Analízis alapjai

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában. Továbbá köszönöm *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézését.

Külön köszönettel tartozom *Szép Enikőnek* a jegyzet írása során nyújtott támogatásáért és bíztatásáért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Logikai alapok

Jelölés. A halmazelméletben definiálatlan alapfogalomként szerepel a *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezés. Tehát bármely A és B halmaz esetén értelmes az a kijelentés, hogy A *eleme a* B *halmaznak*. Az „A eleme a B halmaznak” kijelentést az $A \in B$ szimbólummal jelöljük.

Jelölés. A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:
$\neg p$: *p tagadása, negációja*;
$p \vee q$: *p vagy q*;
$\exists$: *létezik* szimbólum.

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén
$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$
teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: *p és q*, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \rightarrow (q)$: *p-ből q következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: *p és q ekvivalensek*, ha $((p) \rightarrow (q)) \wedge ((q) \rightarrow (p))$;
- $\forall x(p)$: *minden x esetén p* teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

Jelölés. A továbbiakban $x \notin y$ jelöli a $\neg(x \in y)$ formulát, valamint $x \neq y$ a $\neg(x = y)$ formulát.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

1.4. Tétel. *Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.*

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Bizonyítás. A definícióból elemi számolással adódik.

1.5. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.6. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\
 & p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
 & & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{array}$$

teljesül.

Bizonyítás. A $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ azonosságot az alábbi igazságtábla bizonyítja.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
i	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A többi azonosság is hasonló módon származtatható igazságtáblázatokból.

1.2. A halmazelmélet axiómái

1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy A *részhalmaza* a B halmaznak, ha $\forall v(v \in A \to v \in B)$ teljesül, melynek jele $A \subseteq B$, vagy $B \supseteq A$.

1.8. Definíció. Az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük és a $\mathcal{P}(x)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, melynek elemei éppen x részhalmazai.

Jelölés. Bevezetjük az { } jelölést halmazokra. Azt a halmazt, melynek elemei $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ezentúl a

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

szimbólum jelöli.

1.9. Definíció. Adott X halmaz esetén $\cup X$ jelöli azt a halmazt, melynek elemei éppen az X halmazban lévő halmazok elemei, vagyis $\cup X$ az X elemeinek egyesítését jelöli.

1.10. Definíció. Legyen A és B halmaz. Ekkor a páraxióma szerint létezik az $\{A, B\}$ halmaz, továbbá az egyesítési axóma szerint létezik az $\cup\{A, B\}$ halmaz, melyet a továbbiakban $A \cup B$ formában írunk, és az A, B *halmaz egyesítésének* (vagy *–uniójának*) mondunk.

1.11. Definíció. Az A halmaz *rákövetkezőjének* (vagy *szukcesszorának*) nevezzük az

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

halmazt.

1.12. Definíció. Az A halmazt *induktív halmaznak* vagy *monoton halmaznak* nevezünk, ha $\emptyset \in A$ és $\forall x \in A$ esetén $x^+ \in A$.

1.13. Definíció. Legyen x halmaz és p formula. A részhalmaz axiómaséma alapján az x halmaz azon elemei, melyekre p teljesül halmazt alkotnak. Ezt a halmazt a $\{u \in x \mid p\}$ szimbólummal jelöljük.

1.14. Definíció. Adott X halmazrendszer *metszetén* az

$$\{x \in \cup X \mid \forall z \in X \ x \in z\}$$

halmazt értjük, melynek jele $\cap X$. Az A, B halmaz esetén $\cap\{A, B\}$ helyett a $A \cap B$ jelölést használjuk, melyet az A, B *halmaz metszetének* mondjuk.

Jelölés. Ha p olyan formula, melyben előfordul az u és v változó, akkor ezt hangsúlyozandó a $p(u, v)$ jelölést használjuk. Ha a p formulában u és v minden előfordulásának helyére u' és v' változót írjuk, akkor ezt a $p(u/u', v/v')$ szimbólummal jelöljük.

1.3. Elemi halmazműveletek

1.15. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A|\ x \notin B\}$ halmazt *A és B különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.16. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{llll} A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

Bizonyítás. A tételben szereplő állítások elemi számolással visszavezethetők az 1.6 tételben szereplő logikai összefüggésekre.

1.17. Tétel. *(Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen x az a halmaz, mely minden halmazt tartalmaz és legyen $y \triangleq \{z \in x|\ z \notin z\}$. Ekkor mind $y \in y$, mind $y \notin y$ ellentmondáshoz vezet.

1.4. Relációk

1.18. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.19. Tétel. *Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor nyilván $(x, y) = (a, b)$. Tegyük fel, hogy $(x, y) = (a, b)$, vagyis $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ teljesül. Ekkor $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a\}$, akkor $x = y = a$, valamint $a = b$, tehát ekkor $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a, b\}$, akkor $x = a$, valamint $\{a, y\} = \{a, b\}$ miatt $y = b$, vagy $y = a$, ami ugyancsak azt jelenti, hogy $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a, b\}$, akkor $x = a = b$ és $y = b$, tehát $x = a$ és $y = b$.

1.20. Tétel. *Adott A, B halmaz, valamint $a \in A$, $b \in B$ elemek esetén*

$$(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

teljesül, így létezik az

$$\{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))|\ a \in A,\ b \in B\}$$

halmaz.

Bizonyítás. A rendezett pár definíciójának következménye.

1.21. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.22. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

- *értelmezési tartománya*

$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X|\ \exists y \in Y : (x, y) \in R\};$$

– *értékkészlete*

$$\operatorname{Ran} R \triangleq \{y \in Y |\ \exists x \in X : (x, y) \in R\};$$

– *inverze*

$$\overset{-1}{R} \triangleq \{(y, x) \in Y \times X |\ (x, y) \in R\};$$

– általi *képe a* $H \subseteq X$ *halmaznak*

$$R(H) \triangleq \{y \in Y |\ \exists x \in H : (x, y) \in R\}\,;$$

– *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x, z) \in X \times Z |\ \exists y \in Y :\ (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

1.23. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \triangleq \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.5. Függvények

1.24. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' (((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R) \rightarrow y = y')$$

teljesül.

Jelölés. Az $f \subseteq X \times Y$ függvényre a továbbiakban az $f : X \twoheadrightarrow Y$ jelölést használjuk. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény értelmezési tartománya $\operatorname{Dom} f \subseteq X$ és értékkészlete $\operatorname{Ran} f \subseteq Y$. Adott $x \in \operatorname{Dom} f \subseteq X$ esetén azt az egyértelműen meghatározott $y \in Y$ elemet, melyre $(x, y) \in f$ teljesül $f(x)$ jelöli. Az f függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x)$$

alakban írjuk fel. A $H \subseteq X$ esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \twoheadrightarrow Y \quad x \mapsto f(x).$$

Abban az esetben, amikor az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvényre $\operatorname{Dom} f = X$ teljesül az $f : X \to Y$ jelölést fogjuk használni. Tehát az $f : X \to Y$ jelentése az, hogy f függvény és $\operatorname{Dom} f = X$.

Jelölés. A függvények halmazára bevezetjük az

$$\mathcal{F}(X, Y) = \{f \subseteq X \times Y\ | f \text{ függvény},\ \operatorname{Dom} f = X\}$$

jelölést, valamint megemlítjük, hogy szokásos még az X^Y jelölés is erre a függvényhalmazra, de egészen kivételes esetektől eltekintve ezt nem használjuk.

1.25. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *injektív*, ha $\forall x, x' \in X :\ (f(x) = f(x') \rightarrow x = x')$;
- *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
- *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.26. Tétel. *Ha f függvény, akkor $\overset{-1}{f}$ pontosan akkor függvény, ha f injektív.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f függvény injektivitása azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((x, y) \in f \wedge (x', y) \in f) \to x = x'.$$

Az $\overset{-1}{f}$ reláció függvényszerűsége azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \ \forall y \in Y : \ ((y, x) \in \overset{-1}{f} \wedge (y, x') \in \overset{-1}{f}) \to x = x'.$$

Vagyis a két kijelentés ekvivalens egymással.

1.27. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze*. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható*.

1.28. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \twoheadrightarrow Y$ és $g : Y \twoheadrightarrow Z$, valamint tegyük fel, hogy $(x, z_1), (x, z_2) \in (g \circ f)$. A relációk kompozíciójának az értelmezése alapján létezik olyan $y_1, y_2 \in Y$, melyre $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$, $(y_1, z_1) \in g$ és $(y_2, z_2) \in g$ teljesül. Mivel f függvény, így $y_1 = y_2$, tehát az $(y_1, z_1) \in g$ és a $(y_2, z_2) \in g$ relációkból g függvényszerűségének a felhasználásával $z_1 = z_2$ adódik, vagyis $g \circ f$ függvény.

1.29. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
- *jobb inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} f}$;
- *bal inverze* az a $g : \operatorname{Ran} f \twoheadrightarrow \operatorname{Dom} f$ függvény, melyre $g \circ f = \mathrm{id}_{\operatorname{Dom} f}$.

1.30. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z, V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(x, v) \in h \circ (g \circ f)$. Ekkor létezik olyan $z \in Z$, hogy $(x, z) \in (g \circ f)$ és $(z, v) \in h$. Amiből következik, hogy létezik olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in f$ és $(y, z) \in g$. Ekkor $(y, z) \in g$ és $(z, v) \in h$ miatt $(y, v) \in h \circ g$, valamint $(x, y) \in f$ miatt $(x, v) \in (h \circ g) \circ f$. Az indentitásfüggvényre vonatkozó azonosság nyilvánvalóan adódik az identitásfüggvény definíciójából.

1.31. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \overset{\triangle}{=} +(x, y)$ jelöléssel élünk.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

  $$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge \ x' + x = e,$$

  ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

  $$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.32. Definíció. A $(G, \cdot)$ párt *félcsoportnak* nevezzük, ha $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív művelet. A $(G, \cdot)$ pár *kommutatív félcsoport*, ha $(G, \cdot)$ félcsoport és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.33. Definíció. A $(G, \cdot, e)$ hármast *csoportnak* nevezzük, ha $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív, egységelemes és inverzelemes művelet. Az egységelemet általában e jelöli absztrakt csoport esetén és a $g \in G$ elem inverzét pedig g^{-1}. Így csoportok esetén létezik egy

$$^{-1} : G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$$

inverzképzés. A $(G, \cdot, e)$ hármas *kommutatív csoport*, ha $(G, \cdot, e)$ csoport, és a $\cdot$ művelet kommutatív.

