Analízis alapjai

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában. Továbbá köszönöm *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézését.

Külön köszönettel tartozom *Szép Enikőnek* a jegyzet írása során nyújtott támogatásáért és bíztatásáért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\overset{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \overset{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Logikai alapok

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$

teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: *p és q*, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \to (q)$: *p-ből q következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: *p és q ekvivalensek*, ha $((p) \to (q)) \wedge ((q) \to (p))$;
- $\forall x(p)$: *minden x esetén p* teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

1.4. Tétel. *Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.*

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

1.5. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.6. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\
 & p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
 & & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{array}$$

teljesül.

1.2. A halmazelmélet axiómái

1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy A *részhalmaza* a B halmaznak, ha $\forall v(v \in A \to v \in B)$ teljesül, melynek jele $A \subseteq B$, vagy $B \supseteq A$.

1.8. Definíció. Az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük és a $\mathcal{P}(x)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, melynek elemei éppen x részhalmazai.

1.9. Definíció. Adott X halmaz esetén $\cup X$ jelöli azt a halmazt, melynek elemei éppen az X halmazban lévő halmazok elemei, vagyis $\cup X$ az X elemeinek egyesítését jelöli.

1.10. Definíció. Legyen A és B halmaz. Ekkor a páraxióma szerint létezik az $\{A, B\}$ halmaz, továbbá az egyesítési axóma szerint létezik az $\cup\{A, B\}$ halmaz, melyet a továbbiakban $A \cup B$ formában írunk, és az A, B *halmaz egyesítésének* (vagy *–uniójának*) mondunk.

1.11. Definíció. Az A halmaz *rákövetkezőjének* (vagy *szukcesszorának*) nevezzük az

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

halmazt.

1.12. Definíció. Az A halmazt *induktív halmaznak* vagy *monoton halmaznak* nevezünk, ha $\emptyset \in A$ és $\forall x \in A$ esetén $x^+ \in A$.

1.13. Definíció. Legyen x halmaz és p formula. A részhalmaz axiómaséma alapján az x halmaz azon elemei, melyekre p teljesül halmazt alkotnak. Ezt a halmazt a $\{u \in x |\ p\}$ szimbólummal jelöljük.

1.14. Definíció. Adott X halmazrendszer *metszetén* az

$$\{x \in \cup X |\ \forall z \in X\ x \in z\}$$

halmazt értjük, melynek jele $\cap X$. Az A, B halmaz esetén $\cap\{A, B\}$ helyett a $A \cap B$ jelölést használjuk, melyet az A, B *halmaz metszetének* mondjuk.

1.3. Elemi halmazműveletek

1.15. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A |\ x \notin B\}$ halmazt *A és B különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.16. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{llll} A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

1.17. Tétel. *(Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

1.4. Relációk

1.18. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.19. Tétel. *Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.*

1.20. Tétel. *Adott A, B halmaz, valamint $a \in A$, $b \in B$ elemek esetén*

$$(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

teljesül, így létezik az

$$\{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) |\ a \in A,\ b \in B\}$$

halmaz.

1.21. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.22. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

– *értelmezési tartománya*

$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in R\};$$

– *értékkészlete*

$$\operatorname{Ran} R \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in R\};$$

– *inverze*

$$\overset{-1}{R} \triangleq \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in R\};$$

– általi *képe a $H \subseteq X$ halmaznak*

$$R(H) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in H : (x,y) \in R\};$$

– *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y :\ (x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_2\}.$$

1.23. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \triangleq \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.5. Függvények

1.24. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y'(((x,y) \in R \wedge (x,y') \in R) \to y = y')$$

teljesül.

1.25. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
– *injektív*, ha $\forall x, x' \in X :\ (f(x) = f(x') \to x = x')$;
– *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
– *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.
Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.26. Tétel. *Ha f függvény, akkor $\overset{-1}{f}$ pontosan akkor függvény, ha f injektív.*

1.27. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze*. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható*.

1.28. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

1.29. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *jobb inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} f}$;
- *bal inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $g \circ f = \mathrm{id}_{\operatorname{Dom} f}$.

1.30. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X,Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y,Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z,V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$$

teljesül.

1.31. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \stackrel{\triangle}{=} +(x, y)$ jelöléssel élünk.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

  $$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge \ x' + x = e,$$

  ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

  $$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.32. Definíció. A $(G, \cdot)$ párt *félcsoportnak* nevezzük, ha $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív művelet. A $(G, \cdot)$ pár *kommutatív félcsoport*, ha $(G, \cdot)$ félcsoport és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.33. Definíció. A $(G, \cdot, e)$ hármast *csoportnak* nevezzük, ha $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív, egységelemes és inverzelemes művelet. Az egységelemet általában e jelöli absztrakt csoport esetén és a $g \in G$ elem inverzét pedig g^{-1}. Így csoportok esetén létezik egy

$$^{-1} : G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$$

inverzképzés. A $(G, \cdot, e)$ hármas *kommutatív csoport*, ha $(G, \cdot, e)$ csoport, és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.34. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

1.6. Halmazrendszerek

1.35. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \stackrel{\triangle}{=} f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.36. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A | \exists i \in I : \ x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A | \forall i \in I : \ x \in A_i\} .$$

1.37. Definíció. Az $(A_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I : \; f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i\in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

1.38. Tétel. *Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a*

$$\varphi : \prod_{i\in I} A_i \to A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

1.39. Tétel. *Ha $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I (A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*

1.40. Definíció. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer.
- Adott $k \in I$ esetén a

$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i\in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$

függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.
- Adott $a \in \prod_{i\in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a

$$\mathrm{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i\in I} A_i \;\middle|\; u_k = a, \; \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$

függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i\in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén

$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

1.7. Rendezések

1.41. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:
- *reflexív*, ha $\forall x \in X ((x, x) \in R)$;
- *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X (((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \to x = y)$.

1.42. Tétel. *Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció.*
1. *Az R pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.*
2. *Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.*
3. *Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.*
4. *Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}\, R}$.*

1.43. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

1.44. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X\ x' \leq x\ (x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

1.45. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.46. Tétel. *Legyen $(A, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz és $X \subseteq A$.*

1. *Az $y \in A$ elemre $\sup X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y felső korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül.*
2. *Az $y \in A$ elemre $\inf X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y alsó korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z > y \to (\exists x \in X : z > x))$ teljesül.*

1.47. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

1.48. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$[x, y] = \{z \in A|\ x \leq z \leq y\}$$
$$[x, y[\, = \{z \in A|\ x \leq z < y\}$$
$$]x, y] = \{z \in A|\ x < z \leq y\}$$
$$]x, y[\, = \{z \in A|\ x < z < y\}$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.49. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.50. Tétel. *(Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.*

1.8. Ekvivalenciarelációk

1.51. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

1.52. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \to y \in X)$.

1.53. Tétel. *Legyen A tetszőleges halmaz és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor minden $a \in A$ elemre az*

$$a/ \approx \triangleq \{x \in A|\ a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A/ \approx \triangleq \{X \in \mathcal{P}(A)|\ \exists a \in A :\ X = a/ \approx\}.$$

Továbbá az $A/\approx$ ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz

$$\forall x, y \in A/\approx:\ x \neq y \to x \cap y = \emptyset, \quad \text{és} \quad \cup\{x \mid x \in A/\approx\} = A$$

teljesül.

1.9. Természetes számok és rekurziók

1.54. Tétel. *Létezik egyetlen monoton halmaz, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz.*

1.55. Definíció. Azt a jól meghatározott monoton halmazt, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz, az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük és elemeit *természetes számoknak* hívjuk. Továbbá bevezetjük az $\mathbb{N}^+ \triangleq \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ jelölést.

1.56. Definíció.

$$\begin{aligned}
&0 \triangleq \emptyset\\
&1 \triangleq 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}\\
&2 \triangleq 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\
&3 \triangleq 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

1.57. Tétel. *(A teljes indukció elve.) Ha az $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazra $0 \in A$, valamint $\forall n \in A : n^+ \in A$ teljesül, akkor $A = \mathbb{N}$.*

1.58. Tétel. *A*

$$\leq \triangleq \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \subseteq n\}$$

reláció jólrendezés az $\mathbb{N}$ halmazon. Az $(m, n) \in \leq$ teljesülését szokásosan az $m \leq n$ alakban írjuk.

1.59. Tétel. *(Az egyszerű rekurzió tétele.) Legyen A halmaz, $a \in A$ tetszőleges elem és legyen $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times A, A)$ tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $f : \mathbb{N} \to A$ függvény melyre $f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n^+) = g(n, f(n))$ teljesül.*

1.60. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = k$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l^+.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = k$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l^+) = f_k(l)^+$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

összeadás műveletét.

1.61. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $n + 0 = n$
2. $m + n = n + m$
3. $k + (m + n) = (k + m) + n$
4. $m \leq n \to m + k \leq n + k$

1.62. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 0$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l + k.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 0$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l) + k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

szorzás műveletét.

1.63. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1n = n$
2. $mn = nm$
3. $k(mn) = (km)n$
4. $k(m + n) = km + kn$
5. $(m + n)k = mk + nk$
6. $m \leq n \to mk \leq nk$

1.64. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto lk.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 1$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l)k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

hatványozás műveletét, melyre a $k^l \triangleq h(k, l)$ jelölést alkalmazzuk.

1.65. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1^n = 1$
2. $k^{m+n} = k^m k^n$
3. $(k^m)^n = k^{mn}$

1.66. Tétel. *(A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele.) Legyen A halmaz és $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$. Tegyük fel, hogy*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

teljesül. Ekkor minden $N \in \mathbb{N}$ elemre és $a \in F_N$ függvényhez létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ sorozat, hogy $a'|_N = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n \in F_n$.

1.10. Természetes számoktól a komplex számokig

1.67. Tétel. *(Egész számok.)*

1. *Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon az*

$$\approx \triangleq \{((m, n), (m', n')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) | \; m + n' = m' + n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*

$$+' : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ((m, n), (m', n')) \mapsto (m + m', n + n')$$
$$\times' : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ((m, n), (m', n')) \mapsto (mm' + nn', m'n + n'm)$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_1', n_1'), (m_2', n_2') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

elemre $(m_1, n_1) \approx (m_1', n_1')$, $(m_2, n_2) \approx (m_2', n_2')$ esetén

$$(m_1, n_1) +' (m_2, n_2) \approx (m_1', n_1') +' (m_2', n_2')$$
$$(m_1, n_1) \times' (m_2, n_2) \approx (m_1', n_1') \times' (m_2', n_2')$$

teljesül.

3. A $\mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\approx$ *halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & ((m_1,n_1)/\approx,(m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & ((m_1,n_1)/\approx,(m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{array}$$

művelet és $\mathbb{N}$ *természetes módon beágyazható a* $\mathbb{Z}$ *halmazba.*

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto (n,0)/\approx$$

4. A $(\mathbb{Z},+)$ *kommutatív csoport és minden* $m,n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ *művelet inverzét* $-$.

5. A $\times$ *művelet asszociatív, kommutatív és egységelemes, disztributív a* $+$ *műveletre nézve és minden* $m,n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$

teljesül.

6. A $\mathbb{Z}$ *halmazon a*

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ \exists (m_a,n_a) \in a,\ \exists (m_b,n_b) \in b\ : m_a + n_b \leq m_b + n_a\}$$

reláció lineáris rendezés. Azt a tényt, hogy $(a,b) \in \leq$ *röviden az* $a \leq b$ *alakban írjuk.*

1.68. Definíció. A $\mathbb{Z}$ halmaz elemeit *egész számoknak* nevezzük.

1.69. Tétel. *(Racionális számok.) Legyen* $\mathbb{Z}' \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. Az $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ *halmazon az*

$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') |\ mn' = m'n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. Tekintsük az alábbi műveleteket.

$$\begin{array}{ll} +' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' & ((m,n),(m',n')) \mapsto (mn' + m'n, nn') \\ \times' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' & ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm', nn') \end{array}$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$$

elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ *esetén*

$$\begin{array}{c} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{array}$$

teljesül.

3. A $\mathbb{Q} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')/\approx$ *halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & ((m_1,n_1)/\approx,(m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & ((m_1,n_1)/\approx,(m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{array}$$

művelet és $\mathbb{Z}$ *természetes módon beágyazható a* $\mathbb{Q}$ *halmazba.*

$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad n \mapsto (n,1)/\approx$$

4. A $(\mathbb{Q},+)$ *kommutatív csoport és minden* $m,n \in \mathbb{Z}$ *esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ *művelet inverzét* $-$.

5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív, egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m, n \in \mathbb{Q}$ esetén*
$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$
teljesül.
6. *Minden $p \in \mathbb{Q}$ elemre $p \neq j(0)$ esetén létezik pontosan egy $p' \in \mathbb{Q}$ melyre $p \times p' = j(1)$ teljesül.*
7. *A $\mathbb{Q}$ halmazon a*
$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} |\ \exists (m_a, n_a) \in a,\ \exists (m_b, n_b) \in b :\ m_a \times n_b \leq m_b \times n_a\}$$
reláció lineáris rendezés, melyet $(a, b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ alakban írunk.

1.70. Definíció. A $\mathbb{Q}$ halmaz elemeit *racionális számoknak* nevezzük.

1.71. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös *test*, ha teljesíti az alábbiakat.
- $0, 1 \in K,\ 0 \neq 1$
- A $(K, +, 0)$ kommutatív csoport.
- A $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, 1 az egységeleme és minden nem nulla elemnek létezik inverze.
- A $\cdot$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve.

1.72. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatost *rendezett testnek* mondjuk, ha az teljesíti az alábbiakat.
- A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös test.
- A $\leq$ reláció lineáris rendezés.
- $\forall k, m, n \in K : (m \leq n \to m + k \leq n + k)$
- $\forall k, m, n \in K : ((m \leq n \land 0 \leq k) \to mk \leq nk)$

1.73. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos *teljesen rendezett test*, ha
- A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test;
- minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma.

1.74. Tétel. *A $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos lineárisan rendezett test, de nem teljesen rendezett test.*

1.75. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{Q}$ halmazt *Dedekind-szeletnek* hívjuk, ha
- $X \neq \emptyset$;
- X felülről korlátos;
- az X halmaznak nincs legnagyobb eleme a $\mathbb{Q}$ halmazban;
- minden $x \in X$ esetén
$$\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \subseteq X$$
teljesül.

1.76. Definíció. A Dedekind-szeleteket *valós számoknak* nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

1.77. Tétel. *(Műveletek valós számokkal.)*
1. *Az $\mathbb{R}$ halmazon a*
$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x \subseteq y\}$$
reláció rendezés, melyet $(x, y) \in \leq$ esetén az $x \leq y$ alakban írunk fel.
2. *A*
$$j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} |\ q < x\}$$
beágyazás injektív.
3. *Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*
$$x + y \stackrel{\triangle}{=} \{q_x + q_y |\ q_x \in x,\ q_y \in y\}$$
halmazra $x + y \in \mathbb{R}$ teljesül. Igy értelmezhető a
$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y$$
összeadás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(0)$ az egységeleme.

4. Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén legyen*

$$-x \triangleq \{q \in \mathbb{Q} |\ \forall r \in x :\ q < -r\}$$

Ekkor $-x \in \mathbb{R}$, *így értelmezhető a*

$$- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -x$$

művelet, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $x + (-x) = j(0)$ *teljesül.*

5. Legyen $\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ j(0) < x\}$. *Adott* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *esetén*

$$x \times y \triangleq]-\infty, 0] \cup \left\{q_x \times q_y |\ q_x \in x \cap \mathbb{Q}^+,\ q_y \in y \cap \mathbb{Q}^+\right\}$$

halmazra $x \times y \in \mathbb{R}^+$ *teljesül. Igy értelmezhető a*

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x \times y & ha \quad x > j(0),\ y > j(0) \\ -(x \times (-y)) & ha \quad x > j(0),\ y < j(0) \\ -((-x) \times y) & ha \quad x < j(0),\ y > j(0) \\ (-x) \times (-y) & ha \quad x < j(0),\ y < j(0) \\ j(0) & ha \quad x = j(0),\ vagy\ y = j(0). \end{cases}$$

szorzás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(1)$ *az egységeleme.*

6. Az $(\mathbb{R}, +, \times, j(0), j(1), \leq)$ *hatos teljesen rendezett test.*

7. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ *elemre*

$$j(x + y) = j(x) + j(y), \quad j(x \times y) = j(x)j(y), \quad j(-x) = -j(x)$$

teljesül.

