Analízis alapjai

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában.

Külön köszönettel tartozom *Szép Enikőnek* a jegyzet írása során nyújtott támogatásáért és bíztatásáért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$

teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: *p és q*, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \rightarrow (q)$: *p-ből q következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: *p és q ekvivalensek*, ha $((p) \rightarrow (q)) \wedge ((q) \rightarrow (p))$;
- $\forall x(p)$: *minden x esetén* p teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

1.4. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy A *részhalmaza* a B halmaznak, ha $\forall v(v \in A \rightarrow v \in B)$ teljesül, melynek jele $A \subseteq B$, vagy $B \supseteq A$.

1.6. Definíció. Az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük és a $\mathcal{P}(x)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, melynek elemei éppen x részhalmazai.

1.7. Definíció. Adott X halmaz esetén $\cup X$ jelöli azt a halmazt, melynek elemei éppen az X halmazban lévő halmazok elemei, vagyis $\cup X$ az X elemeinek egyesítését jelöli.

1.8. Definíció. Legyen A és B halmaz. Ekkor a páraxióma szerint létezik az $\{A, B\}$ halmaz, továbbá az egyesítési axóma szerint létezik az $\cup\{A, B\}$ halmaz, melyet a továbbiakban $A \cup B$ formában írunk, és az A, B *halmaz egyesítésének* (vagy *–uniójának*) mondunk.

1.9. Definíció. Az A halmaz *rákövetkezőjének* (vagy *szukcesszorának*) nevezzük az

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

halmazt.

1.10. Definíció. Az A halmazt *induktív halmaznak* vagy *monoton halmaznak* nevezünk, ha $\emptyset \in A$ és $\forall x \in A$ esetén $x^+ \in A$.

1.11. Definíció. Legyen x halmaz és p formula. A részhalmaz axiómaséma alapján az x halmaz azon elemei, melyekre p teljesül halmazt alkotnak. Ezt a halmazt a $\{u \in x \mid p\}$ szimbólummal jelöljük.

1.12. Definíció. Adott X halmazrendszer *metszetén* az

$$\{x \in \cup X \mid \forall z \in X \ x \in z\}$$

halmazt értjük, melynek jele $\cap X$. Az A, B halmaz esetén $\cap\{A, B\}$ helyett a $A \cap B$ jelölést használjuk, melyet az A, B *halmaz metszetének* mondjuk.

1.13. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A|\ x \notin B\}$ halmazt *A és B különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.14. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.15. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.16. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

– *értelmezési tartománya*

$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X|\ \exists y \in Y : (x, y) \in R\};$$

– *értékkészlete*

$$\operatorname{Ran} R \triangleq \{y \in Y|\ \exists x \in X : (x, y) \in R\};$$

– *inverze*

$$\overset{-1}{R} \triangleq \{(y, x) \in Y \times X|\ (x, y) \in R\};$$

– általi *képe a $H \subseteq X$ halmaznak*

$$R(H) \triangleq \{y \in Y|\ \exists x \in H : (x, y) \in R\}\,;$$

– *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x, z) \in X \times Z|\ \exists y \in Y :\ (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

1.17. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \triangleq \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.18. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y'(((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R) \to y = y')$$

teljesül.

1.19. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény

– *injektív*, ha $\forall x, x' \in X :\ (f(x) = f(x') \to x = x')$;
– *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
– *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.20. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze*. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható*.

1.21. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *jobb inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} f}$;
- *bal inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $g \circ f = \mathrm{id}_{\operatorname{Dom} f}$.

1.22. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \overset{\triangle}{=} +(x, y)$ jelöléssel élünk.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

$$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge \ x' + x = e,$$

  ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a + műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.23. Definíció. A $(G, \cdot)$ párt *félcsoportnak* nevezzük, ha $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív művelet. A $(G, \cdot)$ pár *kommutatív félcsoport*, ha $(G, \cdot)$ félcsoport és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.24. Definíció. A $(G, \cdot, e)$ hármast *csoportnak* nevezzük, ha $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív, egységelemes és inverzelemes művelet. Az egységelemet általában e jelöli absztrakt csoport esetén és a $g \in G$ elem inverzét pedig g^{-1}. Így csoportok esetén létezik egy

$$^{-1} : G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$$

inverzképzés. A $(G, \cdot, e)$ hármas *kommutatív csoport*, ha $(G, \cdot, e)$ csoport, és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.25. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \overset{\triangle}{=} f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.26. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \overset{\triangle}{=} \{x \in A | \exists i \in I : \ x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \overset{\triangle}{=} \{x \in A | \forall i \in I : \ x \in A_i\}.$$

1.27. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \ \middle| \ \forall i \in I : \ f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \overset{\triangle}{=} f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

1.28. Definíció. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.

- Adott $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i \in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$
függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.
- Adott $a \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i \in I} A_i \;\middle|\; u_k = a,\ \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$
függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén
$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

1.29. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:
- *reflexív*, ha $\forall x \in X((x, x) \in R)$;
- *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \to x = y)$.