1.34. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény. Legyen $Y \triangleq \{x \in A | \; x \notin f(x)\}$. Ekkor létezik $x_0 \in A$, melyre $f(x_0) = Y$. Ekkor az $x_0 \in Y$ feltevés és az $x_0 \notin Y$ feltevés is ellentmondáshoz vezet.

1.6. Halmazrendszerek

1.35. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.36. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \exists i \in I : \; x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \forall i \in I : \; x \in A_i\}.$$

1.37. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I : \; f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

Jelölés. A Descartes-szorzat elemei tehát az indexhalmazon értelmezett speciális függvények. Abban az esetben, amikor az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre minden $i, j \in I$ esetén $A_i = A_j$ teljesül, akkor az $A = A_i$ jelölést bevezetve a halmazrendszer Descartes-szorzatára

$$\prod_{i \in I} A = \{f : I \to A\} = \mathcal{F}(I, A)$$

adódik, amit gyakran az A^I szimbólummal fogunk jelölni.

1.38. Tétel. *Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a*

$$\varphi : \prod_{i \in I} A_i \to A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Ekkor $(\alpha(x), \alpha(y)) = (\beta(x), \beta(y))$, amiből $\alpha(x) = \beta(x)$ és $\alpha(y) = \beta(y)$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. Vagyis a φ leképezés injektív. Ha $(c_x, c_y) \in A_x \times A_y$, akkor az $f = \{(x, c_x), (y, c_y)\} \in \prod_{i \in I} A_i$ függvényre $\varphi(f) = (c_x, c_y)$ teljesül, vagyis φ szürjektív.

Jelölés. A kiválasztási axióma jele AC, az angol *axiome of choice* kifejezés után. Az általunk használandó halmazelmélet axiómái a ZF axiómák és az AC axióma, melyet együttesen ZFC-nek rövidítünk.

1.39. Tétel. *Ha $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I(A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen I nem üres halmaz és legyen $f : I \to \mathcal{P}(A)$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f(i) \neq \emptyset$. A kiválasztási axiómát alkalmazva az $x = \operatorname{Ran} f$ halmazra azt kapjuk, hogy létezik olyan $\varphi : \operatorname{Ran} f \to A$ függvény, hogy minden $u \in \operatorname{Ran} f$ esetén $\varphi(u) \in u$. Mivel minden $i \in I$ esetén $f(i) \in \operatorname{Ran} f$, ezért $\varphi(f(i)) \in f(i)$. Tehát a $g = \varphi \circ f$ függvényre $g \in \prod_{i \in I} f_i$ teljesül. Vagyis nem üres halmazok Descartes-szorzata nem üres.

1.40. Definíció. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.
- Adott $k \in I$ esetén a
$$\operatorname{pr}_k : \prod_{i \in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$
függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.
- Adott $a \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a
$$\operatorname{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i \in I} A_i \;\middle|\; u_k = a,\ \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$
függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén
$$(\operatorname{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha } i = k; \\ a_k, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

1.7. Rendezések

1.41. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:
- *reflexív*, ha $\forall x \in X((x, x) \in R)$;
- *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X(((x, y) \in R \land (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X(((x, y) \in R \land (y, x) \in R) \to x = y)$.

1.42. Tétel. *Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció.*
1. *Az R pontosan akkor reflexív, ha $\operatorname{id}_X \subseteq R$.*
2. *Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.*
3. *Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.*
4. *Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \operatorname{id}_{\operatorname{Dom} R}$.*

Bizonyítás. A definíciók közvetlen következménye.

1.43. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

Jelölés. A rendezéseket általában a $\leq, \geq, \preceq, \succeq$ szimbólummal jelöljük. A továbbiakban $(x, y) \in \leq$ helyett az $x \leq y$ jelölést használjuk, és bevezetjük az $x < y$ rövidítést az $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ formula helyett.

1.44. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X$ $x' \leq x$ $(x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

1.45. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.46. Tétel. *Legyen $(A, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz és $X \subseteq A$.*
1. *Az $y \in A$ elemre $\sup X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y felső korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül.*
2. *Az $y \in A$ elemre $\inf X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y alsó korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A :\ (z > y \to (\exists x \in X : z > x))$ teljesül.*

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a második hasonló gondolatmentettel igazolható.
$\Rightarrow$ Legyen $y = \sup X$. Ekkor y definíció szerint felső korlátja az X halmaznak. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z \in A$, melyre $z < y$ és minden $x \in X$ esetén $x \leq z$. Ekkor z felső korlátja az X halmaznak és kisebb mint y, vagyis nem $y = \sup X$ az X halmaz legkisebb felső korlátja, ami ellentmondás.
$\Leftarrow$ Legyen y olyan felső korlátja az X halmaznak, melyre $\forall z \in A :\ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ teljesül. Ekkor y a legkisebb felső korlát, vagyis $y = \sup X$.

1.47. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

1.48. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= \{z \in A|\ x \leq z \leq y\} \\
[x, y[&= \{z \in A|\ x \leq z < y\} \\
]x, y] &= \{z \in A|\ x < z \leq y\} \\
]x, y[&= \{z \in A|\ x < z < y\}
\end{aligned}
$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.49. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.50. Tétel. *(Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.*

1.8. Ekvivalenciarelációk

1.51. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

Jelölés. Az ekvivalenciarelációkat a $\approx, \sim$ szimbólummal jelöljük, továbbá $(x, y) \in \approx$ helyett az $x \approx y$ jelölést használjuk.

1.52. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \to y \in X)$.

1.53. Tétel. *Legyen A tetszőleges halmaz és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor minden $a \in A$ elemre az*

$$a/\approx \triangleq \{x \in A |\ a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A/\approx \triangleq \{X \in \mathcal{P}(A) |\ \exists a \in A :\ X = a/\approx\}.$$

Továbbá az $A/\approx$ ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz

$$\forall x, y \in A/\approx:\ x \neq y \to x \cap y = \emptyset, \quad \text{és} \quad \cup\{x |\ x \in A/\approx\} = A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges halmaz, $a \in A$ és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Mivel $a \approx a$, ezért $a \in a/\approx$, vagyis $a/\approx \neq \emptyset$. Ha $x, y \in a/\approx$, akkor $x \approx a$, $y \approx a$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt $x \approx y$ adódik. Ha $x \in a/\approx$ és $y \in A$ olyan elem, melyre $x \approx y$ teljesül, akkor $y \approx a$ a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt, vagyis $y \in a/\approx$.
Legyen $x/\approx, y/\approx \in A/\approx$ olyan, hogy $x/\approx \neq y/\approx$. Tegyük fel, hogy $c \in (x/\approx) \cap (y/\approx)$. Ekkor $x \approx c$ és $y \approx c$, vagyis $x \approx y$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitásának felhasználásával az $x/\approx = y/\approx$ ellentmondás adódik. Tehát feltételezésünkkel ellentétben nem létezhet olyan c elem, melyet az $x/\approx$ és az $y/\approx$ halmaz is tartalmaz, így $(x/\approx) \cap (y/\approx) = \emptyset$.
Ha $x \in A/\approx$, akkor $x \subseteq A$, vagyis az A részhalmazainak az egyesítése nyilván részhalmaza az A halmaznak, ezért csak a $A \subseteq \cup\{x |\ x \in A/\approx\}$ tartalmazást kell igazolni. Ha $a \in A$, akkor nyilván $a \in a/\approx \in A/\approx$, vagyis $a \in \cup\{x |\ x \in A/\approx\}$.

1.9. Természetes számok és rekurziók

1.54. Tétel. *Létezik egyetlen monoton halmaz, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen M monoton halmaz és legyen $H \triangleq \{N \subseteq M |\ N \text{ monoton}\}$, és $N \triangleq \cap H$. Ekkor N monoton halmaz. Ha M' egy monoton halmaz, akkor $M \cap M'$ is monoton halmaz és $M \cap M' \in H$, ezért $N \subseteq M'$.

1.55. Definíció. Azt a jól meghatározott monoton halmazt, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz, az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük és elemeit *természetes számoknak* hívjuk. Továbbá bevezetjük az $\mathbb{N}^+ \triangleq \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ jelölést.

1.56. Definíció.

$$\begin{aligned}
&0 \triangleq \emptyset \\
&1 \triangleq 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 \triangleq 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 \triangleq 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1.57. Tétel. *(A teljes indukció elve.) Ha az $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazra $0 \in A$, valamint $\forall n \in A : n^+ \in A$ teljesül, akkor $A = \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. A fenti tétel nyilvánvaló következménye.

1.58. Tétel. *A*

$$\leq \triangleq \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ m \subseteq n\}$$

reláció jólrendezés az $\mathbb{N}$ halmazon. Az $(m,n) \in \leq$ teljesülését szokásosan az $m \leq n$ alakban írjuk.

Jelölés. Adott $n \in \mathbb{N}^+$ természetes szám esetén bevezetjük a

$$\{1, \ldots, n\} \triangleq n^+ \setminus \{0\}, \qquad \{0, \ldots, n\} \triangleq n^+$$

jelölést.

1.59. Tétel. *(Az egyszerű rekurzió tétele.) Legyen A halmaz, $a \in A$ tetszőleges elem és legyen $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times A, A)$ tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $f : \mathbb{N} \to A$ függvény melyre $f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n^+) = g(n, f(n))$ teljesül.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egyetlen olyan $s^{(n)} : n^+ \to A$ függvény, melyre $s^{(n)}(0) = a$ és minden $k \in n$ esetén $s^{(n)}(k^+) = g(n, s^{(n)}(k))$ teljesül. Jelölje H azon természetes számok halmazát, melyekre igaz a fenti kijelentés. Ekkor nyilván $0 \in H$, hiszen az $s^{(0)} : \{0\} \to A$, $s^{(0)}(0) = a$ függvény rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Ha $n \in H$, akkor az

$$s^{(n^+)} : (n^+)^+ \to A \qquad k \mapsto \begin{cases} s^{(n)}(k) & \text{ha} \quad k < n^+ \\ g(n, s^{(n)}(n)) & \text{ha} \quad k = n^+ \end{cases}$$

függvény is rendelkezik a rekurzív tulajdonsággal, egyértelműsége pedig szintén a rekurzióból adódik; vagyis $n^+ \in H$.