1.78. Tétel. *Létezik olyan* $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *nyolcas, ahol*

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;

2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ *függvény,* $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

tulajdonságokkal;

3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ *függvény,* $^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *részhalmaz, melyre minden* $(a, b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *jelölést használjuk és mely rendelkezik a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge\ b \leq a) \ \to\ a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge\ b \leq c) \ \to\ a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \leq b \ \vee\ b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b) \ \to\ a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge\ 0 \leq c) \ \to\ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

5. *továbbá*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \leq s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \leq s') \ \rightarrow \ s \leq s')))))$$

teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.*

1.79. Tétel. *Legyen* $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : \quad x < y \ \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \rightarrow \ yz < xz$
7. $\forall x \in K : \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : \quad 0 < x < y \ \rightarrow 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

1.80. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

1.81. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\lesssim \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$

továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.82. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$[x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} | \ x \leq z\}$$
$$]x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} | \ x < z\}$$
$$]-\infty, x] = \{z \in \mathbb{R} | \ z \leq x\}$$
$$]-\infty, x[= \{z \in \mathbb{R} | \ z < x\}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

1.83. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.84. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

1.85. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

1.86. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{Z} |\ x < n\} - 1, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

1.87. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha* $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, ^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ *teljesen rendezett test, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ *bijekció, melyre* $\varphi(0) = \mathbf{0}$*,* $\varphi(1) = \mathbf{1}$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elem esetén*

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow \ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y \ &\Leftrightarrow \ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

1.88. Tétel. *A* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *halmazon értelmezzük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x, y), (x', y')) \mapsto (x + x', y + y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

1. *Ekkor* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.*
2. *A*

   $$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, 0)$$

   olyan injekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $j(x) + j(y) = j(x + y)$ *és* $j(x) \cdot j(y) = j(x \cdot y)$ *teljesül.*

1.89. Definíció. A $\mathbb{C}$ halmazt a *komplex számok halmazának* nevezzük, elemeit pedig *komplex számoknak*. A $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ elemet az $a + b\,\mathrm{i}$ alakban írjuk, ahol $a = \operatorname{Re} z$ a komplex szám *valós része*, $b = \operatorname{Im} z$ pedig a *képzetes része*, vagyis

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a, b) \mapsto a \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a, b) \mapsto b. \end{aligned}$$

A z *konjugáltja* $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$.

1.90. Tétel. *Nem létezik olyan rendezés a komplex számtest felett, mellyel a komplex számok halmaza rendezett test lenne.*

1.11. Számosságok

1.91. Definíció. Legyen A és B halmaz.

- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : \ |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.

- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

1.92. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

1.93. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

1.94. Tétel. *Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.*

1.95. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.

- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.96. Tétel. *Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.*
2. $|A \times B| = mn$
3. *Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.*
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

1.97. Tétel. *(Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)*

1. *Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.*
3. *Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.*
4. *Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.*
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. *Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.*

1.98. Tétel. *Legyen A, B olyan halmaz, melyre $|A|, |B| \geq 2$ teljesül. Ekkor*

$$|A \cup B| \leq |A \times B|.$$

1.99. Tétel. *(Számosságaritmetika alaptétele.) Minden végtelen A halmazra $|A| = |A \times A|$ teljesül.*

1.100. Tétel. *(Kontinuum számosság.)*

1. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $|]a, b[| = |\mathbb{R}|$.*
2. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$ teljesül, akkor*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2.2. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.*

2.3. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x *n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.4. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

2.5. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ *számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjő hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha} \quad q > 0,\ q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha} \quad q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha} \quad q < 0,\ q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$ és $0^0 \triangleq 1$.

2.6. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.*

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

2.7. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i, & \text{ha} \quad n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az *n alatt a k* számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \leq n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.8. Tétel. *(Binomiális tétel.) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2.9. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K: \ (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K: \ |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K: \ |x + y| \leq |x| + |y|$

2.10. Tétel. *Legyen $(K, +, \cdot)$ test. Ekkor*

$$|\cdot|_\infty : K \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq 0, \\ 0 & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

abszolút érték.

2.11. Definíció. A fent definiált $|\cdot|_\infty$ függvényt *improprius abszolút értéknek* nevezzük a $(K,+,\cdot)$ test felett.

2.12. Tétel. *Az*

$$|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+ \quad z\mapsto\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

2.13. Tétel. *(Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és minden $k\in\{1,\dots,n\}$ esetén $x_k\in\mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\geq\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}.$$

2.2. Függvények összege, szorzata

2.14. Definíció. Legyen A halmaz, $+:A\times A\to A$ művelet, $a\in A$ és $U,V\subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$\begin{aligned}U+V&:=\{u+v\in A|\ u\in U,\ v\in V\}\\ a+V&:=\{a+v\in A|\ v\in V\}\\ U+a&:=\{u+a\in A|\ u\in U\}\end{aligned}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek.*

$$\begin{array}{ll}\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A) & (U,V)\mapsto U+V\\ \mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A) & V\mapsto a+V\\ \mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A) & U\mapsto U+a\end{array}$$

2.15. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

- Ha $f,g\in\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ és $c\in\mathbb{K}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét, szozatát, számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{array}{rl}f+g:A\to\mathbb{K} & a\mapsto f(a)+g(a)\\ fg:A\to\mathbb{K} & a\mapsto f(a)g(a)\\ cf:A\to\mathbb{K} & a\mapsto cf(a)\\ |f|:A\to\mathbb{K} & a\mapsto|f(a)|\end{array}$$

- értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{array}{ll}+:\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\times\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\to\mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g)\mapsto f+g\\ \times:\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\times\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\to\mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g)\mapsto fg\\ \cdot:\mathbb{K}\times\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\to\mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (c,f)\mapsto cf\\ |\cdot|:\mathcal{F}(A,\mathbb{K})\to\mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f)\mapsto|f|\end{array}$$

  Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek.*

- Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén legyen $f_i\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{array}{rl}\sup(f_1,\dots,f_n):A\to\mathbb{R} & a\mapsto\sup(f_1(a),\dots,f_n(a))\\ \inf(f_1,\dots,f_n):A\to\mathbb{R} & a\mapsto\inf(f_1(a),\dots,f_n(a))\end{array}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$f_+ : A \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \sup(f(a), 0)$$
$$f_- : A \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto -\inf(f(a), 0)$$

2.16. Tétel. *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.*

1. *Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*
$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_- \qquad f_+ f_- = 0 \tag{2.1}$$
teljesül.
2. *Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*
$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$
teljesül.

2.17. Tétel. *Ha A tetszőleges nem üres halmaz, akkor az $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ hármas vektortér $\mathbb{K}$ felett, valamint $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*

2.18. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója a_n*. Az $x_0 \in \mathbb{K}$ számot a *p polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

2.19. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok halmazát. Ekkor $\mathcal{P}_n$ vektortér a pontonkénti függvényműveletekkel. Továbbá a $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ polinomhalmaz algebra a pontonkénti függvényműveletekkel.*

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{K}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K} |\ |x - y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz

– *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
– *zárt*, ha $\mathbb{K} \setminus X$ nyílt;
– *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

3.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{K}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

3.5. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*

1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*

3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

3.6. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*
1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

3.7. Tétel. *Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{K}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

3.8. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X = \{x\}$.

3.9. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.10. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K} | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K} | \ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

3.11. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

3.12. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

3.13. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

3.14. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.*
1. *Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.*
2. *Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.*

3.15. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az *X halmaz sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az *X halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{K}$ halmazban.

3.16. Tétel. *(A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)*
1. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*
2. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*

3.17. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{R}$ sűrű részhalmaza a valós számok halmazának. Ekkor az $S + \mathrm{i} S$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.*

3.18. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

3.19. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

3.2. Kompakt halmazok

3.20. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *(be)fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{K}$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i\in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül.

3.21. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

3.22. Tétel. *(Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

4. Sorozatok

4.1. A határérték és tulajdonágai

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat értékeire az $a_n \overset{\triangle}{=} a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

– Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{K}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to \varepsilon < a_n).$$

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to -\varepsilon > a_n).$$

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

4.4. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.5. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha a $\mathrm{Re} \circ a$ és az $\mathrm{Im} \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens és ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

4.6. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *korlátos*, ha $\mathrm{Ran}\, a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$.

4.7. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

4.8. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

4.9. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

4.10. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

4.11. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.*
3. *Az ab sorozat konvergens és $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.*
4. *Az $\overline{a}$ sorozat konvergens és $\lim \overline{a} = \overline{\lim a}$.*
5. *Az $|a|$ sorozat konvergens és $\lim |a| = |\lim a|$.*
6. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{a}$ sorozat konvergens és $\lim \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\lim a}$.*

4.12. Tétel. *A konvergens valós- illetve komplex számsorozatok algebrát alkotnak.*

4.13. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatra $\lim |a| = 0$ teljesül, akkor $\lim a = 0$*

4.14. Tétel. *Ha az $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozatra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le b_n$, akkor $\lim a \le \lim b$.*

4.15. Tétel. *(Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens és $\lim b = x$.*

4.16. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$a^p : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

4.17. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

4.18. Tétel. *(Sorozatok racionális hatványa.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az*

$$a^q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha} \quad \lim a > 0 \ \vee \ q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha} \quad \lim a = 0 \ \wedge \ q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

4.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal

4.19. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

4.20. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

4.21. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.*

4.3. Limesz inferior és szuperior

4.22. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right)$$

és *limesz szuperiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right).$$

4.23. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.*

4.24. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat.*

1. *Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.*
2. *Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ és $\liminf a = \limsup a$, akkor az a sorozat konvergens és $\lim a = \liminf a$ teljesül.*

4.4. Cauchy-sorozatok

4.25. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}((N < n \ \wedge \ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

4.26. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

4.27. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

4.28. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

4.29. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

4.5. Nevezetes határértékek

4.30. Tétel. *Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \textit{ha} \quad \alpha > 0, \\ 1 & \textit{ha} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \textit{ha} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

4.31. Tétel. *Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \textit{ha} \quad q > 1, \\ 1 & \textit{ha} \quad q = 1, \\ 0 & \textit{ha} \quad -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \leq -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

4.32. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|q| < 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*
2. *Ha $q = 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.*
3. *Ha $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat divergens.*

4.33. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.*

4.34. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4.35. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

4.36. Tétel. *(Gyökkritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

4.37. Tétel. *(Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

4.38. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.*

4.39. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{K}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.*

4.40. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

4.41. Tétel. *(Napier állandó.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*
$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
sorozat korlátos, monoton növő, tehát konvergens.
2. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a*
$$b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
konvergens.
3. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

4.42. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

4.43. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}\ .$$

5. Sorok

5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

5.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum\limits_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *A $\sum(a + b)$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. *A $\sum \overline{a}$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n}$.

5.3. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor* $\lim a = 0$.

5.4. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

5.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \to \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

5.2. Majoráns és minoráns kritérium

5.6. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$ és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$ és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.*

5.7. Tétel. *A $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergens, a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor konvergens.*

5.3. Abszolút konvergens sorok

5.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.9. Tétel. *Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

5.10. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$. A $\sum_n q^n$ sor*

1. *divergens, ha $|q| \geq 1$;*
2. *abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

5.4. Konvergenciakritériumok

5.11. Tétel. *(Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha a $\sum_n a_n$ és a $\sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

5.12. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.*

5.13. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén*

1. *$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*

2. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor divergens.*

5.14. Tétel. *Minden* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *sorozatra*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.15. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *olyan, melyre létezik a* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{K}$ *határérték. Ekkor létezik a* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *határérték és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.16. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium.) Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *sorozat esetén*

1. $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens;*
2. $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor divergens.*

5.5. Leibniz-sorok

5.17. Definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$. A $\sum a$ sor *m-edik részletösszege*

$$S_m \triangleq \sum_{n=0}^{m} a_k.$$

A konvergens $\sum a$ sor *m-edik hibatagja*

$$H_m \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n,$$

melyet gyakran a $H_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

5.18. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.19. Tétel. *Ha* $\sum_n (-1)^n a_n$ *Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$|H_n| \le a_{n+1}.$$

5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok

5.20. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.21. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

5.22. Tétel. *(Riemann-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy a $\sum a$ sor feltételesen konvergens. Ekkor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemre $\alpha \leq \beta$ esetén létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy*

$$\liminf \sum a \circ \sigma = \alpha \quad \textit{és} \quad \limsup \sum a \circ \sigma = \beta$$

teljesül.

5.23. Tétel. *Egy sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha feltétlen konvergens.*

5.7. Sorok Cauchy-szorzata

5.24. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

5.25. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.26. Tétel. *(Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum (a * b)$ sor is abszolút konvergens.

5.8. Sorok pontonkénti szorzata

5.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat

- *korlátos változású*, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

  teljesül;
- *korlátos részletösszegű*, ha a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \infty$$

  teljesül.

5.28. Tétel. *(Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \right)$$

teljesül.

5.29. Tétel. *(Dirichlet-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens,*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1 - q|}.$$

5.9. Elemi függvények

5.30. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \text{a } \sum_n a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt az *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

5.31. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \operatorname{Dom} P_a$.

2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \operatorname{Dom} P_a$.

5.32. Tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

5.33. Definíció. (*Elemi függvények.*)

– Az *exponenciális függvény*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

– A *szinusz függvény*

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz függvény*

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\operatorname{tg} : \{z \in \mathbb{C} |\; \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

– A *kotangens függvény*

$$\operatorname{ctg} : \{z \in \mathbb{C} |\; \cos z \sin z \neq 0 \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

– A *szinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{sh}: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{ch}: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{th}: \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{ch}\, z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{cth}: \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{ch}\, z\, \mathrm{sh}\, z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\mathrm{th}\, z}.$$

5.34. Tétel. *(Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\exp(\mathrm{i}\, z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás

5.35. Tétel. *(Az exponenciális függvény.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$.*
2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.*
3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.*
4. *Minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ számra $x_1 < x_2$ esetén $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ teljesül, vagyis az*

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$$

függvény injektív.

5.36. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\mathrm{Dom}\log = \mathrm{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x \in \mathrm{Dom}\log$ számra $\exp(\log x) = x$.

5.37. Definíció. Legyen $x \in \mathrm{Dom}\log$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z \log(x))$$

számot *az x szám z-edik hatványának* nevezzük.

5.38. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$. (értéke megközelítőleg $\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$.)

5.39. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.*

5.40. Tétel. *Legyen $x, y \in \mathrm{Dom}\log$ olyan szám, melyre $x^y \in \mathrm{Dom}\log$ és legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$x^0 = 1, \qquad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \qquad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \qquad (x^y)^{z_1} = x^{y z_1}$$

teljesül.

5.41. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.*

5.42. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x)\\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).
\end{aligned}$$

3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \qquad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x, \qquad \operatorname{ch}(ix) = \cos x.$$

4. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

5. *Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor* $|e^{ix}| = 1$.

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Függvények tulajdonságai

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

  $$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$$

  teljesül;
- *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

  $$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$

  teljesül;
- *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x + p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az f *függvény periódusának* nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség.)* *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \le i \le n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \le i \le n} \in [0,1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \le i \le n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \le i \le n} \in [0,1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

6.2. Függvény határértéke

6.3. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$
– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.5. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A\ (\varepsilon < x).$$
Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az *f függvény határértéke a végtelenben,*

– $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$
– *végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$
– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.7. Tétel. *(A határérték egyértelműsége.)*

1. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*
2. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.*

6.8. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.
- Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

6.9. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és legyen $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$, akkor $\lim\limits_{a} fg = 0$.*

6.10. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaznak. (A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben $a = \pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} g$, valamint $\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{a} g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont*

1. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(f+g)$ létezik és*
$$\lim_{a}(f+g) = \lim_{a} f + \lim_{a} g;$$
2. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(fg)$ létezik és*
$$\lim_{a}(fg) = \left(\lim_{a} f\right)\left(\lim_{a} g\right);$$
3. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim\limits_{a}(\lambda f)$ létezik, és*
$$\lim_{a}(\lambda f) = \lambda(\lim_{a} f);$$
4. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim\limits_{a} |f|$ létezik és*
$$\lim_{a} |f| = \left|\lim_{a} f\right|;$$
5. *torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(\overline{f})$ halmaznak, $\lim\limits_{a} \overline{f}$ létezik és*
$$\lim_{a} \overline{f} = \overline{\lim_{a} f}.$$
6. *Ha az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)$ halmaznak és $\lim\limits_{a} f \neq 0$, akkor $\lim\limits_{a} \frac{1}{f}$ létezik és*
$$\lim_{a} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_{a} f}.$$

6.11. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{a} g$ határérték, akkor $\lim\limits_{a} f \leq \lim\limits_{a} g$.*

6.12. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.)* *Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim\limits_{a} g$ határérték és $\lim\limits_{a} g = A$.*

6.13. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_{z} f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.*

6.3. Féloldali határérték

6.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

– Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a,\infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim_{a+} f$ vagy a $\lim_{x\to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

– Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty,a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim_{a-} f$ vagy a $\lim_{x\to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

6.15. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke és $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$ teljesül.*

6.4. Függvény folytonossága

6.16. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{K}) \overset{\triangle}{=} \{ f : A \to \mathbb{K} |\ f \text{ folytonos} \}$$

jelölést használjuk.