1.30. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

1.31. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X\ x' \leq x$ $(x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

1.32. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.33. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

1.34. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.
$$\begin{aligned} [x, y] &= \{z \in A |\ x \leq z \leq y\} \\ [x, y[&= \{z \in A |\ x \leq z < y\} \\ ]x, y] &= \{z \in A |\ x < z \leq y\} \\ ]x, y[&= \{z \in A |\ x < z < y\} \end{aligned}$$
A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.35. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.36. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

1.37. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \to y \in X)$.

1.38. Definíció. Azt a jól meghatározott monoton halmazt, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz, az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük és elemeit *természetes számoknak* hívjuk. Továbbá bevezetjük az $\mathbb{N}^+ \triangleq \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ jelölést.

1.39. Definíció.

$$
\begin{aligned}
&0 \triangleq \emptyset \\
&1 \triangleq 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 \triangleq 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 \triangleq 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1.40. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = k$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l^+.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = k$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l^+) = f_k(l)^+$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

összeadás műveletét.

1.41. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 0$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l + k.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 0$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l) + k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

szorzás műveletét.

1.42. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto lk.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 1$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l)k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

hatványozás műveletét, melyre a $k^l \triangleq h(k, l)$ jelölést alkalmazzuk.

1.43. Definíció. A $\mathbb{Z}$ halmaz elemeit *egész számoknak* nevezzük.

1.44. Definíció. A $\mathbb{Q}$ halmaz elemeit *racionális számoknak* nevezzük.

1.45. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös *test*, ha teljesíti az alábbiakat.
- $0, 1 \in K,\ 0 \neq 1$
- A $(K, +, 0)$ kommutatív csoport.
- A $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, 1 az egységeleme és minden nem nulla elemnek létezik inverze.
- A $\cdot$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve.

1.46. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatost *rendezett testnek* mondjuk, ha az teljesíti az alábbiakat.
- A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös test.
- A $\leq$ reláció lineáris rendezés.
- $\forall k, m, n \in K : (m \leq n \to m + k \leq n + k)$
- $\forall k, m, n \in K : ((m \leq n \wedge 0 \leq k) \to mk \leq nk)$

1.47. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos *teljesen rendezett test*, ha
- A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test;
- minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma.

1.48. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{Q}$ halmazt *Dedekind-szeletnek* hívjuk, ha
- $X \neq \emptyset$;
- X felülről korlátos;
- az X halmaznak nincs legnagyobb eleme a $\mathbb{Q}$ halmazban;
- minden $x \in X$ esetén
$$\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \subseteq X$$
teljesül.

1.49. Definíció. A Dedekind-szeleteket *valós számoknak* nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

1.50. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése
$$\overline{\leq} \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$
A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen
$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$
továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.51. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.
$$[x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z\}$$
$$]x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z\}$$
$$]-\infty, x] = \{z \in \mathbb{R} |\ z \leq x\}$$
$$]-\infty, x[= \{z \in \mathbb{R} |\ z < x\}$$
Továbbá bevezetjük még az
$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$
jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

1.52. Definíció. A $(K,+,\cdot,0,1,\leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x,y\in K$ elemhez $x>0$ esetén $\exists n\in\mathbb{N}$, hogy $y<n\cdot x$ teljesül.

1.53. Definíció. Legyen $x\in\mathbb{R}$. Az

$$[x]\triangleq\begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{Z}|\ x<n\}-1, & \text{ha}\quad x\notin\mathbb{Z};\\ x, & \text{ha}\quad x\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\}\triangleq x-[x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

1.54. Definíció. A $\mathbb{C}$ halmazt a *komplex számok halmazának* nevezzük, elemeit pedig *komplex számoknak*. A $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ elemet az $a+b\,\mathrm{i}$ alakban írjuk, ahol $a=\operatorname{Re}z$ a komplex szám *valós része*, $b=\operatorname{Im}z$ pedig a *képzetes része*, vagyis

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\qquad&(a,b)\mapsto a\\ \operatorname{Im}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\qquad&(a,b)\mapsto b.\end{aligned}$$

A z *konjugáltja* $\bar{z}=a-b\,\mathrm{i}$.

1.55. Definíció. Legyen A és B halmaz.
- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f:A\to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A|=|B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X\subseteq B:\ |A|=|X|$. Ebben az esetben az $|A|\leq|B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A|\leq|B|$ és $|A|\neq|B|$. Ennek jele $|A|<|B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A|\leq|B|)\vee(|B|\leq|A|)$ teljesül.