Legyen $f = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} s^{(n)}$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $s^{(n)} \subseteq \mathbb{N} \times A$ függvény és minden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elemre $n_1 \leq n_2$ esetén $s^{(n_1)} \subseteq s^{(n_2)}$, ezért $f : \mathbb{N} \to A$ függvény lesz. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f|_{n^+} = s^{(n)}$, ezért az f függvény rendelkezik a tételben leírt tulajdonságokkal, egyértelműsége pedig szintén az $s^{(n)}$ függvények egyértelműségéből fakad.

1.60. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = k$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l^+.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = k$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l^+) = f_k(l)^+$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

összeadás műveletét.

1.61. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $n + 0 = n$
2. $m + n = n + m$
3. $k + (m + n) = (k + m) + n$
4. $m \leq n \to m + k \leq n + k$

1.62. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 0$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto l + k.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 0$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l) + k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

szorzás műveletét.

1.63. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1n = n$
2. $mn = nm$
3. $k(mn) = (km)n$
4. $k(m + n) = km + kn$
5. $(m + n)k = mk + nk$
6. $m \leq n \rightarrow mk \leq nk$

1.64. Definíció. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az alábbi szereposztást. Legyen $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ és

$$g : \mathbb{N} \times A \rightarrow \mathbb{N} \quad (n, l) \mapsto lk.$$

Ekkor az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik egy $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény, melyre $f_k(0) = 1$ és minden $l \in \mathbb{N}$ elemre $f_k(l + 1) = f_k(l)k$ teljesül. Ezután bevezetjük a

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (k, l) \mapsto f_k(l)$$

hatványozás műveletét, melyre a $k^l \triangleq h(k, l)$ jelölést alkalmazzuk.

1.65. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1^n = 1$
2. $k^{m+n} = k^m k^n$
3. $(k^m)^n = k^{mn}$

1.66. Tétel. *(A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele.) Legyen A halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$. Tegyük fel, hogy*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

teljesül. Ekkor minden $N \in \mathbb{N}$ elemre és $a \in F_N$ függvényhez létezik olyan $a' : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat, hogy $a'|_N = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n \in F_n$.

Bizonyítás. Legyen A halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$ és

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

teljesül. Legyen továbbá $N \in \mathbb{N}$ és $a \in F_N$ tetszőleges. Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \geq N$ és $b \in F_m$ tetszőleges. Ekkor az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre tett feltételezés alapján

$$\{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset,$$

mivel ez minden $b \in F_m$ halmazra igaz, ezért az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{b\in F_m} \{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset,$$

amiből ugyancsak az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{\{m\in\mathbb{N}|\ m\geq N\}} \prod_{b\in F_m} \{b' \in F_{m+1} |\ b'|_m = b\} \neq \emptyset$$

következik. Legyen α egy eleme a fenti halmaznak. Ekkor az $F = \bigcup_{n=N}^{\infty} F_n$ jelölés bevezetésével

$$\alpha : \{m \in \mathbb{N} |\ m \geq N\} \rightarrow \mathcal{F}(F, F)$$

olyan függvény, hogy minden $m \in \mathbb{N}$, $m \geq N$ esetén $\alpha(m) : F_m \rightarrow F_{m+1}$ és minden $b \in F_m$ elemre $(\alpha(m)(b))|_m = b$ teljesül. Definiáljuk a

$$g : \mathbb{N} \times F \rightarrow F \qquad (n, c) \mapsto \alpha(\operatorname{Dom} c)(c)$$

függvényt. Az egyszerű rekurzió tételét alkalmazva a g függvényre és a $a \in F_N \subseteq F$ elemre kapjuk, hogy létezik olyan $f : \mathbb{N} \to F$ függvény, hogy $f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n+1) = g(n, f(n))$. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül. Az $n = 0$ esetben $f(0) = a \in F_N$ nyilván teljesül. Most tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül. Ekkor

$$f(n+1) = g(n, f(n)) = \alpha(\operatorname{Dom} f(n))(f(n)) \in F_{n+1+N},$$

tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \in F_{n+N}$ teljesül.
Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n+1)|_{n+N} = f(n)$ teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\operatorname{Dom} f(n) = n + N$, vagyis az α függvény $(\alpha(m)(b))|_m = b$ tulajdonsága miatt

$$f(n+1)|_{n+N} = \alpha(\operatorname{Dom} f(n))(f(n))|_{n+N} = \alpha(n+N)(f(n))|_{n+N} = f(n).$$

Ezt másképp úgy is kifejezhetjük, hogy $f(n) \subseteq f(n+1)$.
Legyen $a' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Megmutatjuk, hogy a' függvény. Legyen $(u, v_1), (u, v_2) \in a'$. Ekkor létezik olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $(u, v_1) \in f(n_1)$ és $(u, v_2) \in f(n_2)$, vagy másképp írva $f(n_1)(u) = v_1$ és $f(n_2)(u) = v_2$. Ha $n_1 = n_2$, akkor az $f(n_1)$ függvény, tehát $v_1 = v_2$. Tegyük fel, hogy $n_1 > n_2$. Ekkor $f(n_1)|_{n_2+m} = f(n_2)$ miatt $f(n_1)(u) = f(n_2)(u)$, vagyis ismét $v_1 = v_2$ adódik.
Az $a' : \mathbb{N} \to A$ olyan függvény, hogy $a'|_N = f(0) = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n = f(n - N) \in F_n$ teljesül.

1.10. Természetes számoktól a komplex számokig

1.67. Tétel. *(Egész számok.)*

1. *Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon az*

$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) |\ m + n' = m' + n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} +' &: (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (m+m', n+n') \\ \times' &: (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm'+nn', m'n+n'm) \end{aligned}$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1,n_1), (m_2,n_2), (m_1',n_1'), (m_2',n_2') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ esetén

$$\begin{aligned} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{aligned}$$

teljesül.

3. *A $\mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\approx$ halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{aligned}$$

művelet és $\mathbb{N}$ természetes módon beágyazható a $\mathbb{Z}$ halmazba.

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto (n, 0)/\approx$$

4. *A $(\mathbb{Z}, +)$ kommutatív csoport és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ művelet inverzét $-$.

5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív és egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*
$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$
teljesül.
6. *A $\mathbb{Z}$ halmazon a*
$$\leq \triangleq \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ \exists (m_a, n_a) \in a,\ \exists (m_b, n_b) \in b\ : m_a + n_b \leq m_b + n_a\}$$
reláció lineáris rendezés. Azt a tényt, hogy $(a,b) \in \leq$ röviden az $a \leq b$ alakban írjuk.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást a $\cdot$ jellel jelöljük, vagy nem írjuk ki.

1.68. Definíció. A $\mathbb{Z}$ halmaz elemeit *egész számoknak* nevezzük.

1.69. Tétel. *(Racionális számok.) Legyen $\mathbb{Z}' \triangleq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*
1. *Az $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ halmazon az*
$$\approx \triangleq \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') |\ mn' = m'n\}$$
reláció ekvivalencia-reláció.
2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*
$$\begin{aligned} +' &: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mn' + m'n, nn') \\ \times' &: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm', nn') \end{aligned}$$
Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden
$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$$
elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ esetén
$$\begin{aligned} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{aligned}$$
teljesül.
3. *A $\mathbb{Q} \triangleq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')/\approx$ halmazon jól értelmezett a*
$$\begin{aligned} + &: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times &: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{aligned}$$
művelet és $\mathbb{Z}$ természetes módon beágyazható a $\mathbb{Q}$ halmazba.
$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad n \mapsto (n,1)/\approx$$
4. *A $(\mathbb{Q}, +)$ kommutatív csoport és minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén*
$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$
teljesül. Jelölje a $+$ művelet inverzét $-$.
5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív, egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m, n \in \mathbb{Q}$ esetén*
$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$
teljesül.
6. *Minden $p \in \mathbb{Q}$ elemre $p \neq j(0)$ esetén létezik pontosan egy $p' \in \mathbb{Q}$ melyre $p \times p' = j(1)$ teljesül.*

7. A $\mathbb{Q}$ halmazon a

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} |\ \exists (m_a, n_a) \in a,\ \exists (m_b, n_b) \in b :\ m_a \times n_b \leq m_b \times n_a\}$$

reláció lineáris rendezés, melyet $(a,b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ alakban írunk.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást pedig $\cdot$ jelöli, vagy nem írjuk ki. Nullától különböző $p \in \mathbb{Q}$ elem inverzét a szorzásműveletre nézve $\frac{1}{p}$ jelöli. A fenti tételből következik, hogy minden $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén

$$m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m,$$

ezt a szorzatot a továbbiakban $\frac{m}{n}$ alakban írjuk. Minden $p \in \mathbb{Q}$ elem felírható $p = \frac{m}{n}$ alakban, ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.70. Definíció. A $\mathbb{Q}$ halmaz elemeit *racionális számoknak* nevezzük.

1.71. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös *test*, ha teljesíti az alábbiakat.

- $0, 1 \in K,\ 0 \neq 1$
- A $(K, +, 0)$ kommutatív csoport.
- A $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, 1 az egységeleme és minden nem nulla elemnek létezik inverze.
- A $\cdot$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve.

1.72. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatost *rendezett testnek* mondjuk, ha az teljesíti az alábbiakat.

- A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ötös test.
- A $\leq$ reláció lineáris rendezés.
- $\forall k, m, n \in K : (m \leq n \to m + k \leq n + k)$
- $\forall k, m, n \in K : ((m \leq n \wedge 0 \leq k) \to mk \leq nk)$

1.73. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos *teljesen rendezett test*, ha

- A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test;
- minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma.

