Pólya–Szegő szeminárium 4.
8. feladatsor, javított változat
2005. november 14.

1. Határozzuk meg, a következő sorozat elemei közül melyek prímszámok:

$$101, 10101, 1010101, \ldots$$

2. Legyen (s_n) pozitív számok monoton növő, végtelenhez tartó sorozata. Definiáljuk a sorozat N számláló függvényét: minden pozitív s-re $N(s)$ legyen a sorozat s-nél nem nagyobb tagjainak száma.

Lássuk be, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \liminf_{s\to\infty} \frac{s}{N(s)}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \limsup_{s\to\infty} \frac{s}{N(s)}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egészhez van olyan $N(k)$ szám, hogy $n > N(k)$ esetén

$$[1, 2, \ldots, n] > n^k.$$

(Itt $[1, 2, \ldots, n]$ az $1, 2, \ldots, n$ számok legkisebb közös többszöröse.)

4. Legyen az f korlátos (valós) függvény Riemann-integrálható a $[0, 1]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan p polinom, amelyre $p(x) \le f(x)$ minden $x \in [0, 1]$-re, de

$$\int_0^1 (f(x) - p(x))\, dx < \varepsilon$$

5. Jelölje $P(n, k)$ azt a számot, ahányféleképpen n-et k darab egynél nagyobb egész szorzatára lehet bontani, ha a tényezők sorrendje is lényeges.

Lássuk be, hogy egynél nagyobb n-re

$$\mu(n) = -P(n, 1) + P(n, 2) - P(n, 3) + \ldots$$

ahol μ a Möbius-függvény.

6. Jerry egy négyzet alakú medencében középen van, míg Tom a parton várakozik. Tom négyszer olyan gyorsan fut, mint ahogy Jerry úszik, viszont Jerry gyorsabban fut, mint Tom. El tud-e menekülni Jerry?