1.56. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.
- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n\in\mathbb{N}$, melyre $|A|=|n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A|=n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A|=|\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A|=|\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A|=|\mathbb{R}|$.

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Definíció. Adott $x\in\mathbb{R}_0^+$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y\in\mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n=x$ teljesül x *n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.2. Definíció. Az $x\in\mathbb{R}^+$ *számnak a $q\in\mathbb{Q}$ kitevőjő hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q\triangleq\begin{cases}\sqrt[n]{x^m}, & \text{ha}\quad q>0,\ q=\frac{m}{n};\quad(m,n\in\mathbb{N})\\ 1, & \text{ha}\quad q=0;\\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha}\quad q<0,\ q=-\frac{m}{n}\quad(m,n\in\mathbb{N}).\end{cases}$$

Továbbá $q>0$ esetén legyen $0^q\triangleq0$ és $0^0\triangleq1$.

2.3. Definíció. Az $n\in\mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n!\triangleq\begin{cases}1 & \text{ha}\quad n=0,\\ \prod_{i=1}^{n}i, & \text{ha}\quad n>0.\end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az *n alatt a k* számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \leq n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.4. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K : \ (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K : \ |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K : \ |x + y| \leq |x| + |y|$

2.5. Definíció. A fent definiált $|\cdot|_\infty$ függvényt *improprius abszolút értéknek* nevezzük a $(K, +, \cdot)$ test felett.

2.6. Definíció. Legyen A halmaz, $+ : A \times A \to A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$U + V := \{u + v \in A | \ u \in U, \ v \in V\}$$
$$a + V := \{a + v \in A | \ v \in V\}$$
$$U + a := \{u + a \in A | \ u \in U\}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek.*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) && (U, V) \mapsto U + V \\ &\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) && V \mapsto a + V \\ &\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) && U \mapsto U + a \end{aligned}$$

2.7. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

- Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ és $c \in \mathbb{K}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét, szozatát, számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{aligned} f + g : A \to \mathbb{K} &\qquad a \mapsto f(a) + g(a) \\ fg : A \to \mathbb{K} &\qquad a \mapsto f(a)g(a) \\ cf : A \to \mathbb{K} &\qquad a \mapsto cf(a) \\ |f| : A \to \mathbb{K} &\qquad a \mapsto |f(a)| \end{aligned}$$

- értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{aligned} + : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) &\qquad (f, g) \mapsto f + g \\ \times : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) &\qquad (f, g) \mapsto fg \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) &\qquad (c, f) \mapsto cf \\ |\cdot| : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) &\qquad (f) \mapsto |f| \end{aligned}$$

  Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek.*

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{aligned} \sup(f_1, \dots, f_n) : A \to \mathbb{R} &\qquad a \mapsto \sup(f_1(a), \dots, f_n(a)) \\ \inf(f_1, \dots, f_n) : A \to \mathbb{R} &\qquad a \mapsto \inf(f_1(a), \dots, f_n(a)) \end{aligned}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$f_+ : A \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \sup(f(a), 0)$$
$$f_- : A \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto -\inf(f(a), 0)$$

2.8. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója* a_n. Az $x_0 \in \mathbb{K}$ számot a p *polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{K}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K} \mid |x - y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz
- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{K} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset \;\wedge\; B_r(x) \cap (\mathbb{K} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X = \{x\}$.

3.4. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.5. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K} \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K} \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

3.6. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az *X halmaz sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az *X halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{K}$ halmazban.

3.7. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz (*be*)*fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{K}$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i \in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i \in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül.

3.8. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

4. Sorozatok

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{K}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *határértéke*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to \varepsilon < a_n).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to -\varepsilon > a_n).$$
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.4. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

4.5. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*
$$\liminf a \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right)$$
és *limesz szuperiorja*
$$\limsup a \triangleq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right).$$

4.6. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \ \wedge \ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

5. Sorok

5.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.3. Definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$. A $\sum a$ sor *m-edik részletösszege*

$$S_m \triangleq \sum_{n=0}^{m} a_k.$$

A konvergens $\sum a$ sor *m-edik hibatagja*

$$H_m \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n,$$

melyet gyakran a $H_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

5.4. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.5. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.6. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

5.7. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat

– *korlátos változású*, ha a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$
teljesül;
– *korlátos részletösszegű*, ha a
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \infty$$
teljesül.