1.74. Tétel. *A $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ hatos lineárisan rendezett test, de nem teljesen rendezett test.*

1.75. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{Q}$ halmazt *Dedekind-szeletnek* hívjuk, ha

- $X \neq \emptyset$;
- X felülről korlátos;
- az X halmaznak nincs legnagyobb eleme a $\mathbb{Q}$ halmazban;
- minden $x \in X$ esetén
$$\{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \subseteq X$$
teljesül.

1.76. Definíció. A Dedekind-szeleteket *valós számoknak* nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

1.77. Tétel. *(Műveletek valós számokkal.)*

1. Az $\mathbb{R}$ halmazon a

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x \subseteq y\}$$

reláció rendezés, melyet $(x,y) \in \leq$ esetén az $x \leq y$ alakban írunk fel.

2. A

$$j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} |\ q < x\}$$

beágyazás injektív.

3. Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + y \triangleq \{q_x + q_y |\ q_x \in x,\ q_y \in y\}$$

halmazra $x + y \in \mathbb{R}$ teljesül. Igy értelmezhető a

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y$$

összeadás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(0)$ az egységeleme.

4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$-x \triangleq \{q \in \mathbb{Q} |\ \forall r \in x :\ q < -r\}$$

Ekkor $-x \in \mathbb{R}$, így értelmezhető a

$$- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -x$$

művelet, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + (-x) = j(0)$ teljesül.

5. Legyen $\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ j(0) < x\}$. Adott $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$x \times y \triangleq]-\infty, 0] \cup \left\{q_x \times q_y |\ q_x \in x \cap \mathbb{Q}^+,\ q_y \in y \cap \mathbb{Q}^+\right\}$$

halmazra $x \times y \in \mathbb{R}^+$ teljesül. Igy értelmezhető a

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x \times y & \textit{ha} \quad x > j(0),\ y > j(0) \\ -(x \times (-y)) & \textit{ha} \quad x > j(0),\ y < j(0) \\ -((-x) \times y) & \textit{ha} \quad x < j(0),\ y > j(0) \\ (-x) \times (-y) & \textit{ha} \quad x < j(0),\ y < j(0) \\ j(0) & \textit{ha} \quad x = j(0),\ \textit{vagy}\ y = j(0). \end{cases}$$

szorzás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(1)$ az egységeleme.

6. Az $(\mathbb{R}, +, \times, j(0), j(1), \leq)$ hatos teljesen rendezett test.

7. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ elemre

$$j(x + y) = j(x) + j(y), \quad j(x \times y) = j(x)j(y), \quad j(-x) = -j(x)$$

teljesül.

Jelölés. A továbbiakban a $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ beágyazást nem jelöljük, a $\times$ szorzást pedig $\cdot$ jelöli, vagy nem írjuk ki. Bevezetjük az

$$\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ 0 < x\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x\}$$

jelöléseket.

1.78. Tétel. *Létezik olyan $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ nyolcas, ahol*

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;

2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ függvény, $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ függvény a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

tulajdonságokkal;

3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$ *függvény,* ${}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ *függvény a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a,b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *részhalmaz, melyre minden* $(a,b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *jelölést használjuk és mely rendelkezik a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a,b \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \ \to \ a = b \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq c) \ \to \ a \leq c \\ \forall a,b \in \mathbb{R} & a \leq b \ \vee \ b \leq a \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b) \ \to \ a + c \leq b + c \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c) \ \to \ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

5. továbbá

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \to$$
$$\to \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \leq s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \leq s') \ \to \ s \leq s')))))$$

teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ *struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló.

Jelölés. A szorzás $\cdot$ jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\frac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$.

1.79. Tétel. *Legyen* $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : \quad x < y \ \to -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \to \ yz < xz$
7. $\forall x \in K : \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : \quad 0 < x < y \ \to 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.
2. Ha $x \in K$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$(-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x =$$

$$= -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x.$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.
4. Ha $x, y \in K$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.
5. A
$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$
egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot
$$0 = -1 + (-1)^2,$$
majd az 1 számot
$$1 = (-1)^2$$
adódik.
6. Legyen $x, y, z \in K$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.
7. Legyen $x \in K$. Ha $0 \leq x \in K$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.
8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.
9. Legyen $x \in K$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\frac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \frac{1}{x}$. Ha $x, y \in K$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\frac{1}{xy}$ számmal $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ adódik.

1.80. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

Bizonyítás. Az 1.79 tétel 7. pontja éppen ez volt.

1.81. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\overline{\leq} \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$

továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.82. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$[x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z\}$$
$$]x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z\}$$
$$]-\infty, x] = \{z \in \mathbb{R} |\ z \leq x\}$$
$$]-\infty, x[= \{z \in \mathbb{R} |\ z < x\}$$

Továbbá bevezetjük még az
$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$
jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

Jelölés. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a bővített $\overline{\leq}$ relációra továbbra is a $\leq$ jelet használjuk, valamint a bővített $+$ és $\cdot$ műveletre sem alkalmazunk új jelölést.

1.83. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.84. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen K nem arkhimédészi módon rendezett test és legyen $x, y \in K$ olyan, hogy $0 < x$ és egyetlen $n \in \mathbb{N}$ számra sem teljesül, hogy $y < n \cdot x$. Ekkor az $X \triangleq \{n \cdot x |\ n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felső korlátja y, vagyis létezik $\sup X$. Ekkor $(\sup X) - x$ nem felső korlátja az X halmaznak, tehát létezik $n \cdot x \in X$, melyre $(\sup X) - x < n \cdot x$, vagyis $\sup X < (n + 1) \cdot x$, ami ellentmondás.

1.85. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

Bizonyítás. Az 1.78 tétel alapján $\mathbb{R}$ teljesen rendezett test, az előző 1.84 tétel alapján pedig minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett test.

1.86. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{Z} |\ x < n\} - 1, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

1.87. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha* $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, ^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ *teljesen rendezett test, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ *bijekció, melyre* $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1) = \mathbf{1}$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elem esetén*

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow \ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y \ &\Leftrightarrow \ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

1.88. Tétel. *A* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *halmazon értelmezzük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x, y), (x', y')) \mapsto (x + x', y + y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad & ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

1. *Ekkor* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.*
2. *A*

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, 0)$$

   olyan injekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $j(x) + j(y) = j(x + y)$ *és* $j(x) \cdot j(y) = j(x \cdot y)$ *teljesül.*

Bizonyítás. Elemi számolással adódik.

1.89. Definíció. A $\mathbb{C}$ halmazt a *komplex számok halmazának* nevezzük, elemeit pedig *komplex számoknak.* A $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ elemet az $a + b\,\mathrm{i}$ alakban írjuk, ahol $a = \operatorname{Re} z$ a komplex szám *valós része*, $b = \operatorname{Im} z$ pedig a *képzetes része*, vagyis

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a, b) \mapsto a \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad & (a, b) \mapsto b. \end{aligned}$$

A z *konjugáltja* $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$.

1.90. Tétel. *Nem létezik olyan rendezés a komplex számtest felett, mellyel a komplex számok halmaza rendezett test lenne.*

Bizonyítás. Legyen $\leq$ olyan rendezés a komplex számtesten, mellyel az rendezett test. Ekkor a korábbi 1.80 tétel miatt minden négyzetszám pozitív.
Felhasználva, hogy az 1 és a -1 négyzetszám a komplex számok halmazában, $0 \leq -1$ és $0 \leq 1$ adódik. Az előbbi egyenlőtlenséghez hozzáadva az 1 számot $1 \leq 0$ adódik, amiből a $\leq$ reláció antiszimmetrikussága miatt a $0 = 1$ ellentmondást kapjuk.

1.11. Számosságok

1.91. Definíció. Legyen A és B halmaz.

- Az A és B ***ekvipotens***, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz ***kisebb-egyenlő számosságú*** a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : \ |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz ***kisebb számosságú*** a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz ***számosság tekintetében összehasonlítható***, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

1.92. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

Bizonyítás. Legyen A, B halmaz és

$$\mathcal{F} \triangleq \{f \subseteq A \times B |\ f \text{ injektív függvény}\},$$

melyen $\leq$ jelöli a tartalmazás relációt. Először megmutatjuk, hogy létezik maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban. Legyen $H \subseteq \mathcal{F}$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható és legyen $f \triangleq \bigcup_{h \in H} h$. Ekkor f injektív, tehát $f \in \mathcal{F}$ és f a H egy felső korlátja. Tehát $(\mathcal{F}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz. Ezért a Zorn-lemma miatt van maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban, jelölje ezt g.
Ekkor a g függvényre $\operatorname{Dom} g = A$ vagy $\operatorname{Ran} g = B$ teljesül, ugyanis ha $\operatorname{Dom} g \neq A$ és $\operatorname{Ran} g \neq B$, akkor létezik $a_0 \in A \setminus \operatorname{Dom} g$ és $b_0 \in B \setminus \operatorname{Ran} g$ elem és a

$$\tilde{g} : \operatorname{Dom} g \cup \{a_0\} \to \operatorname{Ran} g \cup \{b_0\} \qquad x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{ha} \quad x \in \operatorname{Dom} g; \\ b_0, & \text{ha} \quad x = a_0 \end{cases}$$

függvényre $g < \tilde{g}$ teljesül, vagyis g nem maximális.
Ha $\operatorname{Dom} g = A$, akkor $|A| \leq |B|$ és ha $\operatorname{Ran} g = B$, akkor $|B| \leq |A|$.

1.93. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $i : A \to B$ és $j : B \to A$ injektív leképezés.
1. Ha $E \subseteq A$ olyan, hogy $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül, akkor a

$$\rho : A \to B \quad x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{ha} \quad x \in E \\ j^{-1}(x) & \text{ha} \quad x \notin E \end{cases}$$

leképezésről könnyen ellenőrizhető, hogy bijekció.
2. Legyen $\mathcal{H} \triangleq \{H \subseteq A |\ j(B \setminus i(H)) \subseteq A \setminus H\}$ és $E \triangleq \cup\mathcal{H}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül.
2./1. $j(B \setminus i(E)) \subseteq A \setminus E$:

$$i(E) = i\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H)$$

$$B \setminus i(E) = B \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H)$$

$$j(B \setminus i(E)) = j\left(\bigcap_{H\in\mathcal{H}} B \setminus i(H)\right) \subseteq \bigcap_{H\in\mathcal{H}} A \setminus H = A \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H = A \setminus E$$

2./2. $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$: Legyen $F \triangleq A \setminus j(B \setminus i(E))$. A 2./1. miatt $E \subseteq F$.

$$E \subseteq F \implies j(B \setminus i(F)) \subseteq j(B \setminus i(E)) = A \setminus F \implies F \in \mathcal{H}$$

Mivel $E \subseteq F$, $F \in \mathcal{H}$ és $E = \cup\mathcal{H}$, ezért $E = F$, vagyis $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$.