6.17. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

6.18. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{K})$ elemre és minden $c \in \mathbb{K}$ számra*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{K}).$$

6.19. Tétel. *Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

6.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.*

6.21. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a, b, c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

6.22. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.*

6.23. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

6.24. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

6.25. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim_{a\pm} f$, de $\lim_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim_{a\pm} f$ és $\lim_{a-} f = \lim_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei

6.26. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

6.27. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.*

6.28. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.*

6.29. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

6.30. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor* $\operatorname{Ran} f$ *nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.*

6.6. Függvény egyenletes folytonossága

6.31. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

6.32. Tétel. *Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

6.33. Tétel. *(Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

6.7. Hatványsorok határértéke

6.34. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha az a sorozat által meghatározott P_a hatványsor konvergenciasugara R_a, akkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara is R_a.

6.35. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in \left]0, R_a - |z_0|\right[$, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

6.36. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim\limits_{x \to z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.*

6.8. Elemi függvények folytonossága

6.37. Tétel. *Az* exp, sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th *és* cth *függvény folytonos.*

6.38. Tétel. *(Nevezetes határértékek.)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

6.39. Tétel. *Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvényre $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ teljesül és a $\log$ függvényre pedig $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$.*

6.40. Tétel. *(A logaritmus függvény.) A $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, szigorúan monoton növő bijektív függvény.*

6.41. Tétel. *(A hatványfüggvény folytonossága.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$\mathrm{id}^\alpha_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^\alpha$$

függvény folytonos.

6.42. Tétel. *(A π szám bevezetése.)*

1. *Minden $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ esetén $\sin x > 0$.*
2. *A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left]0, \sqrt{3}\right[$ intervallumon.*
3. $\cos\sqrt{3} < -\dfrac{1}{8}$
4. *Létezik egyetlen olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.*

6.43. Definíció. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \stackrel{\triangle}{=} 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai

6.44. Tétel. *(Nevezetes szögek.)*

1. *A* $\frac{\pi}{2}$ *és a* π *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1 \qquad \cos\pi=-1 \qquad \sin\pi=0$$

2. *Minden* $x\in\mathbb{C}$ *esetén*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \qquad \sin(x+\pi)=-\sin x \qquad \sin(x+2\pi)=\sin x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \qquad \cos(x+\pi)=-\cos x \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

3. *Minden* $x\in\mathbb{C}$ *számra*

$$\mathrm{e}^{x+2\pi\,\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{x}, \qquad \operatorname{sh}(x+2\pi\,\mathrm{i})=\operatorname{sh}x, \qquad \operatorname{ch}(x+2\pi\,\mathrm{i})=\operatorname{ch}x.$$

4. *A* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *és a* $\frac{\pi}{3}$ *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.45. Tétel. *(Euler képlet.)* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}=-1$

6.46. Tétel. *(Trigonometrikus függvények periódusa.)*

1. *Minden* $x\in\,]0,\pi[$ *esetén* $\sin x>0$, *minden* $x\in\,]\pi,2\pi[$ *esetén* $\sin x<0$.
2. *A* $\sin x=0$ *egyenletnek* $x\in[0,2\pi[$ *esetén* $x\in\{0,\pi\}$ *az összes megoldása.*
3. *A* $\sin$ *függvény periódusa* 2π.
4. *Minden* $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x>0$, *minden* $x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x<0$.
5. *A* $\cos x=0$ *egyenletnek* $x\in[0,2\pi[$ *esetén* $x\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ *az összes megoldása.*
6. *A* $\cos$ *függvény periódusa* 2π.

6.47. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* $\cos$ *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $[0,\pi]$ *intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]}:[0,\pi]\to[-1,1] \qquad x\mapsto\cos x$$

bijekció.

2. *A* $\sin$ *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon és*

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1] \qquad x\mapsto\sin x$$

bijekció.

3. *A* tg *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, valamint szigorúan monoton növő a* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon és*

$$\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\operatorname{tg}x$$

bijekció.

6.48. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg} \triangleq \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

6.49. Tétel. *Az* arcsin *az* arccos *és az* arctg *függvény folytonos.*

6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai

6.50. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. A ch *függvény szigorúan monoton növő a* $[0,\infty[$ *halmazon és*
$$\operatorname{ch}|_{[0,\infty[} : [0,\infty[\to [1,\infty[\qquad x \mapsto \operatorname{ch} x$$
bijekció.

2. Az sh *függvény szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*
$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$
bijekció.

3. A th *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*
$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to]-1,1[\qquad x \mapsto \operatorname{th} x$$
bijekció.

6.51. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

– Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis
$$\operatorname{arsh} \triangleq (\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$
– A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis
$$\operatorname{arch} \triangleq (\operatorname{ch}|_{[0,\infty[})^{-1}.$$
– A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis
$$\operatorname{arth} \triangleq (\operatorname{th}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

6.52. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

2. Minden $x \in [1,\infty[$ *esetén* $\operatorname{arch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

3. Minden $x \in]-1,1[$ *esetén* $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

6.53. Tétel. *Az* arsh *az* arch *és az* arth *függvény folytonos.*

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Differenciálhatóság

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \mid \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|} = 0.$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

7.4. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \ \to\ |f(x)-f(a)-c(x-a)| \le \varepsilon \cdot |x-a| \big).$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

7.5. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

7.6. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

7.7. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor*
$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R})$$
teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ algebra.

7.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

7.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \qquad b \triangleq \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az *f függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.3. Hatványsorok deriválása

7.10. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor differenciálható a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

7.11. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n})' = -n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n-1}$.)*

7.12. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

7.13. Tétel. *(Elemi függvények deriváltja.)* $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

7.4. Középértéktételek

7.14. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

7.15. Tétel. *(Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

7.16. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

7.17. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a| \,.$$

7.18. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

7.5. Függvény inverzének deriválása

7.19. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható és minden $b \in f(I)$ pontra*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

7.6. Elemi függvények inverzének deriválása

7.20. Tétel. *(Elemi függvények inverzének a deriváltja.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$.*
2. *Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.*
3. *Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.*
4. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.*
5. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.*
6. *Minden $x \in]1, \infty[$ esetén $\mathrm{arch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.*
7. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{arth}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.*

7.21. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a $\mathrm{Ran}\, f$ halmazon és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in$*

$\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{-1}$ *elemre.*

f	$\operatorname{Dom} f$	$\operatorname{Ran} f$	f'	f^{-1}	$\operatorname{Dom} f^{-1}$	$\operatorname{Ran} f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	exp	log	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	cos	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1,\infty[$	sh	arch	$[1,\infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	arth	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$

7.22. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*

1. *Ha* $a\in[1,\infty[$, *akkor az* $\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^a$ *függvény deriváltja* $a\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.
2. *Ha* $a\in\,]-\infty,1[$, *akkor az* $\operatorname{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^a$ *függvény deriváltja* $a\operatorname{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{a-1}$.

7.7. L'Hospital szabály

7.23. Tétel. *(L'Hospital szabály.) Legyen* $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$, $a<b$ *és* $f,g:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvény, hogy* $0\notin g'(]a,b[)$.

1. *Ha* $\lim_{b-} f=\lim_{b-} g\in\{-\infty,0,\infty\}$ *és létezik a* $\lim_{b-}\frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim_{b-}\frac{f}{g}$ *határérték is és*
$$\lim_{b-}\frac{f}{g}=\lim_{b-}\frac{f'}{g'}.$$
2. *Ha* $\lim_{a+} f=\lim_{a+} g\in\{-\infty,0,\infty\}$ *és létezik a* $\lim_{a+}\frac{f'}{g'}$ *határérték, akkor létezik a* $\lim_{a+}\frac{f}{g}$ *határérték is és*
$$\lim_{a+}\frac{f}{g}=\lim_{a+}\frac{f'}{g'}.$$

7.8. Többszörös deriváltak

7.24. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)}\triangleq f$ és minden $i\in\mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)}\triangleq(f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $a\in\mathbb{R}$. Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a\in\operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható az $a\in\mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $a\in\operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az *f függvény n-szer ($n\in\mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)}=\operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)}=\operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A,\mathbb{R})$ jelöli.

– Az f *függvény* n*-szer* ($n \in \mathbb{N}^+$) *folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.25. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.*

7.26. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.*

7.27. Tétel. *(Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

7.28. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in \,]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^{\beta}.$$

7.29. Tétel. *(Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7.9. Taylor-sorfejtés

7.30. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in \,]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! p}(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p.$$

7.31. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in \,]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T_{n,a}^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T_a^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

7.33. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T_{1,a}^f$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.34. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)} \cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$ és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T_{n,a}^f$.*

7.36. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

7.10. Lokális szélsőérték jellemzése

7.37. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

– Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
– Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
– Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
– Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
– Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.38. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) < 0$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) > 0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

7.39. Tétel. *Legyen $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy*

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \forall x \in B_r(a).$$

7.40. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ függvény analitikus az a pontban* ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és olyan $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy $B_r(a) \in \operatorname{Dom} f$, valamint a

$$P_{s,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} s_k (x-a)^k$$

hatványsor abszolút konvergens minden $x \in B_r(a)$ elemre, és $P_{s,a} = f$ teljesül a $B_r(a)$ halmazon. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *analitikus*, ha analitikus minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban. Adott $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű analitikus függvények halmazát $C^{\omega}(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.41. Tétel. *Legyen $c \in \mathbb{K}$ és $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén*

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

7.42. Tétel. *Ha $x \in \left]-1, 1\right[$, akkor*

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

7.11. Binomiális sorfejtés

7.43. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

7.44. Tétel. *(Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in \left]-1, 1\right[$ esetén*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

8. Határozatlan integrál

8.1. Primitív függvény és tulajdonságai

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

8.2. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor*

$$\int f = \{F + C |\ C \in \mathbb{R}\}.$$

8.3. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

8.4. Tétel. *(Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \exp = \exp + C \qquad \int \sin = -\cos + C \qquad \int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \log|x| + C \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + C \qquad \int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + C$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C$$

8.2. Integrálási módszerek

8.5. Tétel. *(Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

8.6. Tétel. *(Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi.$$

8.7. Tétel. *(Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \arcsin(x)\ \mathrm{d}\,x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\int \arccos(x)\;\mathrm{d}\,x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \operatorname{arctg}(x)\;\mathrm{d}\,x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arsh}(x)\;\mathrm{d}\,x = x\operatorname{arsh} x - \sqrt{1+x^2} + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arch}(x)\;\mathrm{d}\,x = x\operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C \qquad x \in]1,\infty[$$

$$\int \operatorname{arth}(x)\;\mathrm{d}\,x = x\operatorname{arth} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \log(x)\;\mathrm{d}\,x = x\log(x) - x + C \qquad x \in]0,\infty[$$

8.8. Tétel. *Legyen $n,m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az*

$$\int \sin^n \cos^m$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. *Ha $m = 0$, akkor*

$$\int \sin^n x\;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}\displaystyle\int (1-\cos t)^k\;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n = 2k\ (k \in \mathbb{N}),\\ -\displaystyle\int (1-t^2)^k\;\mathrm{d}\,t, & t = \cos x \quad \textit{ha} \quad n = 2k+1\ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. *Ha $n = 0$, akkor*

$$\int \cos^m x\;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}\displaystyle\int (1+\cos t)^k\;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad m = 2k\ (k \in \mathbb{N}),\\ \displaystyle\int (1-t^2)^k\;\mathrm{d}\,t, & t = \sin x \quad \textit{ha} \quad m = 2k+1\ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. *Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.*
4. *Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ $(k,l \in \mathbb{N})$, akkor*

$$\int \sin^n x\cos^m x\;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l+1}}\displaystyle\int (\sin^{2k} t)(1+\cos t)^{l-k}\;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n \le m,\\ \dfrac{1}{2^{k+l+1}}\displaystyle\int (\sin^{2l} t)(1-\cos t)^{k-l}\;\mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n > m. \end{cases}$$

8.9. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b,c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. *Ekkor az $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ halmaz nyílt intervallumain*

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\;\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\log|ax+b| + C, & \textit{ha } n = 1;\\ \dfrac{1}{a(1-n)}\cdot\dfrac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \textit{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. *Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az $\mathbb{R}$ halmazon*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\;\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C,$$

és ha $b^2-4ac>0$ akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$$

teljesül.

3. *Ha $n>1$ és $b^2-4ac\neq 0$, akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon*

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2ax+b}{(1-n)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+ + \frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

4. *Az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon*

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x.$$

5. *Ha $n>1$ és $b^2-4ac\neq 0$, akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon*

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x=\frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+ + \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

8.3. Parciális törtekre bontás

8.10. Tétel. *(Parciális törtekre bontás.) Legyen $P_n(x)$ egy tetszőleges n-ed fokú-, $Q_m(x)$ pedig egy olyan m-ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója 1.*

1. *Ha $n\geq m$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{P}(x)$ $(n-m)$-ed fokú- és m-nél kisebb fokú $\tilde{P}(x)$ polinom, hogy*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\bar{P}(x)+\frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. *A Q_m polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(p_i,q_i)_{i=1,\ldots,l}$ páronként különböző valós számok és számpárok, valamint $(z_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(v_i)_{i=1,\ldots,l}$ természetes számok, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$Q_m(x)=\left(\prod_{i=1}^{k}(x+\lambda_i)^{z_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{v_i}\right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1\leq i\leq l$ esetén sem létezik valós gyöke az $x^2+p_ix+q_i$ polinomnak. Ha $n<m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\ldots,k;j=1,\ldots,z_i}$, $(\alpha_{ij},\beta_{ij})_{i=1,\ldots,l;j=1,\ldots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{z_i}\frac{\mu_{ij}}{(x+\lambda_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{v_i}\frac{\alpha_{ij}x+\beta_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

teljesül minden $x\in\operatorname{Dom}\dfrac{P_n}{Q_m}$ elemre.

8.11. Definíció. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $l\in\mathbb{Z}^n$. Ekkor $x\in\mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$x^{[l]}\triangleq\prod_{i=1}^{n}x_i^{l_i}.$$

Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}^+$. Ha minden $1 \leq j \leq k$ esetén $l_j \in \mathbb{Z}^n$ és $c_j \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{k} c_j x^{[l_j]}$$

függvényt n *változós polinomnak* nevezzük.

8.12. Definíció. (*Racionális függvény.*)

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt n *változós racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q n változós polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

8.13. Tétel. *(Csebisev-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $m, n, p \in \mathbb{Q}$, ahol $p = \dfrac{q}{r}$ valamilyen q egészre. Az*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}\, x$$

integrál csak az alábbi három esetben fejezhető ki elemi függvények segítségével.

1. *Ha $p \in \mathbb{Z}$. Az integrál meghatározásához a binomiális kifejtés alkalmazandó az $(a + bx^n)^p$ kifejezésre.*
2. *Ha $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*
3. *Ha $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{b + ax^{-n}}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*

8.14. Tétel. *Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény. Ekkor az alábbi integrálok a megadott helyettesítések rekurzív alkalmazásával racionális törtfüggvények integráljává transzformálhatók. Az integráloknál $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ továbbá $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \operatorname{sh} t \text{ vagy } x = a \operatorname{tg} t$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \operatorname{ch} t \text{ vagy } x = a \frac{1}{\cos t}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \sin t \text{ vagy } x = a \cos t$$

$$\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}\, x \qquad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Az $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, \mathrm{d}\, x$ integrálnál

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x, & \text{ha} \quad a > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}, & \text{ha} \quad c > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda_1), & \text{ha} \quad ax^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \end{cases}$$

alkalmazandó.

9. Határozott integrál

9.1. A *majdnem mindenütt* tulajdonság

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\le b}} \{[a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}^+ \qquad [a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\mapsto b-a.$$

9.2. Tétel. *Ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ teljesül, akkor $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{I}_0$ és*

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) \le \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

9.3. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon.$$

9.4. Tétel. *(Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy*

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \textit{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon$$

   teljesül.
2. *Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.*
3. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is nulla mértékű.*
4. *Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.*

9.5. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a,b]\,, [a,b[\,,]a,b]\,,]a,b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.*

9.6. Definíció. A

$$C \stackrel{\triangle}{=} [0,1] \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left]\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}}\right[$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.7. Tétel. *(A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.*

9.8. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p.

9.9. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.*

9.2. A Riemann-integrál

9.10. Definíció. Az $[a,b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \le i \le n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n,[a,b]) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ x_0 = a,\ x_{n-1} = b,\ \forall i \in (n-1):\ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \le x$ szimbólummal jelölünk.