5.9. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)
– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a
$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \text{a } \sum_{n} a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$
halmazon, az alábbi módon.
$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
A P_a függvényt az *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.
– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.
$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$
Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

5.10. Definíció. (*Elemi függvények.*)
– Az *exponenciális függvény*
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
– A *szinusz függvény*
$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
– A *koszinusz függvény*
$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$
– A *tangens függvény*
$$\operatorname{tg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$
– A *kotangens függvény*
$$\operatorname{ctg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \sin z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$
– A *szinusz hiperbolikus függvény*
$$\operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{ch}: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{th}: \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{ch} z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{cth}: \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} z}.$$

5.11. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\operatorname{Dom}\log = \operatorname{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x \in \operatorname{Dom}\log$ számra $\exp(\log x) = x$.

5.12. Definíció. Legyen $x \in \operatorname{Dom}\log$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z\log(x))$$

számot *az x szám z-edik hatványának* nevezzük.

5.13. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$. (értéke megközelítőleg $\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$.)

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény
– *páros*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(-x)$;
– *páratlan*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = -f(-x)$;
– *monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \le y$ esetén $f(x) \le f(y)$;
– *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \le y$ esetén $f(x) \ge f(y)$;
– *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
– *szigorúan monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
– *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
– *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
– *konvex az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0,1]$ esetén

$$f(ax + (1-a)y) \le af(x) + (1-a)f(y)$$

teljesül;
– *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0,1]$ esetén

$$f(ax + (1-a)y) \ge af(x) + (1-a)f(y)$$

teljesül;
– *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x+p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az *f függvény periódusának* nevezzük;
– *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Definíció. Legyen az $f: \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.4. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az *f függvény határértéke a végtelenben*,

- $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$
- *végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$
- *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.6. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.
- Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

- Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_{a} f|_{]a,\infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a+} f$ vagy a $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

- Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_{a} f|_{]-\infty,a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a-} f$ vagy a $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

6.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))\Big).$$

- Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{K}) \stackrel{\triangle}{=} \{f : A \to \mathbb{K} |\ f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

6.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, de $\lim\limits_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(|x-y| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

6.11. Definíció. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \triangleq 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

6.12. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg} \triangleq \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

6.13. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

- Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis
$$\operatorname{arsh} \triangleq \left(\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}\right)^{-1}.$$
- A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis
$$\operatorname{arch} \triangleq \left(\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}\right)^{-1}.$$
- A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis
$$\operatorname{arth} \triangleq \left(\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}\right)^{-1}.$$

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \,\middle|\, \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
függvényt.
- Az *f differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Az *f folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.
$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \qquad b \triangleq \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$
Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az *f függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$ és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

- Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$$
teljesül, amiből a $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.
- Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b - \xi)^n (b - a)$$
teljesül, amiből a $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b - \xi)^n (b - a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.6. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^+$ és $a\in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $a\in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_{a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

7.7. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T^f_{1,a}$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.8. Definíció. Legyen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^+$ és $a\in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)}\cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n\geq k\in\mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.9. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\mathbb{R}$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)\geq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)\leq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $a\neq x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)>f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $a\neq x\in B_r(a)\cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a)<f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.10. Definíció. Legyen $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $a\in \operatorname{Dom} f$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ függvény analitikus az a pontban* ha létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$ és olyan $s:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat, hogy $B_r(a)\in \operatorname{Dom} f$, valamint a

$$P_{s,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} s_k(x-a)^k$$

hatványsor abszolút konvergens minden $x\in B_r(a)$ elemre, és $P_{s,a}=f$ teljesül a $B_r(a)$ halmazon. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *analitikus*, ha analitikus minden $a\in \operatorname{Dom} f$ pontban. Adott $A\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű analitikus függvények halmazát $C^\omega(A,\mathbb{R})$ jelöli.

7.11. Definíció. Legyen $z\in\mathbb{C}$ és $n\in\mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n=0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n\neq 0. \end{cases}$$

8. Határozatlan integrál

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

8.2. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $l \in \mathbb{Z}^n$. Ekkor $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$x^{[l]} \triangleq \prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}.$$

Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}^+$. Ha minden $1 \leq j \leq k$ esetén $l_j \in \mathbb{Z}^n$ és $c_j \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{k} c_j x^{[l_j]}$$

függvényt n *változós polinomnak* nevezzük.

8.3. Definíció. (*Racionális függvény.*)
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt n *változós racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q n változós polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

9. Határozott integrál

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \triangleq \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{R} \\ a \leq b}} \{[a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}^+ \qquad [a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\mapsto b - a.$$

9.2. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon.$$

9.3. Definíció. A

$$C \triangleq [0,1] \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left]\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}}\right[$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.4. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} |\ p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p.

9.5. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \le i \le n - 1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ x_0 = a,\ x_{n-1} = b,\ \forall i \in (n-1):\ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \le x$ szimbólummal jelölünk.