1.94. Tétel. *Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1.34 Cantor-tétel következménye.

1.95. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.
- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.96. Tétel. *Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.*
1. *Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.*
2. *$|A \times B| = mn$*
3. *Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.*
4. *$|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$*
5. *$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$*
6. *$|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$*

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és legyen A, B olyan véges halmaz, hogy létezzen $\alpha : A \to n$ és $\beta : B \to m$ bijekció.
1. Az $|A| = n$, $X \subseteq A$, $|A| > n$ feltételezés rögtön ellentmodásra vezet.
2. Egyszerűen igazolható, hogy a

$$\varphi : A \times B \to nm \qquad (a, b) \mapsto \alpha(a)m + \beta(b)$$

leképezés bijekció.
3. A

$$\varphi : A \cup B \to n + m \qquad x \mapsto \begin{cases} \alpha(x), & \text{ha } \; x \in A; \\ n + \beta(x), & \text{ha } \; x \in B \end{cases}$$

leképezésről igazolható, hogy bijekció.
4. Mivel $A \cap B \subseteq A$, ezért az első pont alapján $|A \cap B| = k \leq n$. Legyen $\gamma : A \cap B \to k$ bijekció. Mivel az $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazok diszjunktak ezért az előző pont alapján $|(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = k + |A \setminus B| = n$, amiből $|A \setminus B| = n - k$ következik. Legyen $\delta : A \setminus B \to n - k$ bijekció. A

$$\varphi : A \cup B \to n + m - k \qquad x \mapsto \begin{cases} \beta(x), & \text{ha } \; x \in B; \\ m + \delta(x), & \text{ha } \; x \notin B \end{cases}$$

leképezésről rövid számolással igazolható, hogy bijekció.
5. Az $n = 0$ esetben az $A = \emptyset$ teljesül, vagyis $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} = 1 = 2^0$, tehát létezik egy természetes $\mathcal{P}(A) \to 2^0$ bijekció. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz az állítás. Legyen A' olyan halmaz, melyre létezik $\alpha' : A' \to n + 1$ bijekció. Ha bevezetjük az $A = \left\{(\alpha')^{-1}(k) | k \in n\right\}$ halmazt és az $\alpha = \alpha'|_A$ függvényt, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha : A \to n$ bijekció. Ekkor létezik $\varphi : \mathcal{P}(A) \to 2^n$ bijekció. Megmutatjuk, hogy a $C = A' \setminus A$ halmaz egyetlen elemet tartalmaz. Ugyanis ha $a, b \in C$,

akkor az $\alpha'(a) = n$ és $\alpha'(b) = n$ egyenletekből az α' injektivitása miatt $a = b$ adódik. Jelölje tehát u a C halmaz egyetlen elemét. Ekkor rövid számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\varphi' : \mathcal{P}(A') \to 2^n \qquad X \mapsto \begin{cases} \varphi(X), & \text{ha} \quad u \notin X; \\ 2^{n+1} + \varphi(X \setminus \{u\}), & \text{ha} \quad u \in X \end{cases}$$

leképezés bijekció.

6. Az $n = 0$ esetben az $A = \emptyset$ teljesül, vagyis egyetlen $A \to B$ függvény létezik, nevezetesen az, amelyik az értelmezési tartománya az üres halmaz, ezért $\mathcal{F}(A, B) = \{\emptyset\} = 1 = m^0$, tehát létezik egy természetes $\mathcal{F}(A, B) \to m^0$ bijekció. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz az állítás. Legyen A' olyan halmaz, melyre létezik $\alpha' : A' \to n+1$ bijekció. Ha bevezetjük az $A = \big\{(\alpha')^{-1}(k) | k \in n\big\}$ halmazt és az $\alpha = \alpha'|_A$ függvényt, akkor azt kapjuk, hogy $\alpha : A \to n$ bijekció. Ekkor létezik $\varphi : \mathcal{F}(A, B) \to m^n$ bijekció. Az előbbi pont bizonyítása alapján a $C = A' \setminus A$ halmaz egyetlen elemet tartalmaz. Jelölje tehát u a C halmaz egyetlen elemét. Ekkor rövid számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\varphi' : \mathcal{F}(A', B) \to m^{n+1} \qquad f \mapsto \varphi(f|_A) \cdot m + f(u)$$

leképezés bijekció.

1.97. Tétel. *(Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)*

1. *Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.*
3. *Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.*
4. *Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.*
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. *Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.*

Bizonyítás.

1. Legyen A végtelen halmaz. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének (1.66 állítás) segítségével konstruálhatunk olyan $a : \mathbb{N} \to A$ függvényt, mely injektív, és ekkor $\operatorname{Ran} a$ az A halmaz megszámlálható részhalmaza. Legyen ugyanis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén F_n az $n \to A$ injektív függvények halmaza. Erről az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerről megmutatható, hogy teljesíti a

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

feltételt, vagyis ha $x \in A$ tetszőleges elem, akkor a

$$a' : 1 \to A \qquad 0 \mapsto x$$

függvényre $a' \in F_1$ teljesül és létezik hozzá olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, hogy $a|_1 = a'$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a|_n \in F_n$. Ezen utóbbi tulajdonságból következik a injektivitása.
2. Ha az A halmaz végtelen, akkor az első pont alapján létezik megszámlálhatóan végtelen $E \subseteq A$ részhalmaza, vagyis $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
Ha az A halmazra $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül, akkor indirekt módon tegyük fel, hogy $|A| = |n|$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Ebből az $|\mathbb{N}| \leq |n|$ ellentmondás adódik.
3. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$C_n \triangleq \left\{k \in \mathbb{N}^+ | \ \frac{n(n-1)}{2} < k \leq \frac{n(n+1)}{2}\right\}.$$

Ekkor $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ páronként diszjunkt halmazrendszer és $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} C_n = \mathbb{N}^+$. Továbbá a

$$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \quad k \mapsto \left(k - \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} - k + 1\right), \quad \text{ahol } k \in C_n$$

leképezés bijekció.

4. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n megszámlálható és $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ injektív függvény. Mivel
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \to \bigcup_{n\in N} A_n \quad (n,a) \mapsto a$$
szürjekció, ezért $\left|\bigcup_{n\in N} A_n\right| \le \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times A_n)\right|$. Mivel
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times A_n) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (n,a) \mapsto (n, f_n(a))$$
injekció, ezért $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times A_n)\right| \le |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
5. Az előző pontok alapján nyilvánvaló.
6. Legyen C az A megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Ekkor létezik $\varphi : C\cup B \to C$ bijekció, ezért a
$$A \cup B \to A \qquad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \in A \setminus C; \\ \varphi(x), & \text{ha} \quad x \in C \cup B \end{cases}$$
függvény is bijekció.

1.98. Tétel. *Legyen A, B olyan halmaz, melyre $|A|, |B| \ge 2$ teljesül. Ekkor*
$$|A \cup B| \le |A \times B|.$$

Bizonyítás. Legyen A, B olyan halmaz, melyre $|A|, |B| \ge 2$ teljesül. Tegyük fel, hogy A és B diszjunkt halmazok, valamint legyen $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ olyan elemek, melyekre $a_1 \ne a_2$ és $b_1 \ne b_2$ teljesül. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor a
$$\varphi : A \cup B \to A \times B \qquad \begin{cases} (x, b_1), & \text{ha} \quad x \in A; \\ (a_1, x), & \text{ha} \quad x \in B \ \wedge \ x \ne b_1; \\ (a_2, b_2), & \text{ha} \quad x \in B \ \wedge \ x = b_1 \end{cases}$$
leképezés injektív, vagyis $|A \cup B| \le |A \times B|$.

1.99. Tétel. *(Számosságaritmetika alaptétele.) Minden végtelen A halmazra $|A| = |A \times A|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $D \subseteq A$ megszámlálható halmaz és legyen
$$H \triangleq \{f : A \twoheadrightarrow A \times A \mid D \subseteq \operatorname{Dom} f,\ \operatorname{Ran} f = \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f,\ f \text{ bijekció}\}.$$
Jelölje $\le$ a $\subseteq$ relációt a H halmazon. Ekkor $(H, \le)$ nem üres rendezett halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy létezik maximális elem a H halmazban. Legyen $S \subseteq H$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható, és legyen $f \triangleq \bigcup_{h\in S} h$. Ekkor $D \subseteq \operatorname{Dom} f$ és f injektív.
1./1. $\operatorname{Ran} f \subseteq \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$:
$$\operatorname{Ran} f = \bigcup_{h\in S} \operatorname{Ran} h = \bigcup_{h\in S} (\operatorname{Dom} h \times \operatorname{Dom} h) \subseteq \left(\bigcup_{h\in S} \operatorname{Dom} h, \bigcup_{h\in S} \operatorname{Dom} h\right) = \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$$
1./2. $\operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Ran} f$: Legyen $(x, y) \in \operatorname{Dom} f \times \operatorname{Dom} f$, ekkor létezik $h_1, h_2 \in S$, hogy $x \in \operatorname{Dom} h_1$ és $y \in \operatorname{Dom} h_2$. Mivel $h_1 \le h_2$ vagy $h_2 \le h_1$, feltehetjük, hogy $h_1 \le h_2$. Ezért $x, y \in \operatorname{Dom} h_2$, vagyis $(x, y) \in \operatorname{Dom} h_2 \times \operatorname{Dom} h_2 = \operatorname{Ran} h_2 \subseteq \operatorname{Ran} f$.
1./3. Ezért $f \in H$ és f felső korlátja az S halmaznak. Vagyis H induktívan rendezett halmaz így a Kuratowski–Zorn-lemma miatt létezik maximális eleme a H halmaznak.
2. Legyen g a H halmaz maximális eleme és legyen $E \triangleq \operatorname{Dom} g$. Ha $|E| = |A|$, akkor kész a bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $|E| < |A|$, akkor létezik olyan $E' \subseteq A \setminus E$ halmaz melyre $|E'| = |E|$ teljesül.

Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen E' halmaz. Ez csak úgy lehet, ha $|A \setminus E| < |E|$, ekkor viszont az

$$|A| = |(A \setminus E) \cup E| \leq |(A \setminus E) \times E| \leq |E \times E| = |E| < |A|$$

ellentmondás adódik, ahol felhasználtuk az előző 1.98 állítást.
Legyen $E' \subseteq A \setminus E$ olyan halmaz melyre $|E'| = |E|$ teljesül, valamint legyen $F = E \cup E'$. Ekkor $|E| = |(E \times E') \cup (E' \times E) \cup (E' \times E')|$, vagyis létezik olyan $\tilde{g} : F \times F \to F$ bijekció, mely valódi kiterjesztése az g függvénynek, vagyis g nem maximális elem, ami ellentmondás.

1.100. Tétel. *(Kontinuum számosság.)*

1. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $|]a, b[| = |\mathbb{R}|$.*
2. *$|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$*

Bizonyítás.
1. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor a

$$\varphi :]a, b[\to]-1, 1[\qquad x \mapsto 2\frac{x-a}{b-a} - 1$$

függvény bijekció, továbbá a

$$\psi :]-1, 1[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1, & \text{ha} \quad x > 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \\ \dfrac{1}{x} + 1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

függvény is bijekció. Vagyis kompozíciójuk egy bijekciót ad meg a $]a, b[$ és a $\mathbb{R}$ halmazok között.
2. Mivel mint halmaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ezért a számosságaritmetika alaptétele miatt $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

Jelölés. A kontinuum hipotézist CH-val jelöljük, az angol *continuum hypothesis* kifejezés után. Ez az axióma fontos szerepet játszik az analízisben, ezért elfogadjuk axiómaként.

Jelölés. Az általánosított kontinuum hipotézist általában a GCH szimbólummal jelölik, az angol *generalized continuum hypothesis* kifejezés után. Ez az axióma fontos szerepet játszik az analízisben, különösen a mértékelméletben, ezért elfogadjuk axiómaként.

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$ teljesül, akkor*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, és legyen $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, \infty[$ olyan, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$. Ekkor az indukciós feltételt kihasználva

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq (1+x_{n+1})\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $n+1$ esetén is igaz az állítás.

2.2. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{z \in \mathbb{R}^+ |\ z^n < x\}$. Először megmutatjuk, hogy a H halmaz nem üres. Az $n = 1$ esetben nyilván $\frac{x}{2} \in H$, továbbá, ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén a H halmaz nem üres, vagyis létezik valamilyen $z \in H$ eleme, akkor a $v = \min\{z, 1\}$ számra az

$$v^{n+1} \leq v \cdot z^n < 1 \cdot x$$

egyenlőtlenségből $v \in H$ adódik.
Most igazoljuk, hogy a H halmaz felülről korlátos. Ha $z \in E$, akkor $z^n < x$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$z^n = (1 + (z-1))^n \geq 1 + n(z-1),$$

vagyis

$$1 + n(z-1) < x \quad \Rightarrow \quad z < \frac{x-1}{n} + 1.$$

Legyen $y = \sup H$, amire az eddigiek alapján $y \in \mathbb{R}^+$ teljesül. Oly módon mutatjuk meg, hogy $y^n \leq x$ teljesül, hogy igazoljuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra fennáll az $y^n - x < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ehhez legyen $\varepsilon_1 \in]0, y[$ tetszőleges szám. Ekkor $y' = y - \varepsilon_1$ kisebb mint a H halmaz szuprémuma, ezért létezik olyan $z \in H$, melyre $y' < z$ teljesül. A következő lépésben felhasználjuk a teljes indukcióval könnyen igazolható

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ :\ \alpha < \beta \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \alpha^n < \beta^n$$

egyenlőtlenséget és a Bernoulli-egyenlőtlenséget.

$$x > z^n > (y')^n = (y - \varepsilon_1)^n = y^n\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{y}\right) \geq y^n\left(1 - n\frac{\varepsilon_1}{y}\right) = y^n - ny^{n-1}\varepsilon_1$$

Ebből az $x > y^n - ny^{n-1}\varepsilon_1$ egyenlőtlenséget tovább alakítva

$$y^n - x < ny^{n-1}\varepsilon_1$$

következik. Vagyis ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $0 < \varepsilon_1 < \min\left\{y, \frac{\varepsilon}{ny^{n-1}}\right\}$, akkor az előző egyenlőtlenségből

$$y^n - x < \varepsilon$$

következik.
Az előzőhöz hasonlóan úgy mutatjuk meg, hogy $x \le y^n$ teljesül, hogy igazoljuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra fennáll az $x - y^n \le \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ehhez legyen $\varepsilon_1 \in \,]0, y[$ tetszőleges szám. Ekkor $y' = y + \varepsilon_1$ nagyobb mint a H halmaz szuprémuma, ezért minden $z \in H$ esetén $z < y'$ teljesül. A következő lépésben felhasználjuk a teljes indukcióval könnyen igazolható

$$\forall \alpha \in [0, 1] : \forall n \in \mathbb{N}^+ : (1 + \alpha)^n \le 1 + (2^n - 1)\alpha$$

egyenlőtlenséget.

$$x \le (y')^n = (y + \varepsilon_1)^n = y^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{y}\right) \le y^n \left(1 + (2^n - 1)\frac{\varepsilon_1}{y}\right) = y^n + (2^n - 1)y^{n-1}\varepsilon_1$$

Ebből az $x \le y^n + (2^n - 1)y^{n-1}\varepsilon_1$ egyenlőtlenséget tovább alakítva

$$x - y^n < (2^n - 1)y^{n-1}\varepsilon_1$$

következik. Vagyis ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $0 < \varepsilon_1 < \min\left\{y, \dfrac{\varepsilon}{(2^n - 1)y^{n-1}}\right\}$, akkor az előző egyenlőtlenségből

$$x - y^n \le \varepsilon$$

következik.
Végül az unicitást igazoljuk. Ha $0 < y_1 < y_2$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $y_1^n < y_2^n$, vagyis nem létezhet két különböző pozitív valós szám, melyek n-edik hatványa megegyezik.

2.3. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x *n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.4. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Bizonyítás. Az $\alpha = \sqrt[n]{x^m}$ és a $\beta = (\sqrt[n]{x})^m$ számokra $\alpha^n = x^m = \beta^n$ teljesül. Ezen számok n-edik gyöke létezik és egyértelmű, ezért $\alpha = \beta$.

2.5. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ *számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjő hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha} \quad q > 0,\ q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha} \quad q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha} \quad q < 0,\ q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$ és $0^0 \triangleq 1$.

2.6. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.*

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságaiból egyszerűen adódik.

2.7. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \prod_{i=1}^{n} i, & \text{ha} \quad n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az *n alatt a k* számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \le n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.8. Tétel. *(Binomiális tétel.) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

adódik a könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

formula segítségével.

2.9. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K : \; (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K : \; |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K : \; |x + y| \leq |x| + |y|$

2.10. Tétel. *Legyen $(K, +, \cdot)$ test. Ekkor*

$$|\cdot|_\infty : K \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq 0, \\ 0 & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

abszolút érték.

Bizonyítás. Az abszolútérték definíciója alapján nyilvánvaló.

2.11. Definíció. A fent definiált $|\cdot|_\infty$ függvényt *improprius abszolút értéknek* nevezzük a $(K, +, \cdot)$ test felett.

2.12. Tétel. *Az*

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \quad z \mapsto \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

Bizonyítás. Ha $z = 0$, akkor nyilván $|z| = 0$, valamint ha $|z| = 0$, akkor $\mathrm{Re}\, z = 0$ és $\mathrm{Im}\, z = 0$, vagyis $z = 0$. Ha $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ és $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, akkor

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

valamint

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

teljesül, ahol a második résznél használtuk a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget a

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

lépésnél.

Jelölés. A továbbiakban minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $|z|$ a z szám fenti abszolút értékét fogja jelenteni.

2.13. Tétel. *(Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $k \in \{1,\dots,n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás.
2. Ha $n = 2$, akkor a bizonyítandó

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel. Azt pedig az 1.80 tétel alapján tudjuk, hogy rendezett testekben a négyzetszámok pozitív elemek.
3. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, akkor a $2n$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1,\dots,2n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor felhasználva, hogy az n és a 2 számokra igaz az egyenlőtlenség

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{n+k}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}}\right) \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}}} = \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^{2n} x_k}$$

adódik.
4. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ számra igaz az állítás, akkor az $n-1$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1,\dots,n-1\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$ és legyen

$$x_n = \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k}.$$

Ekkor az $x_1,\dots,x_n$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség átrendezéséből adódik az állítás.

Jelölés. A továbbiakban $\mathbb{K}$ a valós, illetve a komplex számtestet jelöli, valamint bevezetjük még a

$$\mathbb{T} \triangleq \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$$

jelölést.

2.2. Függvények összege, szorzata

2.14. Definíció. Legyen A halmaz, $+ : A \times A \to A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$U + V := \{u + v \in A|\ u \in U,\ v \in V\}$$
$$a + V := \{a + v \in A|\ v \in V\}$$
$$U + a := \{u + a \in A|\ u \in U\}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek.*

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \qquad (U, V) \mapsto U + V$$
$$\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \qquad V \mapsto a + V$$
$$\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \qquad U \mapsto U + a$$

2.15. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

– Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ és $c \in \mathbb{K}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét*, *szozatát*, *számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{aligned} f+g &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto f(a)+g(a) \\ fg &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto f(a)g(a) \\ cf &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto cf(a) \\ |f| &: A \to \mathbb{K} & a &\mapsto |f(a)| \end{aligned}$$

– értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{aligned} + &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g) &\mapsto f+g \\ \times &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f,g) &\mapsto fg \\ \cdot &: \mathbb{K} \times \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (c,f) &\mapsto cf \\ |\cdot| &: \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{K}) & (f) &\mapsto |f| \end{aligned}$$

Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek*.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{aligned} \sup(f_1,\ldots,f_n) &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \sup(f_1(a),\ldots,f_n(a)) \\ \inf(f_1,\ldots,f_n) &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \inf(f_1(a),\ldots,f_n(a)) \end{aligned}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$\begin{aligned} f_+ &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto \sup(f(a),0) \\ f_- &: A \to \mathbb{R} & a &\mapsto -\inf(f(a),0) \end{aligned}$$

2.16. Tétel. *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.*

1. *Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_- \qquad f_+f_- = 0 \tag{2.1}$$

teljesül.

