Pólya–Szegő szeminárium 4.
11. feladatsor
2005. december 5.

1. Legyen a síkon $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ két lineárisan független vektor, és $\mathbf{b}$ egy tetszőleges vektor. Ezek kifeszítenek egy paralelogrammarácsot, amelynek pontjai $k_0\mathbf{a}_0 + k_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}$ minden k, l egész számpárra. A bázisparalelogramma területe $d = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Lássuk be, hogy ekkor van olyan (x, y) rácspont, amelyre $|x \cdot y| \leq d/4$.

2. Számítsuk ki az alábbi összeget minden valós x és pozitív egész n esetén:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges Noether-gyűrűben a $\{0\}$ ideál előáll prímideálok szorzataként.

4. Adjunk meg egy P korlátot, amelyre minden pozitív egész szám felírható P darab egész szám negyedik hatványának összegeként.

5. Legyenek $0 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ egész számok, és $0 < x_1 < \cdots < x_n$ valósak. Lássuk be, hogy az

$$\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \dots & x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \dots & x_2^{\alpha_n} \\ \vdots & & & \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

determináns (a) nullától különböző, sőt (b) pozitív.

6. Mutassunk olyan f mindenütt differenciálható valós függvényt, melyhez van olyan korlátos és zárt intervallum, hogy az f' függvény ezen az intervallumon korlátos, de nem veszi fel sem a szuprémumát, sem az infémumát.