9.6. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\ldots,m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i |\ 0 \le i \le n\} \cup \{y_i |\ 0 \le i \le m\}, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\ldots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \ldots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\ldots,k}$ felosztást az *x és az y felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.7. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

9.8. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

- *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int}_a^b f$;
- *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int}_a^b f$;
- *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$, ekkor $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ értéket.

Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{f : [a, b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}.$$

– Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq -\int_a^b f$$

jelölést.

– Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

– Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f *függvény határozott integráljának* nevezzük.

9.9. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha $\operatorname{Re}\circ f, \operatorname{Im}\circ f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és ekkor a

$$\int_a^b f \triangleq \left(\int_a^b \operatorname{Re}\circ f\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b \operatorname{Im}\circ f\right)$$

képlettel értelmezzük a komplex értékű függvény integrálját.

9.10. Definíció. A korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f,[a,b]) \triangleq \left(\sup_{t\in[a,b]} f(t)\right) - \left(\inf_{t\in[a,b]} f(t)\right).$$

Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f,[x_i,x_{i+1}])(x_{i+1}-x_i).$$

9.11. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.12. Definíció. (*Improprius integrál.*)

– Legyen $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,\infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,\infty[$ *intervallumon* és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény improprius integrálja divergens az* $[a,\infty[$ *intervallumon.*

– Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a],\mathbb{R})$ teljesül és a

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja a $]-\infty, a]$ intervallumon*, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \stackrel{\triangle}{=} \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $[a, b[$ intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \stackrel{\triangle}{=} \lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,b],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $]a, b]$ intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \stackrel{\triangle}{=} \lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.

10. Véges dimenziós terek topológiája

10.1. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & (\lambda,(x_1,\dots,x_n)) \mapsto (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) \end{array}$$

10.2. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

10.3. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}}.$$

10.4. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $\forall x \in \mathbb{K}^n : \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ téren.

10.5. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n | \ \|x - y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

10.6. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.7. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

10.8. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

10.9. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n | \ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

10.10. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

10.11. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

10.12. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

10.13. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

10.14. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

10.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^n$ teljes halmaz.

10.16. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

10.17. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^n$ térnek.

10.18. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\Big).$$

10.19. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_{a} f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

10.20. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))\Big).$$

- Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

10.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

10.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az *U és U részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

10.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x,y) < \delta \ \to \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

10.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.25. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

10.26. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

10.27. Definíció. Adott $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,\mathfrak{m}\}\\ j\in\{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

10.28. Definíció. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

10.29. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}\right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}\right)$ jelölést használjuk.

10.30. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}_{\mathrm{s}}^k((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ jelöli a továbbiakban.

10.31. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathrm{n}})^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

10.32. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0,1[\, \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \Big(d(f(x), f(y)) \leq C d(x,y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

10.33. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathrm{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\mathrm{dist}_A : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

10.34. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf \{\|x - y\| \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

10.35. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0,1]$ paraméterre $(1-t)x + ty \in K$ teljesül.

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

11.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}\, f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t)\ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;

- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$.
- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t)\right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

11.3. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az *f függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, akkor az $M \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli.

11.4. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y |\ t \in [0,1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

11.5. Definíció. (*Hatványsorok.*)
- Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  A P_a függvényt *a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

11.6. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban

12.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int} \operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

függvényt.

– Az *f differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.

– Az *f folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ jelöli.

12.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

12.3. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \operatorname{Dom} f$, valamint $i \in \{1, \ldots, k\}$ tetszőleges index.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az

$$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a

$$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$

jelölést használjuk.

– Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

$$\partial_i f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array} \right\}$$

függvényt.
– Az *f függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_i f = \operatorname{Dom} f$.
– Az *f függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

12.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}$$

Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak*.

12.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.
– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a)) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
– Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

$$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a))$$

függvényt.
Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

12.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ függvény.
– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
– Az *f függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.
A divergenciára használjuk még a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{div} f$ jelölést.

12.7. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

12.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.
– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az *f függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
– Az *f függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &\qquad a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \triangleq \operatorname{rot} f$ jelölést.

12.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R}^{\mathtt{m}}$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathtt{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathtt{m}}))$, ennek a kompozícióját a
$$\rho_{k-1} : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathtt{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathtt{m}})) \to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathtt{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathtt{m}}))$$
$$A \mapsto \Big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_n)\Big)$$
izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a
$$\mathrm{D}^{(k)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f) \to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathtt{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathtt{m}}) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a)$$
függvényt.
- Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)} f$.
- Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathtt{m}}$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^{\mathtt{m}})$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathtt{m}}$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^{\mathtt{m}})$ jelöli.

12.10. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a
$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} ((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x-a)^{[l]}$$
polinomot, amit az
$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{\mathtt{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f)(a)) \, (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$
alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a
$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$
hatványsort.