2. *Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.
1. Legyen $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és legyen $a \in A$ tetszőleges.
Ha $f(a) > 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = f(a)$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) = 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.
Ha $f(a) < 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = -f(a)$, vagyis ebben az esetben is teljesülnek a (2.1) egyenletek.
2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $a < b$, $a = b$ és $a > b$ eseteket külön megvizsgálva igazolható egyszerűen a

$$\sup(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \qquad \inf(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

azonosság. Legyen $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor elég minden $x \in A$ elemre az $a = f(x)$ és a $b = g(x)$ választással alkalmazni az előző azonosságot a tétel bizonyításához.

2.17. Tétel. *Ha A tetszőleges nem üres halmaz, akkor az $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ hármas vektortér $\mathbb{K}$ felett, valamint $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*

Bizonyítás. Elemi számolással egyszerűen ellenőrizhető.

2.18. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója* a_n. Az $x_0 \in \mathbb{K}$ számot a p *polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

2.19. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok halmazát. Ekkor $\mathcal{P}_n$ vektortér a pontonkénti függvényműveletekkel. Továbbá a $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ polinomhalmaz algebra a pontonkénti függvényműveletekkel.*

Bizonyítás. Elemi számolással egyszerűen ellenőrizhető.

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{K}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K} | \ |x - y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz
- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{K} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció közvetlen következménye. A második állításhoz vegyünk $A_1, \ldots, A_n$ korlátos halmazokat, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $R_i = r_i + |x_i - x_1|$. Ekkor minden i számára $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

3.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{K}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - |x - y|$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $|z - y| < R = r - |x - y|$, vagyis $|x - y| + |y - z| < r$, amiből pedig $|x - z| < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

3.5. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*
1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \ldots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1, \ldots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

3.6. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*
1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén $\mathbb{K}\setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{K}\setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{K}\setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.
3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén $\mathbb{K}\setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{K}\setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{K}\setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcap\limits_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap\limits_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

3.7. Tétel. *Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{K}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z\setminus U$ zárt halmaz és $U\setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z\setminus U = Z\cap(\mathbb{K}\setminus U)$$

azonosság alapján az $Z\setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U\setminus Z = U\cap(\mathbb{K}\setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U\setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

3.8. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x)\cap X \neq \emptyset\ \wedge\ B_r(x)\cap(\mathbb{K}\setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ :\ (B_r(x)\setminus\{x\})\cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x)\cap X = \{x\}$.

3.9. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.10. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K} \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K} \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x)\cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X}\setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

3.11. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*

2. *$\operatorname{Int} X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. *$\overline{X}$ halmaz zárt;*
4. *$\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{K} \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - |y - z| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

3.12. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

3.13. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{K}$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$.
Legyen $X \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

3.14. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.*
1. *Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.*
2. *Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.*

Bizonyítás. 1. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt halmaz. Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf X + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x \in X$, melyre $x < \inf X + r$ teljesül, valamint $\sup X - r$ nem a legkisebb felső korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x' \in X$, melyre $\sup X - r < x'$ teljesül. Tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(\inf X) \cap X \neq \emptyset$ és $B_r(\sup X) \cap X \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\inf X, \sup X \in \overline{X} = X$.
2. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmaz. Ha $\inf X \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(\inf X) \subseteq X$ teljesül, vagyis $\inf X$ nem alsó korlátja az X halmaznak. A $\sup X$ számra hasonló ellentmondást kapunk a $\sup X \in X$ feltételezésből.

3.15. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X *halmaz sűrű az* Y *halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X *halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{K}$ halmazban.

3.16. Tétel. *(A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)*

1. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*
2. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ tartalmazáshoz azt kell megmutatni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám melyre $q \in B_r(x)$ teljesül, vagyis $q \in \,]x-r, x+r[$. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < 2Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + N(x-r) < N(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq N(x-r) < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq N(x-r)$ miatt

$$n+1 \leq N(x-r)+1 < N(x-r)+2Nr = N(x+r),$$

ezért

$$N(x-r) < n+1 < N(x+r),$$

vagyis a $q_x = \dfrac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$ számra $q_x \in B_r(x)$ teljesül.
2. Ebben a részben használjuk az oszthatósági szabályok segítségével könnyen igazolható $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ formulát. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < \sqrt{2}Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + \frac{\sqrt{2}N}{2}(x-r) < \frac{\sqrt{2}N}{2}(x+r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n+1$ teljesül. Ekkor $n \leq \dfrac{\sqrt{2}N(x-r)}{2}$ miatt

$$n+1 \leq \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} + \sqrt{2}Nr = \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

ezért

$$\frac{\sqrt{2}N(x-r)}{2} < n+1 < \frac{\sqrt{2}N(x+r)}{2},$$

vagyis a $p_x = \dfrac{2(n+1)}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{n+1}{N}$ számra $p_x \notin \mathbb{Q}$ és $p_x \in B_r(x)$ teljesül.

3.17. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{R}$ sűrű részhalmaza a valós számok halmazának. Ekkor az $S + \mathrm{i}S$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.*

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $q_1, q_2 \in S$, melyre $|(\operatorname{Re} z) - q_1| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ és $|(\operatorname{Im} z) - q_2| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ teljesül. Ekkor a $q = q_1 + \mathrm{i}q_2 \in S + \mathrm{i}S$ számra

$$|z-q| = \sqrt{\left((\operatorname{Re} z) - q_1\right)^2 + \left((\operatorname{Im} z) - q_2\right)^2} < \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = r$$

teljesül.

3.18. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $k \in I$, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ teljesül, tehát

$$\inf(A_j) \leq \inf(A_k) \leq \sup(A_k) \leq \sup(A_i).$$

Ezek alapján a $\{\sup(A_i) |\ i \in I\}$ halmaz alulról korlátos, vagyis létezik a $x = \inf \{\sup(A_i) |\ i \in I\} \in \mathbb{R}$ elem. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i}$.
Legyen $i \in I$ és $r \in \mathbb{R}^+$, belátjuk, hogy $B_r(x) \cap A_i \neq \emptyset$. Mivel $x + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja a $\{\sup A_i |\ i \in I\}$ halmaznak, ezért létezik olyan $j \in I$, melyre $\sup A_j < x + r$. Legyen $k \in I$ olyan, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor nyilván $\sup A_k \leq \sup A_j < x+r$, továbbá $\sup A_k - r$ nem a legkisebb felső korlátja az A_k halmaznak, ezért létezik olyan $y \in A_k$, melyre $\sup A_k - r < y$. Az utolsó egyenlőtlenség miatt $x - r < y$, $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$ miatt $y < x + r$, valamint $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ miatt $y \in A_i$. Vagyis $y \in B_r(x) \cap A_i$.

3.19. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az állítás az előzőek közvetlen következménye.

3.2. Kompakt halmazok

3.20. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *(be)fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{K}$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i\in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül.

3.21. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

3.22. Tétel. *(Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy C korlátos. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(0)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(0)$. Ekkor az $r = \max_{n\in I}(n)$ számra $C \subseteq B_r(0)$ teljesül. Most igazoljuk, hogy C zárt. Tegyük fel, hogy C nem zárt, ami azt jelenti, hogy a C komplementere nem nyílt. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus C$ olyan pont, melyre minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(z) \nsubseteq \mathbb{R} \setminus C$, vagyis $B_r(z) \cap C \neq \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra legyen $U_n = \mathbb{R} \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(z)}$, mely nyílt halmaz. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} U_n$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy

$C \subseteq \bigcup\limits_{n\in I} U_n$. Ekkor az $m = \max\limits_{n\in I}(n)$ számra $C \subseteq U_m$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{B_{\frac{1}{m}}(z)} \cap C = \emptyset$, vagyis ha $0 < r < \frac{1}{m}$, akkor $B_r(z) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{m}}(z)}$, tehát $B_r(z) \cap C = \emptyset$, ami pedig ellentmondás.
Most tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint az $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer a C halmaz nyílt fedése, vagyis minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $C \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ teljesül. Jelölje J az I halmaz nem üres, véges részhalmazainak a halmazát, vagyis $J = \{j \subseteq I |\ j \neq \emptyset,\ j \text{ véges}\}$, valamint minden $j \in J$ esetén legyen $B_j = C \setminus \bigcup\limits_{i\in j} A_i$. Ekkor minden $j \in J$ esetén B_j korlátos zárt halmaz, valamint minden $j_1, j_2 \in J$ elemhez létezik olyan $j' \in J$, melyre $B_{j'} \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$ teljesül. Ha egyik B_j halmaz sem lenne üres, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\emptyset \neq \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{j\in J} \left(C \setminus \bigcup_{i\in j} A_i \right) = C \setminus \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in j} A_i = C \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$$

teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy az $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszer a C halmaz fedése. Tehát létezik olyan $j \in J$, melyre $B_j = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq \bigcup\limits_{i\in j} A_i$, vagyis a C halmaznak létezik véges fedése.

4. Sorozatok

4.1. A határérték és tulajdonágai

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

– Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{K}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to \varepsilon < a_n).$$

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to -\varepsilon > a_n).$$

– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
– Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{K}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \frac{|x-y|}{2}$ és $|a_n - y| < \frac{|x-y|}{2}$. Amiből az

$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y|$$

ellentmondás adódik.
Ha $x \in \mathbb{K}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{K}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

4.4. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
– Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
– Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.5. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} \circ a$ és az $\operatorname{Im} \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens és ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n).$$

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathbb{C}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ konvergens sorozat határértéke és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. A $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ és $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ egyenlőtelnségek miatt ez azt jelenti, hogy minden $n > N$ számra $|\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re} A| < \varepsilon$ és $|\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im} A| < \varepsilon$ teljesül.