9.11. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a,b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i |\ 0 \le i \le n\} \cup \{y_i |\ 0 \le i \le m\}, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\dots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\dots,k}$ felosztást az *x és az y felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.12. Definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} |\ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

9.13. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.*

1. *Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \le S_x(f)$.*
2. *Ha z jelöli az $[a,b]$ intervallum triviális folsztását, azaz $z = (a,b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \le s_x(f)$ és $S_x(f) \le S_z(f)$.*
3. *Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \le y$ teljesül, akkor $s_x(f) \le s_y(f)$ és $S_y(f) \le S_x(f)$.*
4. *Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \le S_y(f)$ teljesül.*
5. *Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.*

9.14. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

- *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int_a^b} f$;
- *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int_a^b} f$;

- *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ekkor $\displaystyle\int_a^b f$ vagy $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ értéket.
  Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis
  $$\mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R}) \triangleq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}\,.$$
- Ha $f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$, akkor bevezetjük a
  $$\int_b^a f \triangleq -\int_a^b f$$
  jelölést.
- Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen
  $$\int_a^a f \triangleq 0.$$
- Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f *függvény határozott integráljának* nevezzük.

9.15. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha $\operatorname{Re}\circ f, \operatorname{Im}\circ f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R})$ és ekkor a
$$\int_a^b f \triangleq \left(\int_a^b \operatorname{Re}\circ f\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b \operatorname{Im}\circ f\right)$$
képlettel értelmezzük a komplex értékű függvény integrálját.

9.16. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*
$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$
teljesül.

9.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

9.17. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*
$$f \in \mathcal{R}([a,b]\,,\mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

9.18. Definíció. A korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*
$$\omega(f, [a,b]) \triangleq \left(\sup_{t\in[a,b]} f(t)\right) - \left(\inf_{t\in[a,b]} f(t)\right).$$
Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*
$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i).$$

9.19. Tétel. *Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

9.20. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u,v \in [a,b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

9.4. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

9.21. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint*

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g)$$

teljesül.

9.22. Tétel. *Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

9.23. Tétel. *Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.*

9.24. Tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.*

9.25. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.*

9.26. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvényre*

1. *ha $f \geq 0$, akkor $\int_a^b f \geq 0$;*
2. *ha $f \geq g$, akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;*
3. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

9.5. Newton–Leibniz-tétel

9.27. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

9.28. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon, akkor*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

9.6. Az integrálfüggvény

9.29. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.30. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Az I_f függvény folytonos.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in]a,b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I_f'(x_0) = f(x_0)$.*
3. *Ha $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.*

9.31. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor*

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

teljesül.

9.7. Lebesgue-tétel

9.32. Tétel. *(Lebesgue-tétel.) Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.*

9.8. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

9.33. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a,b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a,b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Ekkor*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

9.34. Tétel. *(Az integrálszámítás középértéktételei.) Legyen $f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Ha $g \geq 0$, akkor létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

2. *Létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(\xi).$$

9.35. Tétel. *A*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : C([a,b],\mathbb{R}) \times C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle \triangleq \int_a^b fg$$

leképezés skaláris szorzás.

9.36. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Ha $f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

teljesül.

9.9. Improprius integrál

9.37. Definíció. (*Improprius integrál.*)

- Legyen $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,\infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a
$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f$$
határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,\infty[$ *intervallumon* és erre a
$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x\to\infty}\int_a^x f$$
jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény improprius integrálja divergens az* $[a,\infty[$ *intervallumon.*
- Ha $f :]-\infty,a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty,a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a],\mathbb{R})$ teljesül és a
$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f$$
határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja a* $]-\infty,a]$ *intervallumon*, és erre a
$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f$$
jelölést használjuk.
- Legyen $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a
$$\lim_{x\to b-}\int_a^x f$$
határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,b[$ *intervallumon*, melyre a
$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to b-}\int_a^x f$$
jelölést használjuk.
- Legyen $f :]a,b]\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,b],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a
$$\lim_{x\to a+}\int_x^b f$$
határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $]a,b]$ *intervallumon*, melyre a
$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to a+}\int_x^b f$$
jelölést használjuk.

9.38. Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *és tekintsük az* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ *függvényt.*

1. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a,\infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és ebben az esetben*
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha-1)}.$$

2. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0,a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$ és ebben az esetben*
$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

10. Véges dimenziós terek topológiája

10.1. Skaláris szorzás és norma

10.1. Definíció. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{rl} + : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n} & ((x_1,\ldots,x_\mathfrak{n}),(y_1,\ldots,y_\mathfrak{n})) \mapsto (x_1+y_1,\ldots,x_\mathfrak{n}+y_\mathfrak{n}) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n} & (\lambda,(x_1,\ldots,x_\mathfrak{n})) \mapsto (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_\mathfrak{n}) \end{array}$$

10.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

10.3. Definíció. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \times \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

10.4. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*
1. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x,y,z \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
4. $\forall x,y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \forall\lambda \in \mathbb{K}: \ \langle \lambda x,y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$
5. $\forall x,y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

10.5. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x,y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

teljesül.

10.6. Definíció. Az $x,y \in \mathbb{R}^\mathfrak{n} \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}}.$$

10.7. Definíció. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}, \ \forall\lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\forall x,y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}: \ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^\mathfrak{n},\|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren.

10.8. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

10.9. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ teljesül.*

10.10. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y\rangle = \|x\|_2 \, \|y\|_2 \cos\alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

10.11. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

10.2. Topológiai alapfogalmak

10.12. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} | \ \|x - y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

10.13. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

10.14. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

10.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.16. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

10.17. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

10.18. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nyílt.*

2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

10.19. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*
1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

10.20. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$*. Ha* Z *zárt halmaz és* U *nyílt halmaz, akkor* $Z \setminus U$ *zárt halmaz és* $U \setminus Z$ *nyílt halmaz.*

10.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

10.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

10.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

10.24. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet* X *tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza* X*-et.*

10.25. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*
1. *az* X *halmaz pontosan akkor nyílt, ha* $X = \operatorname{Int} X$*;*
2. *az* X *halmaz pontosan akkor zárt, ha* $X = \overline{X}$*.*

10.26. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Az* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

10.27. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$*. Ekkor*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} X &= \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}, \\ \overline{X} &= \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X). \end{aligned}$$

10.28. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

10.3. Sorozatok

10.29. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

10.30. Tétel. *A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

10.31. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

10.32. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

10.33. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

10.34. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

10.35. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

10.36. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a+b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
3. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

10.37. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén az $a_i = \operatorname{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre*

$$\operatorname{pr}_i(\lim a) = \lim(\operatorname{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

10.4. Cauchy-sorozatok

10.38. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

10.39. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

10.40. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

10.41. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

10.42. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^n$ teljes halmaz.

10.43. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes, továbbá minden $A \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz teljes.*

10.44. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

10.45. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér Banach-tér.*

10.5. Kompakt halmazok

10.46. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^n$ térnek.

10.47. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

10.48. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

10.49. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i \in I}$ a $\mathbb{K}^n$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

10.6. Heine–Borel-tétel

10.50. Tétel. *Minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén a $[-R, R]^n$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.*

10.51. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

10.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

10.52. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

10.8. Függvények határértéke

10.53. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban $A \in \mathbb{K}^m$*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

10.54. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény, az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in \mathbb{K}^m$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

10.55. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jelöli.

10.56. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és a $z \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

10.57. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$ és $\lim\limits_a \varphi$. Akkor az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$, a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$, a $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ és a $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ halmaznak, valamint*

1. $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$;
2. $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda (\lim\limits_a f)$;
3. $\lim\limits_a (\varphi f) = (\lim\limits_a \varphi)(\lim\limits_a f)$;
4. $\lim\limits_a \|f\| = \Big\| \lim\limits_a f \Big\|$.

10.9. Függvények folytonossága

10.58. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

10.59. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

10.60. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

10.61. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Ekkor az a pontban*

1. $f + g$;
2. λf;

3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

10.62. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $\lambda \in \mathbb{K}$, *valamint* $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *és* $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *folytonos függvény. Ekkor* $f + g$, λf, φf *és* $\|f\|$ *is folytonos.*

10.63. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$. *Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra létezik olyan* $U \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra létezik olyan* $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ *zárt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*

10.64. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. *Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *nyílt.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *zárt.*

10.65. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

10.66. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

10.67. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *bijekció. Az* f *függvény pontosan akkor nyílt, ha* f^{-1} *folytonos.*

10.68. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az U *és* U *részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

10.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

10.69. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor az* $f(K)$ *halmaz is kompakt.*

10.70. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor létezik* $x, y \in K$, *melyekre* $f(x) = \inf f(K)$ *és* $f(y) = \sup f(K)$ *teljesül.*

10.71. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

10.72. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^m$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor* f *homeomorfizmus.*

10.11. Egyenletesen folytonos függvények

10.73. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x,y) < \delta \ \rightarrow \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

10.74. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

10.75. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

10.12. Normák ekvivalenciája

10.76. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.*

10.77. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.78. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

10.79. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

10.80. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

10.13. Normák ekvivalenciájának következményei

10.81. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^n$ tér milyen normával van ellátva.*

10.82. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

10.83. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^n$ téren választott normától.*

10.84. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

10.85. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

10.86. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

10.87. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^n$ lineáris altér, akkor L teljes.*

10.88. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \dots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

10.89. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a* $\mathrm{Dom}\, f$ *halmaznak. Pontosan akkor létezik a $\lim\limits_a f$ határérték, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és ekkor minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

10.90. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban.*

10.14. Sorok

10.91. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum\limits_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

10.92. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor* $\lim a = 0$ *teljesül.*

10.93. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ sor konvergens és*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\,.$$

10.94. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

10.15. Lineáris leképezések

10.95. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{m}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^\mathfrak{n})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{n})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n})$ jelölést fogjuk használni.

10.96. Tétel. *Ha $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_\mathfrak{n}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

10.97. Tétel. *Legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ és minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji} = (Ae_i)_j$. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

10.98. Definíció. Adott $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\} \\ j \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

10.99. Tétel. *Minden $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

teljesül.

10.100. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{m}$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \;\middle|\; \|x\| \le 1 \right\}$$

   jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$\|Ax\|' \le \|x\| \cdot \sup_{x \in X} \|Ax\|' ;$$

3. *A folytonos.*

10.101. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

10.102. Definíció. A $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

10.103. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *és* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$*. Ekkor*

$$\|Ax\|' \leq \|A\| \cdot \|x\| .$$

10.104. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ *normált tér minden* $i = 1, 2, 3$ *esetén, legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ *és* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$*. Ekkor*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

10.105. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér Banach-tér.*

10.106. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ *leképezésre* $\|A\| < 1$ *teljesül, akkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ *sor konvergens, az* $\mathrm{id} - A$ *elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathrm{id} - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *identitásfüggvényt.*

10.107. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \triangleq \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \middle| \, \exists a^{-1} \right\} .$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor*

1. *minden* $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *elemre* $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*;*
2. *a* $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *halmaz nyílt;*
3. *az* $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*,* $i(a) = a^{-1}$ *leképezés folytonos.*

10.16. Multilineáris leképezések

10.108. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy k*-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right)$ jelölést használjuk.

10.109. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*, valamint* $A \in \mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right)$*. Minden* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén legyen* $A_{j i_1 \ldots i_k} = A(e_{i_1} \ldots e_{i_k})_j$*. Ekkor minden* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektor és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *index esetén*

$$A(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} A_{j i_1, \ldots, i_k} x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(k)}_{i_k} \tag{10.1}$$

teljesül.

10.110. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : (\mathbb{K}^n)^k \to \mathbb{K}^m$ multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^n \mid \|x_i\| \leq 1\}$$
jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ teljesül;
2. *minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n$ vektorra*
$$\|A(x_1, \dots, x_k)\|' \leq \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|';$$
3. *A folytonos.*

10.111. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m \right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup \left\{ \|Ax\|' \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^n | \;\|x_i\| \leq 1\} \right\}$$

leképezés norma.

10.112. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\mathrm{Lin}^k \left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m \right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

10.113. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^n)^k \to \mathbb{K}^m$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n$ elemre

$$A(x_1, \dots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^n)^k \to \mathbb{K}^m$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}_s^k((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m)$ jelöli a továbbiakban.

10.114. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. A*

$$\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right) \to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^n)^{k+1}, \mathbb{K}^m\right)$$
$$A \mapsto \Big((x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_{k+1})\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

10.115. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az *A multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $A(x, \dots, x) \geq 0$.
- Az *A multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $A(x, \dots, x) \leq 0$.
- Az *A multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \dots, x) > 0$.
- Az *A multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \dots, x) < 0$.
- Az *A multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^n$ melyre $A(x, \dots, x) > 0$ és $A(y, \dots, y) < 0$.

10.116. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \geq K\|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \leq -K'\|v\|^k$.*

10.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

10.117. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0,1[\,\forall x, y \in \operatorname{Dom} f: \quad \Big(d(f(x), f(y)) \leq C d(x,y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

10.118. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

10.119. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

10.18. Konvex halmazok szétválasztása

10.120. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor az *A halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z,x).$$

10.121. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

10.122. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\left\{\|x - y\| \;\middle|\; x \in A,\; y \in B\right\}.$$

10.123. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0,1]$ paraméterre $(1-t)x + ty \in K$ teljesül.

10.124. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a,b) = \operatorname{dist}(K,Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

10.125. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

10.126. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \forall x \in Z: \; \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c) \in H} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \; \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

10.19. Az algebra alaptétele

10.127. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} : \ r < |x| \ \to \ C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C} : \ f(x) \neq 0 \ \to \ \exists y \in \mathbb{C} : \ |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

10.128. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

10.129. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

10.130. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

11.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

11.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \ \middle|\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^m \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.

– A $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\ .$$

– Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor az A *halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.

– Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

11.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M :\ (N < n, m\ \to\ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

11.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

11.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

11.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

11.2. A korlátos folytonos függvények tere

11.7. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, akkor az $M \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ jelöli.

11.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) :\ \|f\|_{\sup} = 0\ \leftrightarrow\ f = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) :\ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;
3. $\forall f, g \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) :\ \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.

11.9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} :\ \Big(N < n\ \to\ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

11.10. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

11.11. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

11.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

11.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása

11.13. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y | \ t \in [0, 1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

11.14. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

11.15. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

11.16. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. minden $x \in \Omega$ *esetén konvergens a* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *sor;*

2. az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a* $\sum_n f_n$ *függvénysor;*

3. minden $x \in \Omega$ *esetén*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

11.17. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

11.18. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a* $\sum_n f_n$ *függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

11.4. Hatványsorok

11.19. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

11.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *tetszőleges sorozat és* $x \in \mathbb{K}$.

1. Ha $|x| < R_a$*, akkor az* x *pontban a* P_a *hatványsor abszolút konvergens.*

2. Ha $|x| > R_a$*, akkor az* x *pontban a* P_a *hatványsor divergens.*

3. Ha $r \in [0, R_a[$*, akkor a* $B_r(0)$ *halmazon a* P_a *hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

teljesül.

4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

11.21. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

11.22. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq \,]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\, x.$$

11.5. Abel-tétel

11.23. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

11.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0, x_0 \rfloor}$ függvény folytonos.*

11.6. Approximáció polinomokkal

11.25. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

11.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{t \in [a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \right) = 0.$$

11.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban

12.1. Differenciálhatóság

12.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

12.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{(a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0\right\}$$

  függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n : \Big(\|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\|\Big)$$

teljesül.

12.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ tereken választott normától.*

12.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

12.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

12.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

12.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

12.8. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f + g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

12.9. Tétel. *Minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ vektortér.*

12.10. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

12.3. Iránymenti derivált

12.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

12.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

12.4. Néhány speciális függvény deriváltja

12.13. Tétel. *Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

12.14. Tétel. *Ha* $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$, *és* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_j}$ *pontban*

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{j.\ hely}, 0, \ldots, 0).$$

12.15. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})$, $f(a) = a^k$. *Ekkor minden* $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})$ *esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

12.16. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R}) = \left\{a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}) \mid \exists a^{-1}\right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ *függvényére minden* $a \in \mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a) : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \qquad b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}$$

teljesül.

12.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

12.17. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Dom}\, f$, valamint $i \in \{1, \ldots, k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény parciálisan deriválható a* i*-edik változója szerint az* a *pontban*, ha az

$$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

  függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a

$$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$

  jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

$$\partial_i f = \left\{ (a, A) \in (\mathrm{Dom}\, f) \times \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array} \right\}$$

  függvényt.
- Az f *függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\mathrm{Dom}\, \partial_i f = \mathrm{Dom}\, f$.
- Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

12.18. Tétel. *Ha az* $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *függvény differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban, akkor minden* $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

teljesül.

12.19. Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban, akkor minden* $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_i f)(a))x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \dots & (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a) \end{pmatrix}.$$

12.20. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban. Ekkor a* $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ *lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}.$$

12.21. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}$$

Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak.*

12.22. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *és legyen* $k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ *tetszőleges index. Ekkor az* f *függvénynek pontosan akkor létezik a* k*-adik változó szerinti parciális deriváltja az* a *pontban, ha létezik az* e_k *iránymenti deriváltja az* a *pontban és ebben az esetben* $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ *teljesül.*

12.6. Gradiens, divergencia és rotáció

12.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a)) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

  $$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a))$$

  függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

12.24. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban. Ekkor minden* $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), x \rangle$$

teljesül.