12.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

12.12. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)} f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy *a nyeregpontja az f függvénynek*.

13. Metrikus terek

13.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett ***metrikának*** vagy ***távolságfüggvénynek*** nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.
- $\forall x, y \in M : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : \ d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az (M, d) párt ***metrikus térnek*** nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

13.2. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M |\ d(x, y) < r\}$$

halmazt az ***x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek*** nevezzük.

13.3. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- ***nyílt***, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- ***zárt***, ha $M \setminus X$ nyílt;
- ***korlátos***, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

13.4. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x
- ***belső pontja az X halmaznak***, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- ***határpontja az X halmaznak***, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- ***torlódási pontja az X halmaznak***, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- ***izolált pontja az X halmaznak***, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

13.5. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X ***környezete*** az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

13.6. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz ***belsejének*** nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in M |\ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; ***lezártjának*** pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az ***érintési pontok*** halmazát. Az X halmaz ***határának*** nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

13.7. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- ***sűrű az Y halmazban***, ha $\overline{X} = Y$;
- ***sűrű***, ha $\overline{X} = M$.

13.8. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az ***(M, d) metrikus tér alterének*** nevezzük.

13.9. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy ***a d_1 és d_2 metrikák ekvivalensek***, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

13.10. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M, d) metrikus tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to M$ függvényeket ***sorozatoknak*** nevezzük.

– Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat ***határértéke***, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat ***konvergens***, ha létezik határértéke.
– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat ***divergens***, ha nem konvergens.

13.11. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

13.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.
– Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat ***korlátos***, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
– Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to M$ sorozatot az *a* ***sorozat részsorozatának*** nevezzük.

13.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \, \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ d(a_n, a_m) < \varepsilon\big).$$

13.14. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

13.15. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.
– Az $X \subseteq M$ halmaz ***kompakt***, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
– Azt mondjuk, hogy az (M, d) ***metrikus tér kompakt***, ha M kompakt halmaz.

13.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér ***lokálisan kompakt***, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

13.17. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz ***relatív kompakt***, ha létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül.

13.18. Definíció. Az (M, d) metrikus teret ***szeparábilisnek*** nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup\limits_{n\in I} U_n$ teljesül.

13.19. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz ***teljesen korlátos***, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül. Az (M, d) metrikus teret teljesen korlátosnak nevezzük, ha M teljesen korlátos halmaz.

13.20. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f ***függvény határértéke az a pontban*** $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

13.21. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M, d) és (M', d') topologikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

13.22. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

A $C(M,M')$ szimbólum jelöli az $M \to M'$ folytonos függvények halmazát.

13.23. Definíció. Legyen (M_1,d_1), (M_2,d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

13.24. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér. Az $f : M \to M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a *(M,d) és (M',d') metrikus terek homeomorfak*, ha létezik $f : M \to M'$ homeomorfizmus.

13.25. Definíció. Legyen (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x,y \in A : \quad \big(d_1(x,y) < \delta \ \rightarrow \ d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon \big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

13.26. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \twoheadrightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\operatorname{Dom} f} = M$.

13.27. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér. Az $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x,y \in \operatorname{Dom} f$ esetén $d(x,y) = d'(f(x),f(y))$ teljesül. Az (M,d) és (M',d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \to M'$ izometrikus homeomorfizmus.

13.28. Definíció. Legyen (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x,y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x),f(y)) \le C d_1(x,y) \Big).$$

13.29. Definíció. Legyen (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0,1[\forall x,y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x),f(y)) \le C d_1(x,y) \Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

13.30. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\}, & \text{ha} \quad A \ne \emptyset; \\ 0, & \text{ha} \quad A = \emptyset. \end{cases}$$

13.31. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az *A halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : M \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z,x).$$

13.32. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér. Minden (M',d') teljes metrikus teret és $j : M \to M'$ izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül, az (M,d) *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

13.33. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

– Az A *halmaz összefüggő*, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
– Az M *metrikus tér összefüggő*, ha az M halmaz összefüggő.
– Az A *halmaz ívszerűen összefüggő*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0,1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
– Az M *metrikus tér ívszerűen összefüggő*, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

13.34. Definíció. Legyen I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér. Az $M = \prod_{i \in I} M_i$ halmazból és a

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max \{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrikából álló (M, d) párt nevezzük az $(M_i, d_i)_{i\in I}$ *metrikus terek szorzatának*.

13.35. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
– *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{X} = \emptyset$;
– *első kategóriájú*, ha X előállítható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
– *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

14. Normált terek

14.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $\forall x \in V : \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in V : \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

14.2. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

14.3. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat.
– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

14.4. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \to \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V *normált tér topologikus duálisának* nevezzük.

