve (b) csak egy darabot vágunk ketté, és csak egész centiméternél vághatunk.

3. Egy folyó bal partján n lovag van, mindegyik az apródjával. Át lehet-e juttatni őket a túlpartra egy kétszemélyes csónakkal, ha apród soha nem maradhat a lovagja nélkül más lovagok társaságában?

4. Adjunk meg olyan $p_1, p_2, \ldots$ számokat, melyekre $p_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ és bármely $S : \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{Z}^+$ bijekcióra

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S(n) = \infty.$$

(Azaz bárhogyan „szórjuk le” a $p_1, p_2, \ldots$ számokat a számegyenesre, olyan eloszlást kapunk, melynek végtelen a várható értéke.)

5. Lagrange-féle invertálási formula. Legyen az f függvény a következő végtelen hatványsorral definiálva.

$$f(x) = x + V_2 x^2 + V_3 x^3 + \ldots$$

Ekkor f inverz függvényének, g-nek a hatványsorát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$g(y) = y - W_2 y^2 - W_3 y^3 - \ldots$$

ahol $W_n = U_{n,n-1}/n$, ha

$$(1 + V_2 x + V_3 x^2 + \ldots)^{-n} = U_{n,0} + U_{n,1} x + U_{n,2} x^2$$