12.25. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor létezik az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), e \rangle .$$

12.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{div} f$ jelölést.

12.27. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor*

$$(\operatorname{div} f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

12.28. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

12.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $a \in \operatorname{Dom}(\Delta f)$ elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

12.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az *f függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f : &\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{rot} f$ jelölést.

12.7. Folytonosan differenciálható függvények

12.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

12.32. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\| \right) \cdot \|b - a\|_2 \,,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 \,.$$

12.33. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

12.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

12.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

12.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

12.36. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x).$$

12.37. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

12.38. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum\limits_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

12.9. Inverzfüggvény tétel

12.39. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f:\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a\in\mathbb{R}^n$. Ha $a\in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a)\neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega\subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x\in\Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

12.10. Implicitfüggvény tétel

12.40. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1,a_2)\in$ $\operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1,a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1,a_2)\neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1\times\Omega_2\subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi:\Omega_1\to\Omega_2$ differenciálható függvény, melyre $\varphi(a_1)=a_2$, minden $x\in\Omega_1$ esetén*
$$f(x,\varphi(x)) = f(a_1,a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x,\varphi(x))\right)^{-1}(\partial_1 f)(x,\varphi(x))$$
teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

12.11. Többszörös deriváltak

12.41. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ függvény és $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

– Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a\in\operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f)$.
– Az $a\in\operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f))(a)\in\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n,\operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1},\mathbb{R}^m))$, ennek a kompozícióját a
$$\rho_{k-1}:\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n,\operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1},\mathbb{R}^m))\to\operatorname{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k,\mathbb{R}^m))$$
$$A\mapsto\Big((x_1,\dots,x_n)\mapsto(A(x_1))(x_2,\dots,x_n)\Big)$$
izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a
$$\mathrm{D}^{(k)}f:\operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f)\to\operatorname{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k,\mathbb{R}^m)\qquad a\mapsto\rho_{k-1}\circ(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f))(a)$$
függvényt.
– Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom}\mathrm{D}^{(k)}f$.
– Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos függvény. Az $A\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A,\mathbb{R}^m)$ jelöli.
– Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k\in\mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A,\mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.42. Tétel. *Legyen $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $k\in\mathbb{N}^+$ és $f:\Omega\to\mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. Ekkor minden $a\in\Omega$ és $x^{(1)},\dots,x^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ esetén*
$$((\mathrm{D}^{(k)}f)(a))(x^{(1)},\dots,x^{(k)}) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}((\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}f)(a))\cdot x^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\dots x^{(k)}_{i_k}.$$

12.43. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ teljesül az Ω halmazon.*

12.44. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor f k-szor folytonosan differenciálható és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ szimmetrikus k-lineáris leképezés.*

12.12. Taylor-sorfejtés

12.45. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!}((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x-a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f)(a))\,(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

12.46. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

12.47. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left| f(b) - T^f_{k,a}(b) \right| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

12.48. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

12.13. Lokális szélsőérték jellemzése

12.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

12.50. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

12.51. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha k páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

12.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy a *nyeregpontja az f függvénynek.*

12.14. Feltételes szélsőérték

12.53. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H \cap \operatorname{Dom} f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

13. Metrikus terek

13.1. Metrikus terek topológiája

13.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \qquad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x,y \in M :\ d(x,y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
- $\forall x,y \in M :\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x,y,z \in M :\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Az (M,d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

13.2. Tétel. *Tetszőleges M nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq y, \\ 0 & ha \quad x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

13.3. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M |\ d(x,y) < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

13.4. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - d(x,y)[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

13.5. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

13.6. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

13.7. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

13.8. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

13.9. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

13.10. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

13.11. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge\ B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;

– *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+: \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
– *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

13.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

13.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in M |\ \exists r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M |\ \forall r \in \mathbb{R}^+: \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

13.14. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

13.15. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

13.16. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

13.17. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = M \setminus \overline{M \setminus X},$$
$$\overline{X} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X).$$

13.18. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

– *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
– *sűrű*, ha $\overline{X} = M$.

13.2. Metrikus alterek

13.19. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A \times A})$ is metrikus tér.*

13.20. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az (M, d) *metrikus tér alterének* nevezzük.

13.21. Tétel. *(Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.*
2. *A B halmaz pontosan akkor zárt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.*

13.22. Tétel. *(Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra*

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A$$

teljesül.

13.3. Ekvivalens metrikák

13.23. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy *a d_1 és d_2 metrikák ekvivalensek*, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

13.24. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.*

1. A

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_p(x, y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \triangleq \max \{ |x_k - y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\} \}$$

leképezés metrika.

2. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.

13.4. Sorozatok metrikus terekben

13.25. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M, d) metrikus tér.

– Az $a : \mathbb{N} \to M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.

– Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

13.26. Tétel. *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

13.27. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M, d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ jelöli.

13.28. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér.

– Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.

– Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to M$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

13.29. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

13.30. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

13.31. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.*

1. Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.

2. Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.

13.32. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^n, d_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $a_i = \operatorname{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre*

$$\operatorname{pr}_i (\lim a) = \lim(\operatorname{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

13.5. Cauchy-sorozatok

13.33. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér. Az $a:\mathbb{N}\to M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}\ \big((N<n\ \wedge N<m)\ \rightarrow\ d(a_n,a_m)<\varepsilon\big).$$

13.34. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

13.35. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

13.36. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

13.37. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a:\mathbb{N}\to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M,d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

13.38. Tétel. *Legyen (M,d) teljes metrikus tér és $X\subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X,d|_{X\times X})$ metrikus altér is teljes.*

13.6. Kompakt halmazok metrikus terekben

13.39. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $X\subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ esetén létezik olyan véges $I'\subseteq I$ halmaz, melyre $X\subseteq\bigcup\limits_{i\in I'}A_i$ teljesül, ahol minden $i\in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
- Azt mondjuk, hogy az (M,d) *metrikus tér kompakt*, ha M kompakt halmaz.

13.40. Tétel. *Metrikus térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

13.41. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $X\subseteq M$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y\subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

13.42. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen (M,d) metrikus tér és $(K_i)_{i\in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i,j\in I$ esetén létezik olyan $k\in I$ index, hogy $K_k\subseteq K_i\cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I}K_i\neq\emptyset.$$

13.43. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M,d) metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

13.44. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K\subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A\subseteq K$ teljesül.

13.45. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.*

13.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

13.46. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a K halmaznak.*

13.47. Tétel. *(Lebesgue-lemma.) Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor a K halmaz bármely $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.*

13.48. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül.*

13.49. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

13.50. Tétel. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.*

13.8. Szeparábilis metrikus terek

13.51. Definíció. Az (M,d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül.

13.52. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.*

13.53. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1,\infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek szeparábilisek.*

13.9. Teljesen korlátos halmazok

13.54. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljesen korlátos*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül. Az (M,d) metrikus teret teljesen korlátosnak nevezzük, ha M teljesen korlátos halmaz.

13.55. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.*

13.56. Tétel. *(Teljesen korlátos halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.*
2. *Véges sok teljesen korlátos halmaz uniója is teljesen korlátos.*
3. *Metrikus térben minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

13.57. Tétel. *Minden kompakt halmaz teljesen korlátos.*

13.58. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ekkor A teljesen korlátos halmaz.*

13.59. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

13.60. Tétel. *(Hausdorff-tétel.) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden benne haladó sorozatnak van olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

13.61. Tétel. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

13.10. Függvények metrikus terek között

13.62. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban $A \in M'$*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

13.63. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

13.64. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M,d) és (M',d') topologikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jelöli.

13.65. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és a $z \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

13.66. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

A $C(M, M')$ szimbólum jelöli az $M \to M'$ folytonos függvények halmazát.

13.67. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

13.68. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

13.69. Tétel. *Legyen (M_1,d_1), (M_2,d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor*

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \to \infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)).$$

13.70. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = d\left(\lim a, \lim b\right)$$

teljesül.

13.71. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1,d_1), (M_2,d_2) és (M_3,d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

13.72. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

13.73. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

13.74. Tétel. *(Egyenlőség folytatásának az elve.)* *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

13.75. Tétel. *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

13.76. Definíció. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

13.77. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

13.11. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

13.78. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

13.79. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

13.80. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \to M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek homeomorfak*, ha létezik $f : M \to M'$ homeomorfizmus.

13.81. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.*

13.82. Tétel. *Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

13.12. Egyenletesen folytonos függvények

13.83. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \;\to\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

13.84. Tétel. *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

13.85. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

13.86. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\operatorname{Dom} f} \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

13.87. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \twoheadrightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\operatorname{Dom} f} = M$.

13.88. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

13.89. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \to M'$ izometrikus homeomorfizmus.

13.90. Tétel. *Minden izometria egyenletesen folytonos.*

13.91. Tétel. *(Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \to M_2$ kiterjesztése is izometria.*

13.13. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények

13.92. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y) \Big).$$

13.93. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y) \Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

13.94. Tétel. *Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

13.95. Tétel. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \to M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.*

kontrakció $\Rightarrow$ *Lipschitz-folytonos* $\Rightarrow$ *egyenletesen folytonos* $\Rightarrow$ *folytonos*

13.96. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

13.14. Halmazok szétválasztása

13.97. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\}, & \text{ha} \quad A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha} \quad A = \emptyset. \end{cases}$$

13.98. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

13.99. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : M \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z,x).$$

13.100. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x,y \in M$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

13.101. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $X,Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.*

1. *Létezik olyan $f : M \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.*
2. *Létezik $U,V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.*

13.15. Metrikus tér teljessé tétele

13.102. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Létezik olyan (M',d') teljes metrikus tér és $j : M \to M'$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül.*
2. *Ha (M_1,d_1) és (M_2,d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \to M_1$ és $j_2 : M \to M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.*

13.103. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér. Minden (M',d') teljes metrikus teret és $j : M \to M'$ izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül, az (M,d) *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

13.104. Tétel. *Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

13.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok

13.105. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

- Az A *halmaz összefüggő*, ha nem létezik olyan $U,V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az M *metrikus tér összefüggő*, ha az M halmaz összefüggő.
- Az A *halmaz ívszerűen összefüggő*, ha minden $x,y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0,1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az M *metrikus tér ívszerűen összefüggő*, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

13.106. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.*

1. *Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér összefüggő.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér ívszerűen összefüggő.*

13.107. Tétel. *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

13.108. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az M halmaz összefüggő.*
2. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.*
3. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.*

13.17. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek

13.109. Tétel. *(Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A\times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.*
2. *Az (A, d') metrikus altér összefüggő.*
3. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.*
4. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq X \cup Y$.*

13.110. Tétel. *Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A = \emptyset$ vagy $A = M$ teljesül.*

13.111. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \to M_2$ folytonos függvény.*

1. *Ha A összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.*
2. *Ha A ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.*

13.18. Metrikus terek szorzata

13.112. Tétel. *Ha I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér, akkor $M = \prod_{i\in I} M_i$ esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrika.

13.113. Definíció. Legyen I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér. Az $M = \prod_{i\in I} M_i$ halmazból és a

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrikából álló (M, d) párt nevezzük az $(M_i, d_i)_{i\in I}$ *metrikus terek szorzatának.*

13.114. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Ekkor minden $j \in I$ esetén a*

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j \qquad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$$

projekció folytonos és nyílt.

13.115. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata és $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in I$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

13.116. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, (M', d') metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\operatorname{pr}_i \circ f : M' \to M_i$ függvény folytonos az a pontban.*
2. *Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ esetén a $\operatorname{pr}_i \circ f$ függvény folytonos.*

13.117. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. Ekkor a K halmaz kompakt az M metrikus térben.*

13.19. Baire-féle kategóriatétel

13.118. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{X} = \emptyset$;
- *első kategóriájú*, ha X előállítható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

13.119. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér.*

1. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $M \setminus \overline{X}$ halmaz sűrű.*
2. *Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.*
3. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ teljesül.*

13.120. Tétel. *(Baire-féle kategóriatétel.) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

14. Normált terek

14.1. Normált terek topológiája

14.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V :\ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\forall x, y \in V :\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

14.2. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$$

teljesül.

14.3. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

14.4. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb*
$$B_r(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}.$$
2. *Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.*
3. *Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.*
4. *Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.*

14.5. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a*
$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$$
leképezések normák (melyet p-normának, illetve sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

14.2. Sorok és sorozatok normált terekben

14.6. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
3. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

14.7. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

14.8. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat.

– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

14.9. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

14.10. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.*

1. *Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.*
2. *Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*
$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

14.11. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. A $(V, \|\cdot\|)$ pár pontosan akkor Banach-tér, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

14.3. Normák ekvivalenciája

14.12. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K\,\|x\|'$.*

14.13. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K_1\,\|x\|'$ és $\|x\|' \le K_2\,\|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha\,\|x\| \le \|x\|' \le \beta\,\|x\|$.*

14.4. Folytonos lineáris leképezések

14.14. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. *Az A leképezés egyenletesen folytonos.*

14.15. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \to \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V *normált tér topologikus duálisának* nevezzük.

14.16. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

14.17. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor*

$$\|Ax\|_2 \le \|A\| \cdot \|x\|_1 .$$

14.18. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathscr{L}(V_1, V_3)$, továbbá*

$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

14.19. Tétel. *Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az*

$$\begin{aligned} M_c : V \to V &\qquad x \mapsto cx, \\ L_z : V \to V &\qquad x \mapsto z + x \end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

14.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai

14.20. Tétel. *Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.*

14.21. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.*

14.22. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \to V$ identitásfüggvényt.

14.23. Tétel. *Legyen U és V Banach-tér és legyen*

$$G(\mathscr{L}(U, V)) \stackrel{\triangle}{=} \{a \in \mathscr{L}(U, V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V, U) : \ aa' = \mathrm{id}_V, \ a'a = \mathrm{id}_U\}.$$

(Vagyis $G(\mathscr{L}(U, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. *minden $a \in G(\mathscr{L}(U, V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathscr{L}(U, V))$;*
2. *a $G(\mathscr{L}(V, V))$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : G(\mathscr{L}(U, V)) \to G(\mathscr{L}(V, U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

14.6. Véges dimenziós normált terek

14.24. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést.

1. *A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.*
2. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.*
3. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.*

14.25. Tétel. *Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

14.26. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor*

1. *a V tér teljes;*
2. *a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

14.27. Tétel. *Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.*

14.28. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *A V vektortér véges dimenziós.*
2. *A V valamely nem nulla sugarú zárt gömbje kompakt.*
3. *A V lokálisan kompakt tér.*

14.7. Elpé terek

14.29. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex* l^p (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

14.30. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér, a*

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l^p_{\mathbb{K}}$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

14.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben

14.31. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a*

$$\gamma_{x_0, x_1} : [0, 1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \ldots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a*

$$\gamma : [0, 1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right)$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0, 1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.

14.32. Tétel. *Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.*

14.33. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A V halmaz ívszerűen összefüggő.*
2. *A V halmaz összefüggő.*
3. *Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.*

14.34. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.*

14.35. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő.*
2. *Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.*
3. *Az A halmaz ívszerűen összefüggő.*

14.9. Normált terek szorzata

14.36. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^{n} V_k$ halmazon értelmezzük a*

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. *A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.*
2. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.*
3. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.*

14.37. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^{n} V_k, \|\cdot\|\right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1,\dots,n}$ *normált terek szorzatának.*

14.10. Normált terek teljes burka

14.38. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \to V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül.*

14.39. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \to V'$ lineáris izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér teljes burkának* nevezzük.

14.40. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\| |_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\operatorname{Dom} A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.*

14.41. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j). Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.*

14.42. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \to V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.*

14.43. Tétel. *Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

14.11. Folytonos multilineáris leképezések

14.44. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ vektorterek rendszere, valamint legyen W is vektortér. Az

$$A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto A(x_1, \dots, x_n)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *n-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $j \in \{1,\dots,n\}$ indexre, minden $(x_i)_{i=1,\dots,n}, (y_i)_{i=1,\dots,n} \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorrendszere és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre

$$A(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x_i+\mu y_i,x_{i+1},\dots,x_n)=\lambda A(x_1,\dots,x_n)+\mu A(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

teljesül. A $: \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ jelölést használjuk.

14.45. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen V és W vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : V^n \to W$ függvény *szimmetrikus multilineáris leképezés*, ha minden $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ permutációra és minden $x_1,\dots,x_n \in V$ elemre

$$A(x_1,\dots,x_n) = A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$

teljesül. A $V^n \to W$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\operatorname{Lin}^n_s(V^n, W)$ jelöli a továbbiakban.