14.5. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex l^p* (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

14.6. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\left\{ \|x_k\|_k \mid k \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^{n} V_k, \|\cdot\| \right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1,\ldots,n}$ *normált terek szorzatának.*

14.7. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \to V'$ lineáris izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér teljes burkának* nevezzük.

14.8. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ vektorterek rendszere, valamint legyen W is vektortér. Az

$$A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto A(x_1, \ldots, x_n)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *n-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre, minden $(x_i)_{i=1,\ldots,n}, (y_i)_{i=1,\ldots,n} \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorrendszere és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

teljesül. A $: \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}^n \left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W \right)$ jelölést használjuk.

14.9. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen V és W vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : V^n \to W$ függvény *szimmetrikus multilineáris leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_n \in V$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

teljesül. A $V^n \to W$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\operatorname{Lin}^n_{\mathrm{s}}(V^n, W)$ jelöli a továbbiakban.

14.10. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.

- Az *A multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az *A multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az *A multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az *A multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az *A multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq K \|x\|^n$.
- Az *A multilineáris leképezés szigorúan negatív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq -K \|x\|^n$.

– Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in V$ melyre $A(x, \dots, x) > 0$ és $A(y, \dots, y) < 0$.

14.11. Definíció. Legyen V vektortér és $K \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy a K halmaz
– *elnyelő*, ha minden $x \in V$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda K$;
– *konvex*, ha minden $x, y \in K$ és $c \in [0, 1]$ elemre $cx + (1 - c)y \in K$ teljesül;
– *szimmetrikus*, ha $K = -K$ teljesül.

14.12. Definíció. Legyen V vektortér és $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés. Azt mondjuk, hogy
– φ *szubadditív*, ha minden $x, y \in V$ esetén $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
– φ *pozitív homogén*, ha minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;
– φ *szublineáris*, ha szubadditív és pozitív homogén.

14.13. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto p(x)$$

függvényt *félnormának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $p(0) = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $\forall x, y \in V :\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Az (V, p) párt *félnormált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér, és p félnorma a V vektortéren.

14.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *reflexív*, ha a $j : V \to V''$ leképezés szürjektív.

14.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy a V vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma *összehasonlítható*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül, vagy létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$ teljesül.

14.16. Definíció. Legyen X, Y halmaz és $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f *függvény gráfjának* nevezzük a $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in \operatorname{Dom} f\}$ halmazt.

14.17. Definíció. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy A *zárt*, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $U \times V$ szorzattérben.

15. Hilbert-terek

15.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha
- $\forall x \in V :\ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V :\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V :\ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- $\forall x, y \in V :\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorzatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

15.2. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V téren.
– Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
– A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

15.3. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathscr{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha
$$\forall x \in \mathscr{H}\Big((\forall i \in I : \langle e_i, x\rangle = 0) \to x = 0\Big)$$
teljesül;
- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

15.4. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.

- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a $W \subseteq V$ halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.

15.5. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf\limits_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az *x vektor W altérre való ortogonális vetületének* vagy *projekciójának* nevezzük.

15.6. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a
$$L^\perp \triangleq (z \in \mathscr{H} |\ \forall x \in L :\ \langle x, z\rangle = 0)$$
halmazt L *ortogonálisának* nevezzük.

16. Függvénysorozatok, függvénysorok

16.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*
$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to M \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t)\ .$$
A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha
$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A :\ \big(N < n\ \to\ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon\big)$$
teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;

– *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
– *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.
– Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(T, V) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t)\right)$$

képlettel definiáljuk.
– A $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\right\} \to V \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) .$$

– Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

16.3. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér és $f : T \to M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az *f függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \to M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(T, M)$. Ha (T, d_T) metrikus tér, akkor a $T \to M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^{\mathrm{b}}(T, M)$.

16.4. Definíció. (*Hatványsorok.*)
– Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens}\right\} \to V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.
– Az $a : \mathbb{N} \to V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

16.5. Definíció. Ha V vektortér és $a, b \in V$, akkor a

$$[a, b] \triangleq \{ta + (1-t)b | \; t \in [0, 1]\}, \qquad]a, b[\triangleq \{ta + (1-t)b | \; t \in]0, 1[\}$$

halmazokat az *a és b végpontú szakasznak*, illetve *nyílt szakasznak* nevezzük.