14.46. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ multilineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. *A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i \mid \|x_i\|_i \le 1\}$ jelölés mellett $\sup_{x\in B} \|A(x)\|_W < \infty$ teljesül.*

14.47. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Az $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{\|Ax\|_W \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i \mid \|x_i\|_i \le 1\}\right\}$$

leképezés norma.

14.48. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ és $x = (x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$. Ekkor*

$$\|Ax\|_W \le \|A\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i .$$

14.49. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér. Ekkor $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ is Banach-tér.*

14.50. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Ekkor $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.*

14.51. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Ekkor $\mathscr{L}_s{}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)$ térnek.*

14.52. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. A*

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

14.53. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \dots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \dots, x) \leq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \dots, x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \dots, x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \dots, x) \geq K\|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan negatív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \dots, x) \leq -K\|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in V$ melyre $A(x, \dots, x) > 0$ és $A(y, \dots, y) < 0$.

14.54. Tétel. *(Polarizációs formula.) Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $x_1, \dots, x_n \in V$ vektorra*

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_1, \dots, t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_n \cdot A\left(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n\right)^{[n]}$$

teljesül.

14.55. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.*
1. *Ha A szimmetrikus pozitív vagy negatív multilineáris leképezés, akkor n páros szám.*
2. *Ha A szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.*
3. *Ha A szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.*
4. *Ha $\dim V < \infty$ és A pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.*
5. *Ha $\dim V < \infty$ és A negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.*

14.12. Konvex zárt elnyelő halmazok Banach-terekben

14.56. Definíció. Legyen V vektortér és $K \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy a K halmaz
- *elnyelő*, ha minden $x \in V$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda K$;
- *konvex*, ha minden $x, y \in K$ és $c \in [0,1]$ elemre $cx + (1-c)y \in K$ teljesül;
- *szimmetrikus*, ha $K = -K$ teljesül.

14.57. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ melyre $B_r(0) \subseteq Z$ teljesül.*

14.13. Hahn–Banach-tétel

14.58. Definíció. Legyen V vektortér és $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés. Azt mondjuk, hogy

- φ *szubadditív*, ha minden $x, y \in V$ esetén $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
- φ *pozitív homogén*, ha minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$;
- φ *szublineáris*, ha szubadditív és pozitív homogén.

14.59. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto p(x)$$

függvényt *félnormának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $p(0) = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $\forall x, y \in V :\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Az (V, p) párt *félnormált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér, és p félnorma a V vektortéren.

14.60. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq \tilde{f}$ és $\tilde{f} \leq \varphi|_{M \oplus \mathbb{R}x}$ teljesül.*

14.61. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $F \leq \varphi$ teljesül.*

14.62. Tétel. *Komplex vektortér feletti lineáris funkcionált egyértelműen meghatároz a valós része. Legyen V komplex vektortér és jelölje V_R a V vektorteret az összeadással és a $\mathbb{C} \times V \to V$ szorzás $\mathbb{R} \times V \to V$ megszorításával.*

1. *Ha $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés akkor az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ leképezés olyan $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in V$ esetén $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ teljesül.*
2. *Ha $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor az $f : V \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ olyan lineáris leképezés, melyre $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ teljesül.*

14.63. Tétel. *(Hahn–Banach-tétel.) Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$. Ekkor létezik olyan $F : M \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $|F| \leq p$ teljesül.*

14.64. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, mely f kiterjesztése és $\|f\| = \|F\|$ teljesül.*

14.65. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $F(x_k) = a_k$.*

14.66. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor V' szétválasztó.*

14.67. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Minden $x \in V$ esetén legyen*

$$j_x : V' \to \mathbb{K} \qquad \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Ekkor j_x folytonos lineáris leképezés.

2. *A*

$$j : V \to V'' \qquad x \mapsto j_x$$

leképezés lineáris és injektív.

3. A $j : V \to V''$ leképezés izometria, azaz minden $x \in V$ esetén

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| .$$

14.68. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *reflexív*, ha a $j : V \to V''$ leképezés szürjektív.

14.14. Banach egyenletes korlátosság tétele

14.69. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. $\overline{B_1(0)} = \{x \in V |\ \ \|x\| \leq 1\}$

2. Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, W vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor $A(\Omega)$ is konvex.

3. Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, akkor $\overline{\Omega}$ is konvex halmaz.

4. A $B_1(0)$ és a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvex.

14.70. Tétel. *(Banach egyenletes korlátosság tétele.) Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$. A H halmaz pontosan akkor korlátos pontonként, ha korlátos az operátornomában, azaz*

$$\forall x \in U : \sup_{A \in H} \|Ax\|_V < \infty \quad \leftrightarrow \quad \sup_{A \in H} \|A\| < \infty.$$

14.15. Banach–Steinhaus-tétel

14.71. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Ekkor $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, valamint az $A = \lim_{n \to \infty} a_n$ határérték folytonos lineáris operátor, melyre $\|A\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|a_n\|$ teljesül.*

14.16. Banach nyílt leképezések tétele és közvetlen következményei

14.72. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre*

$$B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))},$$

akkor minden $r \in]0, R[$ esetén

$$B_r(0) \subseteq A(B_1(0)).$$

14.73. Tétel. *(Banach nyílt leképezés tétele.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, akkor az A operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

14.74. Tétel. *(Banach tétele a folytonos inverz létezéséről.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} is folytonos.*

14.75. Definíció. Azt mondjuk, hogy a V vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma *összehasonlítható*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül, vagy létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$ teljesül.

14.76. Tétel. *Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható, akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák.*

14.17. Zárt gráf tétel

14.77. Definíció. Legyen X, Y halmaz és $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f *függvény gráfjának* nevezzük a $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in \operatorname{Dom} f\}$ halmazt.

14.78. Definíció. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy A *zárt*, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $U \times V$ szorzattérben.

14.79. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Az A leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozatra, melyre az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$ és*

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

14.80. Tétel. *Zártgráf-tétel Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés. Ekkor az alábbi állítások közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat.*

i. $\operatorname{Dom} A$ *zárt;*
ii. $\Gamma(A)$ *zárt;*
iii. A *folytonos.*

15. Hilbert-terek

15.1. Skaláris szorzással ellátott terek

15.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V : \ \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$;
- $\forall x, y \in V : \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorzatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

15.2. Tétel. *Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra*

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \qquad \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$$

teljesül.

15.3. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

15.4. Tétel. *Legyen V vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

norma.

15.5. Tétel. *(Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorzatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra*
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
teljesül.

15.6. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V téren.
- Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

15.7. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathscr{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer
- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha
$$\forall x \in \mathscr{H} \Big((\forall i \in I : \langle e_i, x \rangle = 0) \to x = 0 \Big)$$
teljesül;
- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

15.8. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a*
$$\begin{aligned} \langle \cdot, z \rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle x, z \rangle \\ \langle z, \cdot \rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle z, x \rangle \end{aligned}$$
leképezések folytonosak.

15.9. Tétel. *Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*
1. *(Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra*
$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$
2. *Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle \, e_n .$$
3. *(Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 .$$

15.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre

15.10. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre*
$$\mathrm{dist}_W(x) = \inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$
teljesül.

15.11. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.
- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a $W \subseteq V$ halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.

– Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.

15.12. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.*

15.13. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az *x vektor W altérre való ortogonális vetületének* vagy *projekciójának* nevezzük.

15.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere

15.14. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a

$$L^\perp \triangleq (z \in \mathscr{H} \mid \forall x \in L : \ \langle x, z \rangle = 0)$$

halmazt *L ortogonálisának* nevezzük.

15.15. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.*

1. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L^\perp$ zárt lineáris altér.*
2. *Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.*
3. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.*

15.16. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^\perp$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^\perp = \{0\}$ és $W + W^\perp = \mathscr{H}$ teljesül.*

15.17. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.*

15.18. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér, akkor $\overline{L} = L^{\perp\perp}$.*

15.4. Ortogonális projekciók

15.19. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a*

$$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \qquad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. *A P leképezés lineáris.*
2. *A P leképezésre $\operatorname{Ran} P = W$ és $\operatorname{Ker} P = W^\perp$.*
3. *$P^2 = P$*
4. *Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.*

15.5. Riesz-féle reprezentációs tétel

15.20. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathscr{H}'$, azaz $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén*

$$\varphi(x) = \langle z, x \rangle$$

teljesül.

16. Függvénysorozatok, függvénysorok

16.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

16.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to M \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t)\ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

  $$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(T, V) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to V \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

16.3. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : \ (N < n, m \ \rightarrow \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

16.4. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.*

16.5. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.*

16.6. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

16.2. Korlátos folytonos függvények tere

16.7. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér és $f : T \to M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az *f függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \to M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(T, M)$. Ha (T, d_T) metrikus tér, akkor a $T \to M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^{\mathrm{b}}(T, M)$.

16.8. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, V) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ vektortéren, így $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált tér.

16.9. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.*

16.10. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M, d) metrikus tér. Ekkor $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér.*

16.11. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

16.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

16.13. Tétel. *(Dini-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x\in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)<\infty$ és minden $n\in\mathbb{N}$ indexre $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ teljesül. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon és a $\lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.*

16.14. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$, $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n: A\to V$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f: A\to V$ függvényhez, valamint legyen $a\in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Ha minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim_a f_n$ határérték, akkor a $\lim_a f$ határérték is létezik, valamint*

$$\lim_a f=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_a f_n\right)$$

teljesül.

16.3. Hatványsorok

16.15. Definíció. (*Hatványsorok.*)

- Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér, $a:\mathbb{N}\to V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a:\left\{x\in\mathbb{K}\;\middle|\;\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \text{ konvergens}\right\}\to V \quad x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

  A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.
- Az $a:\mathbb{N}\to V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a\triangleq\begin{cases}\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha}\quad 0<\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|}<\infty;\\ 0, & \text{ha}\quad \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|}=\infty;\\ \infty, & \text{ha}\quad \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|}=0.\end{cases}$$

  Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

16.16. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér, $a:\mathbb{N}\to V$ tetszőleges sorozat és $x\in\mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x|<R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x|>R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r\in[0,R_a[$, akkor*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in B_r(0)}\|a_nt^n\|<\infty.$$
4. *Ha $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *Ha $(V,\|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

16.4. Abel-tétel

16.17. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér, $a:\mathbb{N}\to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $C_n=\sup_{m\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{k=n}^{n+m}a_k\right\|$. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ számra $C_n<\infty$ és $\lim_{n\to\infty}C_n=0$ teljesül.*

16.18. Definíció. Ha V vektortér és $a, b \in V$, akkor a

$$[a,b] \triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}, \qquad]a,b[\triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in]0,1[\}$$

halmazokat az *a és b végpontú szakasznak*, illetve *nyílt szakasznak* nevezzük.

16.19. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ szakaszon és a $P_a|_{[0,z]}$ függvény folytonos.*

16.5. Lineáris leképezés függvénye

16.20. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a*

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

16.21. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

16.22. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \to \{0, 1\} \qquad (i,j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j; \\ 1, & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény.*

16.23. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.*

1. *Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol*

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. *Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \tag{16.1}$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, *ahol*

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$\text{ha} \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & \text{ha} \quad i = j; \\ 1, & \text{ha} \quad j - i = 1, \end{cases} \qquad \text{akkor} \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j; \\ \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & \text{ha} \quad i \le j. \end{cases}$$

3. Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.

16.24. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \mathrm{Sp}(A) \to \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

16.6. Approximáció Bernstein-polinommal

16.25. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f *függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

16.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{t \in [a,b]} \left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \right) = 0.$$

16.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.*

16.7. Stone-féle sűrűségi tétel

16.28. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz szétválasztó T felett*, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

16.29. Tétel. *Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \ldots, f_n \in A$, akkor*

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\}, \inf\{f_i, \ldots, f_n\} \in A$$

teljesül.

16.30. Tétel. *(Stone-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.8. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel

16.31. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.32. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\bar{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.33. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

17. Differenciálszámítás

17.1. Differenciálhatóság

17.1. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

17.2. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : U \to V$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

  $$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U, V) \;\middle|\; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x - a\|} = 0 \right\}$$

  függvényt.

- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

17.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az $A \in \mathscr{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \Big(\|x - a\| < \delta \ \to \ \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül.

17.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

17.5. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

17.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

17.6. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f + g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$;*
4. *ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és*

$$\left(\mathrm{D} \left(\frac{f}{\varphi} \right) \right)(a) = \frac{\varphi(a)(\mathrm{D}f)(a) - f(a)(\mathrm{D}\varphi)(a)}{\varphi^2(a)} \ .$$

17.7. Tétel. *Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A, V)$ vektortér.*

17.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

17.3. Iránymenti derivált

17.9. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

17.10. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

17.11. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V,W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha\beta : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u))$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u))$$

leképezés.

17.12. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V,W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v)$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))v$$

leképezés.

17.13. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\operatorname{Ran}((\mathrm{D}f)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(\mathrm{D}f)(a)$ derivált $U \to W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.*

17.4. Néhány speciális függvény deriváltja

17.14. Tétel. *Legyen U normált tér, $c \in U$ és*

$$L_c : U \to U \qquad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$\mathrm{D}L_c : U \to \mathscr{L}(U,U) \qquad a \mapsto \mathrm{id}_U$$

teljesül.

17.15. Tétel. *Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U,V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

17.16. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n,V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\rho : U \to V \qquad x \mapsto A(x,\ldots,x),$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\rho : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x,a,\ldots,a))$$

teljesül.

17.17. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\eta : U \to V \qquad x \mapsto A\,(x-c, \dots, x-c)\,,$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\eta : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a-c, \dots, a-c))$$

teljesül.

17.18. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}\right)$$

teljesül.

17.19. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és*

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V,V) \middle|\ \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V)\right\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$\mathrm{D}i : G(A) \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}\right)$$

teljesül.

17.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

17.20. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén az $\mathrm{pr}_i \circ f : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül.

17.21. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és $k \in \{1, \dots, n\}$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény parciálisan deriválható a k-adik változója szerint az a pontban*, ha az $f \circ \mathrm{in}_{a,k} : U_k \to V$ függvény differenciálható az a_k pontban és ekkor a

  $$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)$$

  jelölést használjuk.
- Az f függvény *k-adik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

  $$\partial_k f = \left\{(a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U_k, V) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,k} \text{ differenciálható az } a_k \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) \end{array}\right\}$$

  függvényt.
- Az f *függvény parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_k f = \operatorname{Dom} f$.
- Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint és $\partial_k f$ folytonos.

17.22. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ *normált terek rendszere,* $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ *és* $a \in U_k$. *Ekkor*

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,k})(a) = \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül.

17.23. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ *normált terek rendszere,* V *normált tér és* $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban. Ekkor minden* $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

17.24. Tétel. *Legyen* $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,m}$ *és* $(V_j)_{j=1,\ldots,n}$ *normált terek rendszere és* $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ *pontban. Minden* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *és* $j \in \{1,\ldots,n\}$ *esetén legyen*

$$A_{ji} = (\partial_i f_j)(a),$$

ahol $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, *valamint értelmezzük az*

$$A : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j \qquad (x_1,\ldots,x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} A_{ni}x_i \right)$$

leképezést. Ekkor $(\mathrm{D}f)(a) = A$ *teljesül, vagyis minden* $x = (x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ *vektorra és* $j \in \{1,\ldots,n\}$ *indexre*

$$((\mathrm{D}f)(a)x)_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)x_i.$$

17.6. Folytonosan differenciálható függvények

17.25. Tétel. *Legyen* U *normált tér,* $a, b \in U$ *és legyen* $f : U \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, mely folytonos az* $[a,b]$ *szakaszon és differenciálható az* $]a,b[$ *halmazon. Ekkor létezik olyan* $c \in\,]a,b[$, *melyre*

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b-a)$$

teljesül.

17.26. Tétel. *Legyen* V *normált tér és legyen* $f : [0,1] \to V$ *és* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvény, mely differenciálható a* $]0,1[$ *halmazon, továbbá minden* $t \in\,]0,1[$ *elemre* $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \le g'(t)$ *teljesül. Ekkor*

$$\|f(1) - f(0)\| \le g(1) - g(0).$$

17.27. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen* U *és* V *normált tér,* $f : U \to V$. *Továbbá legyen* $a, b \in U$, $a \ne b$, *olyan pont, melyre* $[a,b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, f *folytonos az* $[a,b]$ *halmazon és* f *differenciálható az* $]a,b[$ *intervallumon. Ekkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \right) \cdot \|b-a\|.$$

17.28. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $A \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz és $f : A \to V$ differenciálható függvény. Ha minden $a \in A$ esetén $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ teljesül, akkor az f függvény állandó.*

17.29. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\partial_i f)$ olyan pont, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen*

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i).$$

Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, y \in B_\delta(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - A(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül, f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.

17.30. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, legyen $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény, és legyen $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

17.7. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

17.31. Tétel. *Legyen U normált tér, V Banach-tér, $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in U$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to V$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : B_r(a) \to V$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez.*

17.32. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to V$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$ teljesül.*

17.33. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ összeg;*
2. *a $\sum_n f_n$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to V$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*

3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$ *teljesül.*

17.8. Inverzfüggvény tétel

17.34. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen* U *és* V *Banach-tér,* $f : U \twoheadrightarrow V$ *tetszőleges függvény és* $a \in U$*. Ha* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$*,* $\mathrm{D}f$ *folytonos az a pontban és* $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathscr{L}(U,V)$ *homeomorfizmus, akkor létezik olyan* $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ *nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. $f|_\Omega$ *injektív;*
2. $f(\Omega)$ *nyílt halmaz;*
3. $f|_\Omega$ *homeomorfizmus* Ω *és* $f(\Omega)$ *között;*
4. *az* $(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény differenciálható;*
5. *minden* $x \in \Omega$ *pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a* $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény folytonos az* $f(a)$ *pontban.*

17.9. Implicitfüggvény tétel

17.35. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen* U_1, U_2 *és* V *Banach-tér,* $f : U_1 \times U_2 \twoheadrightarrow V$ *tetszőleges függvény. Ha* $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$*,* $\mathrm{D}f$ *folytonos az* (a_1, a_2) *pontban és a* $(\partial_2 f)(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(U_2, V)$ *leképezés homeomorfizmus, akkor létezik olyan* Ω_1*,* Ω_2 *nyílt környezete az* a_1*,* a_2 *pontnak, melyre*

1. $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$*;*
2. *létezik egyetlen olyan* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *differenciálható függvény, melyre minden* $x \in \Omega_1$ *esetén*
$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$
teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ *folytonos az* a_1 *pontban.*

17.10. Többszörös deriváltak

17.36. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a) \in \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V))$, ennek a kompozícióját a
$$\rho_{n-1} : \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \quad A \mapsto \Big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_n)\Big)$$
izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$. Az $f : U \to V$ függvény *n-edik deriváltjának* nevezzük a
$$\mathrm{D}^{(n)} f : \operatorname{Dom}\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \qquad a \mapsto \rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a)$$
függvényt.
- Az *f függvény n-szer differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom}\mathrm{D}^{(n)} f$.
- Az *f függvény n-szer folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(n)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, n-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, V)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, V)$ jelöli.

17.37. Tétel. *(Young-tétel.) Legyen* U *és* V *normált tér,* $f : U \to V$ *tetszőleges függvény,* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}^{(n)} f$*. Ekkor* $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \in \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$*, azaz* $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ *szimmetrikus multilineáris leképezés.*

17.11. Taylor-sorfejtés

17.38. Definíció. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to V$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a} : U \to V \qquad (x) \mapsto T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(U, V)$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

17.39. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in\,]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)} f)(\xi)(b-a)^{[n+1]}.$$

17.40. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left\| f(b) - T^f_{n,a}(b) \right\| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17.41. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen az $f : U \to V$ függvény n-szer differenciálható az $a \in U$ pontban. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

17.12. Lokális szélsőérték jellemzése

17.42. Definíció. Legyen U normált tér $f : U \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

17.43. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D} f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D} f)(a) = 0$.*

17.44. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

17.13. Konvexitás differenciális jellemzése

17.45. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in]0, 1[$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
- Az f *függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
- Az f *függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
- Az f *függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\mathrm{Dom}\, f$ halmazon.

17.46. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \le f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)} f)(x)$ pozitív.*

17.47. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) < f(y)$$
2. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)} f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.*

18. Fourier-sorok

18.1. Trigonometrikus polinomok

18.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \ldots, n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

18.2. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ algebrát alkot.*
2. *Minden $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ polinom esetén $P\circ\cos\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
3. *Minden $f\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén a $t\mapsto f(t+x)$ függvény is trigonometrikus polinom.*

18.3. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.)* *Minden $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\varphi\in\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, melyre $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$ teljesül.*

18.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

18.4. Tétel. *Legyen $a\in\mathbb{R}$, $k,l,m\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $0\neq k\neq l\neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}\,x=0 \qquad \int_a^{a+2\pi}\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x=0$$

$$\int_a^{a+2\pi}\cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x=\pi \qquad \int_a^{a+2\pi}\sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x=\pi$$

$$\int_a^{a+2\pi}\cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x=0 \qquad \int_a^{a+2\pi}\sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x=0$$

$$\int_a^{a+2\pi}\cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x=0$$

18.5. Tétel. *Legyen $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \qquad t\mapsto a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(kt)+b_n\sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

18.6. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:C_{2\pi}([-\pi,\pi],\mathbb{C})\times C_{2\pi}([-\pi,\pi],\mathbb{C})\to\mathbb{R} \qquad (f,g)\mapsto\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*

$$\left\{x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

3. *A*

$$\left\{x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x\mapsto\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x\mapsto\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

18.3. Függvény Fourier-sora

18.7. Definíció. Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]}\in\mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k\in\mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k\in\mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x\in\mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

függvényt.

18.8. Tétel. *Legyen $k\in\mathbb{N}$ és $f\in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)\cos\left(nt-k\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)\sin\left(nt-k\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(k)}\right|$ jelölés mellett minden $n\in\mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n|\le\frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n|\le\frac{D_k}{n^k}.$$

18.9. Tétel. *Minden $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

18.4. Riemann–Lebesgue-lemma

18.10. Tétel. *(Riemann–Lebesgue-lemma.) Minden $f\in\mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ függvényre*

$$\lim_{a\to\pm\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(at)\,\mathrm{d}\,t=\lim_{a\to\pm\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t=0.$$

18.5. Dirichlet-féle magfüggvény

18.11. Tétel. *Minden $n\in\mathbb{N}^+$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z};\\ 1+2n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

teljesül.

18.12. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+2n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Dirichlet-féle magfüggvényeknek* nevezzük.

18.13. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a D_n függvény folytonos, valamint $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 2\pi$.*

18.14. Tétel. *(Konvolúció a Dirichlet-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)\,\mathrm{d}\,y. \tag{18.1}$$

18.6. Dirichlet-féle lokalizációs tétel

18.15. Tétel. *(Dirichlet-féle lokalizációs tétel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül, továbbá legyen $x_0, A \in \mathbb{R}$ olyan paraméter, melyre a*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2A}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege A; azaz

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0) + b_k\sin(kx_0) = A.$$

18.16. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 1. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$, és legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, hogy f differenciálható az x_0 pontban. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege $f(x_0)$; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0) + b_k\sin(kx_0) = f(x_0).$$

18.17. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 2. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és ott a sor összege $f(x)$; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = f(x).$$

18.18. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 3. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim\limits_{x_0\pm} f$ határérték. Ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a*

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[0, r]$ *intervallumon, akkor az* f *függvény Fourier-sora konvergens az* x_0 *pontban és a sor összege* $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x_0+} f + \lim\limits_{x_0-} f\right)$*; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right).$$

18.19. Tétel. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

18.7. Fejér-féle magfüggvény

18.20. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1 + n, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

teljesül.

18.21. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right) x}{\sin^2 \frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1 + n, & \text{ha} \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Fejér-féle magfüggvényeknek* nevezzük. indexFejér-féle magfüggvény

18.22. Tétel. *(A Fejér-féle magfüggvény tulajdonságai.)*

1. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1.$
2. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $F_n(x) \geq 0.$
3. *Minden* $\delta \in]0, \pi[$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \,\mathrm{d}\, x = 0.$$

18.23. Tétel. *(Konvolúció a Fejér-féle magfüggvénnyel.)* *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan* 2π *szerint periodikus függvény, melyre* $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ *teljesül. Minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *számra*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \tag{18.2}$$

teljesül.

18.8. Fejér tétele a Fourier-sor konvergenciájáról

18.24. Tétel. *(A Fejér-tétel.) Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0.$$

19. Komplex függvénytan

19.1. Komplex differenciálhatóság

19.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény komplex differenciálható*, vagy *holomorf az a pontban* ha létezik a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
határérték. Ekkor a $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ komplex számot az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az
$$f' = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;\wedge\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \right\}$$
függvényt.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy *$\mathbb{C}$-differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

19.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tekintsük az f által meghatározott*

$$u : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y)$$
$$v : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y)$$

függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + \mathrm{i}\, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. *Az f függvény holomorf az a pontban.*
2. *Létezik olyan $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, melyre*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$
3. *Az u és a v függvény differenciálható az a pontban, valamint*
$$(\partial_1 u)(a) = (\partial_2 v)(a)$$
$$(\partial_2 u)(a) = -(\partial_1 v)(a)$$
teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor

$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + \mathrm{i}(\partial_1 v)(a).$$

19.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az *f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának* nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ teljesül az f *függvény a pontbeli forgatási együtthatójának* nevezzük.

19.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

19.4. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

19.3. Hatványsor differenciálhatósága

19.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

19.4. Görbe menti integrál

19.6. Definíció. Görbék főbb típusai.

- A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t)$ és a $\lim_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t)$ határérték, valamint a

$$\acute{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad t = a; \\ \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ \lim\limits_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha} \quad t = b. \end{cases}$$

  függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim\limits_{t \to a+0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(a), & \text{ha} \quad t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ (t-b) \lim\limits_{t \to b-0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(b), & \text{ha} \quad t \geq b. \end{cases}$$

  függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.
- A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.

– A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \operatorname{Dom} \gamma$ és $b = \sup \operatorname{Dom} \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

19.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény.

– Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget az f *függvény* γ *görbe menti integráljának* nevezzük és a $\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük.

– Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ olyan, hogy a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az f *függvény* γ *görbe menti integráljának* nevezzük és szintén a $\int_\gamma f$ vagy a $\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\dot{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}(t)\right| \mathrm{d}\,t$$

mennyiséget a γ *görbe hosszának* nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

– Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

19.8. Tétel. *Legyen* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ *és* $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ *olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$*. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma^\circ}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

19.9. Tétel. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *folytonos függvény. Ekkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

19.10. Tétel. *Legyen* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ *és* $f, g : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ *olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ *és* $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} g$ *teljesül.*

1. $\int_\gamma (f + g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \qquad \int_\gamma (\lambda f) = \lambda \int_\gamma f$
3. *Legyen* $\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b + a - t)$, *ekkor* $\int_\delta f = -\int_\gamma f$.
4. $\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \sup_{x \in \operatorname{Ran} \gamma} |f(x)|$

19.11. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a))\, \mathrm{d}\, t.$$

19.12. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f.$
2. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
3. *Minden $c \in [a, b]$ pontra* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

19.13. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a *F az f primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint *F az f globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

19.14. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

19.15. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.5. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

19.16. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

19.17. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az*

$$F : U \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

19.18. Tétel. *(Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén* $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0.$

19.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.*

19.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f fügvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.6. Az indexfüggvény

19.21. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \neq -1; \\ 2\pi\,\mathrm{i}\,m, & \text{ha} \quad n = -1. \end{cases}$$

19.22. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}$$

19.23. Tétel. *Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = r\}$ esetén*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |z| > r; \\ m, & \text{ha} \quad |z| < r. \end{cases}$$

19.24. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\mathrm{Ran}\,\mathrm{Ind}_\gamma \subseteq \mathbb{Z}$
2. *Az Ind_γ függvény folytonos.*
3. *Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.*

19.7. Cauchy integráltételei

19.25. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a γ_0 *és* γ_1 *kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0,1]^2 \to U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

19.26. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az *$U \subseteq M$ halmaz egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az *(M,d) metrikus tér egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

19.27. Tétel. *(Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\mathrm{Dom}\,f$ nyílt halmaz és minden $z \in \mathrm{Dom}\,f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\mathrm{Dom}\,f$ halmazban, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

19.28. Tétel. *(Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\mathrm{Dom}\,f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq U \subseteq \mathrm{Dom}\,f$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\mathrm{Dom}\,f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq \mathrm{Dom}\,f$ esetén*

$$\oint_\gamma f = 0$$

teljesül.

19.30. Tétel. *(Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \operatorname{Ran} \gamma$ pontra*

$$f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

19.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\mathrm{id} - z}\ .$$

19.8. Cauchy transzformáció

19.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az *f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran} \gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{\mathrm{id}_\mathbb{C} - z}.$$

19.33. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. *A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a $\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran} \gamma)$ számnál.*
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran} \gamma)}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_\mathbb{C} - a)^{n+1}}\ .$$

19.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.*

1. *Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a*

$$r_a = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\}$$

számnál.

3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$, $r \in]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\mathrm{id}_\mathbb{C} - a)^{n+1}}\ .$$

19.9. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei

19.35. Tétel. *(Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.*
- *Létezik a $\lim\limits_a f$ határérték.*
- *Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f\,(B_\rho(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*

- $\lim_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$

19.36. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.37. Tétel. *(Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Az f függvény holomorf.*
- *Minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U$ esetén $\int_\gamma f = 0$ teljesül.*
- *Minden $a, b, c \in \operatorname{Dom} f$ esetén, ha $T(a,b,c) \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

19.38. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.39. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.40. Tétel. *(Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n-ed fokú polinom.*

19.41. Tétel. *(Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.*

19.42. Tétel. *(Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.*

19.11. Holomorf függvények gyökei

19.43. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$.*

1. *Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.*
2. *Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ számra $f(z) = (z-a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.*
3. *Az N_f halmaz megszámlálható.*

19.44. Tétel. *(Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha a $T = \{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.*

19.12. Laurent-sorfejtés

19.45. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in\,]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C}|\ r < |z-a| < R\}$$

halmazt az *a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

19.46. Tétel. *(Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \textit{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) c_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} \ .$$

19.47. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

- Ekkor a
$$C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$
függvénysort az *f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük.
- Az *f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_r : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z-a)^n$$
és az *f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_p : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z-a)^n.$$
- Az *f függvénynek az a pontban pólusa* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+|\ c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az
$$r_f(a) = \max\left\{m \in \mathbb{N}^+|\ c_{-m} \neq 0\right\}$$
szám a *pólus rendje*.

- *Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ | \; c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
- A c_{-1} számot az *f függvény a pontbeli reziduumának* nevezzük és a $\operatorname{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

19.48. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m-ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor*

$$\operatorname{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right) \right) .$$

19.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele

19.49. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\operatorname{Dom} f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

19.50. Tétel. *(Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{a \in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}_f(a) .$$

19.51. Tétel. *(Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a \in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a \in P_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) r_f(a) .$$

19.52. Tétel. *(Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor*

$$\sum_{a \in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a \in N_{f+g}} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a) .$$

19.14. Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma

19.53. Tétel. *(Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.*

19.54. Tétel. *(Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.*

19.55. Tétel. *(Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.*

19.56. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor*

$$\sup_{x \in \overline{U}} |f(x)| = \max_{x \in \operatorname{Fr} U} |f(x)|,$$

ahol $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

19.57. Tétel. *(Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \leq C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$|f(z) - f(a)| \leq C \frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \leq \dfrac{C}{r}$.

19.15. Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel

19.58. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen $r(a) = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ \middle| \, \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\}$ és az f függvény a pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*

1. *Ekkor minden $r \in \,]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \leq \dfrac{1}{r^n} \cdot \displaystyle\sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
3. *Az f függvénynek pontosan akkor van m-ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\dfrac{C_1}{|z-a|^m} \leq |f(z)| \leq \dfrac{C_2}{|z-a|^m}$.*
4. *Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in \,]0, r(a)[$ esetén $\dfrac{C_k}{r^k} \leq \displaystyle\sup_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.*

19.59. Tétel. *(Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in \,]0, r[$ esetén $\overline{f(B_\rho(a) \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$.*

19.60. Tétel. *(Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(k)}$.*

19.61. Tétel. *(Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.*

19.16. Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel

19.62. Tétel. *Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \geq 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}\, x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}:\ q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a \right)$$

$$\forall\alpha\in\,]0,2\pi[\,:\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(\alpha x)\ \mathrm{d}\,x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin(\alpha x)\ \mathrm{d}\,x=2\pi\,\mathrm{i}\sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im}a>0}}\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z},a\right)$$

$$\forall\alpha\in\,]-1,1[\,:\int_{0}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}x^{\alpha}\ \mathrm{d}\,x=\frac{\pi\,\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im}a>0}}\operatorname{Res}\left(z\mapsto\frac{p(z)}{q(z)}z^{\alpha},a\right)$$

19.17. A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye

19.63. Tétel. *Ha $D\subseteq\mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f,g:\mathbb{C}\setminus D\to\mathbb{C}$ olyan holomorf fügvény, hogy*

1. *az $f-g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;*
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D}|f(z)-g(z)|<\infty$*;*
3. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D}|f(z)-g(z)|=0$*,*

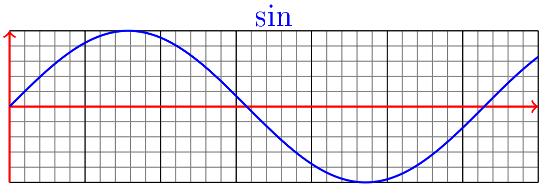
akkor $f=g$.