16.6. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V,V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

16.7. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \to \{0,1\} \qquad (i,j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j; \\ 1, & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény.*

16.8. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \mathrm{Sp}(A) \to \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

16.9. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

16.10. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.
- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz szétválasztó T felett*, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

17. Differenciálszámítás

17.1. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathscr{L}(U,V)$, melyre

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : U \to V$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$\mathrm{D}f = \left\{(a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U, V) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0\right\}$$
függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

17.2. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja,* ha létezik a
$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$
határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

17.3. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és $k \in \{1, \dots, n\}$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a k-adik változója szerint az a pontban*, ha az $f \circ \mathrm{in}_{a,k} : U_k \to V$ függvény differenciálható az a_k pontban és ekkor a
$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)$$
jelölést használjuk.
- Az f függvény *k-adik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a
$$\partial_k f = \left\{(a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U_k, V) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,k} \text{ differenciálható az } a_k \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) \end{array}\right\}$$
függvényt.
- Az *f függvény parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_k f = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény parciálisan folytonosan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint és $\partial_k f$ folytonos.

17.4. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a) \in \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V))$, ennek a kompozícióját a
$$\rho_{n-1} : \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \quad A \mapsto \Big((x_1, \dots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_n)\Big)$$
izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$. Az $f : U \to V$ függvény *n-edik deriváltjának* nevezzük a
$$\mathrm{D}^{(n)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \qquad a \mapsto \rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a)$$
függvényt.
- Az *f függvény n-szer differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$.
- Az *f függvény n-szer folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(n)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, n-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, V)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, V)$ jelöli.

17.5. Definíció. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to V$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a} : U \to V \qquad (x) \mapsto T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(U, V)$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

17.6. Definíció. Legyen U normált tér $f : U \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

17.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0,1]$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in \,]0,1[$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
- Az *f függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
- Az *f függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
- Az *f függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\mathrm{Dom}\, f$ halmazon.

18. Fourier-sorok

18.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \ldots, n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

18.2. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \,\mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

18.3. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+2n, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Dirichlet-féle magfüggvényeknek* nevezzük.

18.4. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin^2\frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+n, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Fejér-féle magfüggvényeknek* nevezzük. indexFejér-féle magfüggvény

19. Komplex függvénytan

19.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény komplex differenciálható*, vagy *holomorf az a pontban* ha létezik a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
határérték. Ekkor a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ komplex számot az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az
$$f' = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\wedge\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \right\}$$
függvényt.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy *$\mathbb{C}$-differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

19.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az *f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának* nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ teljesül az *f függvény a pontbeli forgatási együtthatójának* nevezzük.

19.3. Definíció. Görbék főbb típusai.

– A $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a,b[$ halmazon, létezik a $\lim\limits_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t)$ és a $\lim\limits_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t)$ határérték, valamint a

$$\acute{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad t = a; \\ \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ \lim\limits_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad t = b. \end{cases}$$

függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim\limits_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(a), & \text{ha} \quad t \le a; \\ \gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ (t-b) \lim\limits_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(b), & \text{ha} \quad t \ge b. \end{cases}$$

függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.

– A $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.

– A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \operatorname{Dom} \gamma$ és $b = \sup \operatorname{Dom} \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

19.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény.

– Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \acute{\gamma}(t) \, \mathrm{d}\, t$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és a $\displaystyle\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\displaystyle\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}\, t$ szimbólummal jelöljük.

– Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ olyan, hogy a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és szintén a $\displaystyle\int_\gamma f$ vagy a $\displaystyle\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}\, t$ szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \acute{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \right| \mathrm{d}\, t$$

mennyiséget a *γ görbe hosszának* nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

– Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\displaystyle\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

19.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b-a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b-a) \int_0^1 f(a + t(b-a)) \, \mathrm{d}\, t.$$

19.6. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F *az f primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F *az f globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

19.7. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

19.8. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}$$

19.9. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a *γ_0 és γ_1 kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0, 1]^2 \to U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén $H(0, t) = \gamma_0(t)$ és $H(1, t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0, 1]$ esetén $H(p, 0) = H(p, 1)$.

19.10. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az *$U \subseteq M$ halmaz egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az *(M, d) metrikus tér egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

19.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az *f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}.$$

19.12. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in \,]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ r < |z - a| < R\}$$

halmazt az *a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

19.13. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n\in\mathbb{N}^+} c_{-n}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n\ .$$

– Ekkor a

$$C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - a)^n$$

függvénysort az *f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük.

– Az *f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*

$$f_r : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z - a)^n$$

és az *f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*

$$f_p : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z - a)^n.$$

– Az *f függvénynek az a pontban pólusa* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ | \; c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az

$$r_f(a) = \max\left\{m \in \mathbb{N}^+ | \; c_{-m} \neq 0\right\}$$

szám a *pólus rendje.*
– *Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ | \; c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
– A c_{-1} számot az *f függvény a pontbeli reziduumának* nevezzük és a $\mathrm{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

19.14. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\mathrm{Dom}\, f = \Omega \backslash A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.