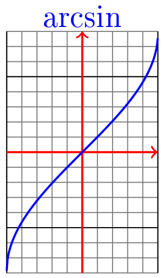
19.64. Tétel.

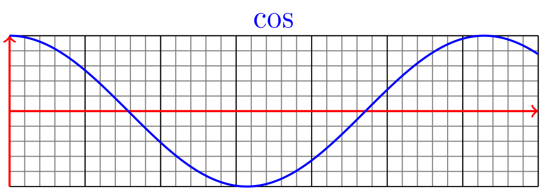
1. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}:\qquad \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}$
2. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2}\right):\qquad \dfrac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)}=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$
3. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}:\qquad \operatorname{ctg}(\pi z)=\dfrac{1}{\pi z}+\dfrac{2z}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2}$
4. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2}\right):\qquad \operatorname{tg}(\pi z)=\dfrac{2z}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

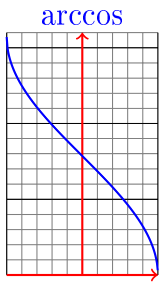
20. Függelék

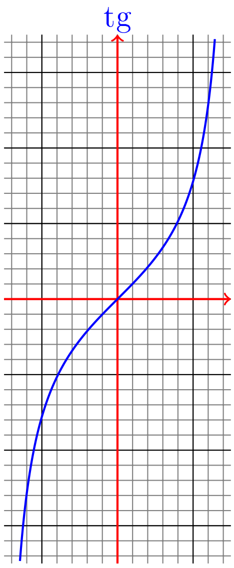
20.1. Az elemi függvények grafikonjai

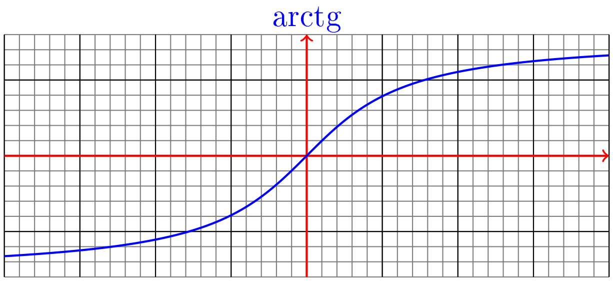




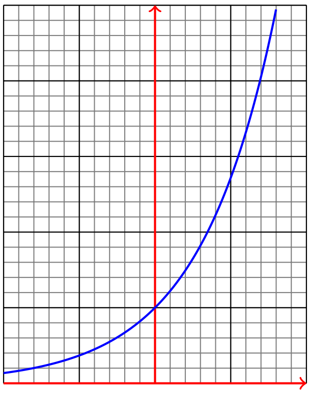




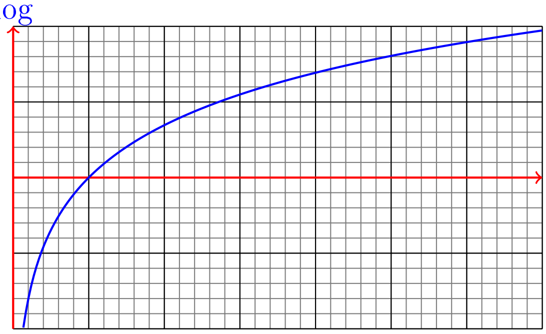




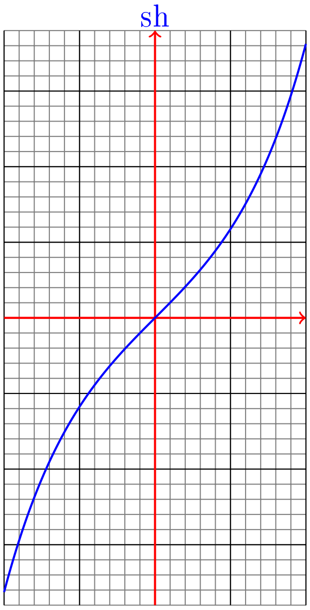
exp



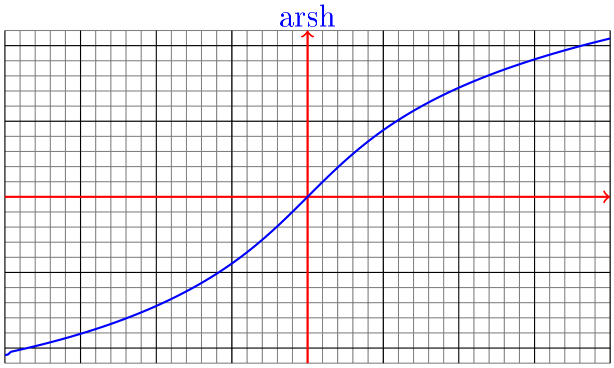
log

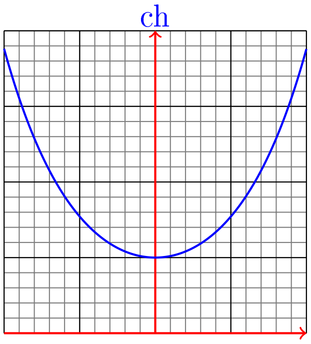


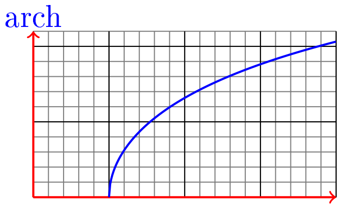
sh

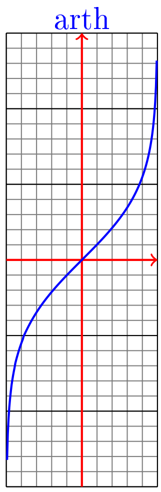


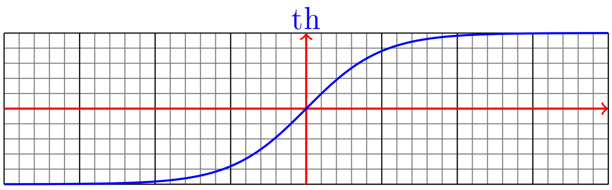
arsh











20.2. Tizedestörtek

20.1. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Értelmezzük az*

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n = 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor

1. *minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;*
2. *a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;*
3. *minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;*
4. *$x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;*
5. *végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N - 1$;*
6. *legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$.

20.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \ldots \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melyet az x *szám* N *alapú számrendszer vett felírásának* nevezünk.

20.3. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

20.3. Kategóriák

20.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy adott egy $\mathcal{K}$ *kategória*, ha

1. adottak *objektumai*, melynek jele $\mathcal{OB}$;
2. bármely két (esetleg azonos) $A, B \in \mathcal{OB}$ esetén adott az A *objektumból* B *objektumba képező morfizmusok* $\mathcal{MOR}(A, B)$ *halmaza*;
3. bármely három $A, B, C \in \mathcal{OB}$ esetén adott egy

$$\mathcal{MOR}(A, B) \times \mathcal{MOR}(B, C) \to \mathcal{MOR}(A, C) \qquad (f, g) \mapsto g \circ f$$

függvény, a *morfizmusok kompozíciója*.

Továbbá megköveteljük, hogy bármely négy $A, B, C, D \in \mathcal{OB}$ objektum és $f \in \mathcal{MOR}(A, B)$, $g \in \mathcal{MOR}(B, C)$, $h \in \mathcal{MOR}(C, D)$ morfizmus esetén

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

teljesüljön, valamint minden $A \in \mathcal{OB}$ esetén létezzen egy kitüntetett eleme a $\mathcal{MOR}(A, A)$ halmaznak, melyet *egységmorfizmusnak* nevezünk, és az id_A szimbólummal jelölünk, azzal a tulajdonsággal, hogy minden $B, C \in \mathcal{OB}$ objektumra és $f \in \mathcal{MOR}(A, B)$, $g \in \mathcal{MOR}(C, A)$ morfizmusra

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g$$

teljesül.

20.5. Definíció. (*Példák kategóriákra.*)

- Legyen $\mathcal{SET}$ az a kategória, melynek az objektumai a halmazok, és bármely két A, B halmaz esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \mathcal{F}(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{SET}$ kategóriát a *halmazok kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{VECT}$ az a kategória, melynek az objektumai a valós számtest feletti vektorterek, és tetszőleges A, B vektortér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \mathrm{Lin}(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{VECT}$ kategóriát a *valós számtest feletti vektorterek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{MET}$ az a kategória, melynek az objektumai a metrikus terek, és tetszőleges A, B metrikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq C(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{MET}$ kategóriát a *metrikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{TOP}$ az a kategória, melynek az objektumai a topologikus terek, és tetszőleges A, B topologikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq C(A, B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{TOP}$ kategóriát a *topologikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{GROUP}$ az a kategória, melynek az objektumai a csoportok, és tetszőleges A, B csoport esetén legyen $\mathcal{MOR}(A, B) \triangleq \{f : A \to B | f \text{ homomorfizmus}\}$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{GROUP}$ kategóriát a *csoportok kategóriájának* nevezzük.

20.4. Vektorterek

20.6. Definíció. A $(V, +, \cdot)$ hármast *vektortérnek* nevezzük a $\mathbb{K}$ számtest felett, ha V halmaz, $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ olyan függvény mely teljesíti a következőket.

1. A $(V, +)$ pár kommutatív csoport.
2. Minden $a, b \in \mathbb{K}$ és $x, y \in V$ esetén

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot x) &= (ab) \cdot x \\ (a + b) \cdot x &= a \cdot x + b \cdot x \\ a \cdot (x + y) &= a \cdot x + a \cdot y \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

A továbbiakban a $\cdot$ műveletet nem írjuk ki.

20.7. Tétel. *A valós együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett, hasonlóan a komplex együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{C}$ felett.*

20.8. Definíció. A $(V, +, \cdot, \times)$ négyest *algebrának* nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha

- $(V, +, \cdot)$ hármas vektortér a $\mathbb{K}$ test felett,
- $\times : V \times V \to V$ pedig olyan művelet, melyre minden $x, y, z \in V$ és $c \in \mathbb{K}$ esetén az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= x \times (y \times z) \\ x \times (y + z) &= x \times y + x \times z \\ (y + z) \times x &= y \times x + z \times x \\ c \cdot (x \times y) &= (c \cdot x) \times y = x \times (c \cdot y) \end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy $(V, +, \cdot, \times)$ *egységelemes algebra*, ha létezik olyan $e \in V$, hogy minden $x \in V$ elemre $e \times x = x \times e = x$.
Ha nem okoz félreértést, a $\cdot$ és $\times$ műveletet nem írjuk ki.

20.9. Tétel.

1. *Tetszőleges A halmaz mellett $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*
2. *A polinomok halmaza algebrát alkot.*

20.10. Definíció. Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i \in I}$ vektorok egy rendszere, azaz minden $i \in I$ esetén legyen $e_i \in V$.

- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $e_i \neq 0$ és ha minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0 \quad \to \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden véges $J \subseteq I$ halmazra az $(e_i)_{i \in J}$ vektorrendszer lineárisan független.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer *algebrai bázis*, ha lineárisan független vektorrendszer, és nem valódi részhalmaza egyetlen lineárisan független vektorrendszernek sem.

20.11. Tétel. *Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i \in I}$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor létezik olyen B bázis a V vektortérben, melyre minden $i \in I$ esetén $e_i \in B$ teljesül. (Vagyis lineárisan független vektorok rendszere kiegészíthető bázissá.)*

20.12. Tétel. *Minden vektortérben létezik bázis.*

20.13. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor minden $x \in V$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz és a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből álló $(a_j)_{j\in J}$ számrendszer, melyre*

$$x = \sum_{j\in J} a_j e_j$$

teljesül.

20.14. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor*

$$V = \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i e_i |\ \forall i \in I: \ \alpha_i \in \mathbb{K} \ \wedge \ \text{az } \{i \in I | \alpha_i \neq 0\} \text{ halmaz véges} \right\}$$

teljesül.

20.15. Tétel. *(Kicserélési lemma.) Legyen V vektortér, $n, k \in \mathbb{N}$, valamint legyen $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ és $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ bázis. Ekkor minden $l \in \{1, \ldots, k\}$ esetén létezik olyan $b_{j(l)}$ vektor, hogy az*

$$\{a_i | i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}\} \cup \left\{b_{j(l)}\right\}$$

vektorrendszer bázis.

20.16. Tétel. *Ha valamely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és az $(f_j)_{j=1,\ldots,m}$ vektorrendszer is bázis, akkor $n = m$.*

20.17. Tétel. *A V vektortérben legyen $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és $(f_j)_{j\in J}$ bázis. Ekkor $|J| = n$.*

20.18. Definíció. Legyen V vektortér. Azt mondjuk, hogy a V vektortér
- *n-dimenziós* ($n \in \mathbb{N}$), ha létezik benne n elemszámú bázis;
- *véges dimenziós* ha n dimenziós valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *végtelen dimenziós*, ha nem véges dimenziós.

20.19. Definíció. Legyen V_1 és V_2 vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy az $A : V_1 \to V_2$ *leképezés lineáris*, ha
- $\forall x, y \in V_1 : \ A(x + y) = A(x) + A(y)$;
- $\forall x \in V_1 \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, az $A(x)$ vektort Ax alakban írjuk fel.

20.20. Tétel. *Ha V_1 és V_2 vektortér, akkor a*

$$\mathrm{Lin}(V_1, V_2) \triangleq \{A : V_1 \to V_2 |\ A \text{ lineáris}\}$$

halmaz vektorér a pontonkénti műveletekkel.

20.21. Definíció. Ha V vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor a $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{K})$ halmazt a V *vektortér duálisának* nevezzük, és a továbbiakban a V^* szimbólummal jelöljük.

20.5. Valós számok szögfüggvényei

20.22. Tétel. *A* sin *és* cos *függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

20.23. Tétel. *A* cos *függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

20.24. Tétel. *Ha $x \in [0, \pi]$, akkor*

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

20.25. Tétel. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $\qquad \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

20.26. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x\frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x = \frac{\pi}{6}$ esetén $x = 30^\circ$.)

20.27. Tétel.

$$\sin 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16} - \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16}$$

20.28. Tétel.

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{17}+15+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\left(3+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}$$

20.6. Szummázások

20.29. Definíció. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatból képzett $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sort, amit az s szimbólummal fogunk jelölni. Vagyis

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

a részletösszeg sorozat. Minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a $\sigma^{(i)}$ sorozatot az alábbi módon. Az $i = 1$ esetben legyen

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k,$$

az $i > 1$ esetben pedig

$$\sigma^{(i)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(i)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(i-1)}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ *sor C_i (Cesáro-) összegezhető*, ha létezik véges határértéke a $\sigma^{(i)}$ sorozatnak. Ebben az esetben a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_i} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(i)}$$

jelölést használjuk.

20.30. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sor konvergens, akkor C_1 összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} a_n$$

teljesül.

20.31. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sor C_k összegezhető, akkor minden $m \in \mathbb{N}$, $k < m$ elemre C_m összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_k} a_n.$$

20.32. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|q| \leq 1$ és $q \neq 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\, q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Továbbá

1. *a $\sum_n (-1)^{1+n}$ sor C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\, (-1)^n = \frac{1}{2};$$

2. *a $\sum_n \sin(nx)$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\, \sin(nx) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \in \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}; \\ \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} & ha \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}; \end{cases}$$

3. *a $\sum_n \cos(nx)$ sor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$ esetén C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\, \cos(nx) = \frac{1}{2}.$$

20.7. Jensen-tétel következményei

20.33. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a, b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}\right)$$

teljesül.

20.34. Tétel. *(Súlyozott hatványközép.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméterre*

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^r}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & ha \quad r \neq 0, \\ \lim\limits_{r \to 0} \alpha(r) & ha \quad r = 0, \end{cases}$$

függvény monoton növő.

20.8. Wallis- és Stirling-formula

20.35. Tétel. *(Wallis-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi}$$

20.36. Tétel. *(Stirling-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

becslés.

20.37. Tétel. *Legyen*

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n \in \mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le a_n \le 1$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

20.38. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

20.9. A gamma függvény

20.39. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

improprius integrál konvergens.

20.40. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

20.41. Tétel. *(Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*
3. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n! = \Gamma(n+1)$ teljesül.*

20.10. Az analitikus számelmélet pár tétele

20.42. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$ *és*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

1. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x \in]0,1[$ *esetén* $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$.
2. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

20.43. Tétel. *A* π^2 *szám irracionális.*

20.44. Tétel. *Legyen* $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ *és*

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1. *Minden páratlan* $k \in \mathbb{N}$ *szám esetén* $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.
2. *Minden páros* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
3. *Minden páros* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

20.45. Tétel. *Ha* $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *akkor* e^x *irracionális.*

20.46. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén elölje* $\mathcal{P}_n$ *az* n *számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - 2.$$

20.47. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

20.48. Tétel. *Az* e *szám transzcendens.*