Visszafele úgy bizonyítunk, hogy képezzük az $\alpha = \lim(\operatorname{Re} \circ a)$ és $\beta = \lim(\operatorname{Im} \circ a)$ határértékekből az $A = \alpha + \mathrm{i}\beta$ számot és megmutatjuk, hogy $\lim a = A$ teljesül. Bármely tetszőlegesen választott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N_1$ esetén $|\operatorname{Re} a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ és $n > N_2$ esetén $|\operatorname{Im} a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Ekkor minden $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ természetes számra

$$|a_n - A| = \sqrt{|\operatorname{Re} a_n - \alpha|^2 + |\operatorname{Im} a_n - \beta|^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

4.6. Definíció.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

4.7. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és legyen $A = \lim a$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

4.8. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n > N$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

4.9. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton növő korlátos sorozat és legyen $A = \sup \operatorname{Ran} a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növő, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \operatorname{Ran} a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

4.10. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos sorozat, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ zérussorozat és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ekkor minden $n > N$ számra

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot |b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.11. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $\lambda \in \mathbb{K}$.*
1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.*
3. *Az ab sorozat konvergens és $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.*
4. *Az $\overline{a}$ sorozat konvergens és $\lim \overline{a} = \overline{\lim a}$.*
5. *Az $|a|$ sorozat konvergens és $\lim |a| = |\lim a|$.*
6. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{a}$ sorozat konvergens és $\lim \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\lim a}$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, az $A = \lim a$ és $B = \lim b$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

és minden $n > N_b$ számra $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $\lambda = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $n > N_a$ számra

$$|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

3. Mivel az a sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Ha $B = 0$, akkor az előző állítás szerint egy korlátos és egy zérussorozat szorzata zérussorozat. Tehát elég a $B \neq 0$ esetet vizsgálni. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ és legyen $N_b \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_b$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$\left|\overline{a_n} - \overline{A}\right| = \left|\overline{(a_n - A)}\right| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

5. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

6. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ és legyen $\lim a = A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Ekkor minden $n > N_1$ számra $|a_n| > \frac{|A|}{2}$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon |A|^2}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_1, N_a\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{|a_n - A|}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} < \frac{2}{|A|^2} \cdot \frac{\varepsilon |A|^2}{2} = \varepsilon.$$

4.12. Tétel. *A konvergens valós- illetve komplex számsorozatok algebrát alkotnak.*

Bizonyítás. A konvergens sorozatok halmaza zárt az összeadás, a szorzás és a számmal való szorzás műveletére az előző tétel alapján, valamint a sorozatok összeadása és szorzása teljesíti az algebránál megkövetelt tulajdonságokat.

4.13. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatra $\lim |a| = 0$ teljesül, akkor $\lim a = 0$*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\lim |a| = 0$ tulajdonság miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$|a| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a $\lim a = 0$ tulajdonságot fejezi ki.

4.14. Tétel. *Ha az $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozatra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a \leq \lim b$.*

Bizonyítás. Legyen $A = \lim a$, $B = \lim b$ és tegyük fel, hogy $B < A$. Az $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|b_n - B| < \varepsilon$. Vagyis $n > N$ esetén az $A - \varepsilon < a_n$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{A+B}{2} < a_n$, és a $b_n < B + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $b_n < \dfrac{A+B}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $a_n \leq b_n$.

4.15. Tétel. *(Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens és $\lim b = x$.*

Bizonyítás. Bevezetve az $\alpha = b - a$ és a $\beta = c - a$ sorozatok, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ teljesül. A $\lim \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha_n| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim \alpha = 0$. Ekkor a $b = \alpha + a$ sorozat is konvergens és $\lim b = \lim \alpha + \lim a = x$.

4.16. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$a^p : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 2\,|A|$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\begin{aligned} |A^p - a_n^p| &= |A - a_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{p-1} A^k a_n^{p-1-k} \right| \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, |a_n|^{p-1-k} < \\ &< |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k \, (2\,|A|)^{p-1-k} \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^{p-1} \, 2^{p-1} \leq \\ &\leq |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}. \end{aligned}$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|A^p - a_n^p| < |A - a_n| \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1} < \frac{\varepsilon}{p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1}} \cdot p\,|A|^{p-1} \, 2^{p-1} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = A^p$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 1$ teljesül, valamint létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra $|a_n| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$|a_n|^p \leq |a_n| < \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = 0$.

4.17. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az*

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$.
Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $a_n > \dfrac{A}{2}$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| = \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} a_n^{\frac{p-1-k}{p}}} \leq \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{p-1-k}{p}}} <$$

$$< \frac{|A - a_n|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |A - a_n|\,.$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n}\right| < |A - a_n| \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2} \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{A}$.
Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n < \varepsilon^p$ teljesül. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = 0$.

4.18. Tétel. *(Sorozatok racionális hatványa.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az*

$$a^q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha} \quad \lim a > 0 \ \vee \ q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha} \quad \lim a = 0 \ \wedge \ q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat, $A = \lim a$ és $q \in \mathbb{Q}$. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.
Ha $q > 0$, akkor létezik olyan $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, melyre $q = \dfrac{p_1}{p_2}$. Ekkor a 4.18 és a 4.17 tételből következik az állítás.
Ha $q < 0$, akkor a 4.11 tétel segítségével visszavezethető a $q > 0$ esetre az állítás.

4.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal

4.19. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.39 tétel alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset,$$

legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A\setminus\{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n - x| < \dfrac{1}{n+1}$.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - x| < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{K} \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{K} \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárás definíciója alapján ekkor α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

4.20. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a 3.19 Cantor-tétel feltételei, ezért $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x.

Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat, akkor a $\operatorname{Re} \circ a$ valós sorozathoz létezik olyan σ_1 indexsorozat, hogy $\operatorname{Re} \circ a \circ \sigma_1$ konvergens; és az $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1$ valós sorozathoz létezik olyan σ_2 indexsorozat, hogy $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ konvergens. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozatra az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens lesz.

4.21. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ korlátos és zárt halmaz, valamint legyen $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Mivel az a sorozat korlátos, ezért létezik a' konvergens részsorozata. Ekkor $\lim a' \in \overline{A}$, vagyis az A halmaz zártsága miatt $\lim a' \in A$.
Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{K}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül. Megmutatjuk, hogy az A halmaz korlátos és zárt.
Ha az A halmaz nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \setminus B_{n+1}(0) \neq \emptyset$, ezért az 1.39 tétel miatt $\prod_{n\in\mathbb{N}} (A \setminus B_{n+1}(0)) \neq \emptyset$. Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Ha a' ennek tetszőleges részsorozata, akkor $|a'_n| \geq n$, vagyis az a' sorozat nem korlátos, így konvergens sem lehet. Vagyis

ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata, tehát ellentmondásra jutottunk. Ha az A halmaz nem zárt, akkor létezik $x \in \overline{A} \setminus A$ elem. A lezárt definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A \neq \emptyset$, ezért az 1.39 tétel miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(A \cap B_{\frac{1}{n+1}}(x)\right) \neq \emptyset.$$

Ha $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A\right)$, akkor $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen a' az a tetszőleges részsorozata. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a'_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$, ezért $\lim a' = x \notin A$ teljesül. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata melynek a határértéke az A halmazban lenne, tehát ellentmondásra jutottunk.

4.3. Limesz inferior és szuperior

4.22. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \overset{\triangle}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right)$$

és *limesz szuperiorja*

$$\limsup a \overset{\triangle}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right).$$

4.23. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\limsup a < \liminf a$ és legyen $q \in \,]\limsup a, \liminf a[$. Ekkor a $\limsup$ és a $\liminf$ definíciója alapján léteznek olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_1} a_k < q < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n_2} a_k,$$

vagyis minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ számra az

$$a_n < q < a_n$$

ellentmondást kapjuk.

4.24. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat.*

1. *Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.*
2. *Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ és $\liminf a = \limsup a$, akkor az a sorozat konvergens és $\lim a = \liminf a$ teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

teljesül. Ezért

$$A - \varepsilon \leq \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N+1} a_k \right) \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N+1} a_k \right) \leq A + \varepsilon,$$

amiből pedig a 4.23 tétel felhasználásával

$$A - \varepsilon \leq \liminf a \leq \limsup a \leq A + \varepsilon$$

adódik. Ezek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a $\liminf a, \limsup a \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$, tehát

$$\liminf a = \limsup a = A.$$

2. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\liminf a = \limsup a \in \mathbb{R}$. Legyen $A = \liminf a$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel feltételezésünk szerint

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right) = A = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} a_k \right),$$

ezért

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} :\quad & A - \varepsilon < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_1} a_k \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} :\quad & A + \varepsilon > \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_2} a_k. \end{aligned}$$

Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra az

$$A - \varepsilon < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_1} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq N_2} a_k < A + \varepsilon$$

egyenlőtlenségek alapján $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ adódik.

4.4. Cauchy-sorozatok

4.25. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}((N < n \ \wedge \ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

4.26. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N$ számra $|a_n - a_m| < 1$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, így korlátos.

4.27. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat határértéke A és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $n, m > N$ esetén

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.28. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N_1$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_2$ esetén $\left|a_{\sigma(n)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ha $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|a_n - A| = \left|(a_n - a_{\sigma(n)}) + (a_{\sigma(n)} - A)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

4.29. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat, akkor a 4.26 tétel alapján az a sorozat korlátos és a 4.21 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, amiből a 4.28 előző állítás alapján a konvergenciája adódik.
Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat, akkor a 4.27 tétel alapján Cauchy-sorozat.

4.5. Nevezetes határértékek

4.30. Tétel. *Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & ha \quad \alpha > 0, \\ 1 & ha \quad \alpha = 0, \\ 0 & ha \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 0$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.85 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\alpha]{\varepsilon} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \le n^\alpha,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$.
Ha $\alpha = 0$, akkor nyilvánvalóan $\lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.
Ha $\alpha < 0$, akkor a $\beta = -\alpha$ számra $\beta > 0$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.85 miatt létezik olyan $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\beta]{\frac{1}{\varepsilon}} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\left|\frac{1}{n^\beta}\right| \le \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$.

4.31. Tétel. *Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & ha \quad q > 1, \\ 1 & ha \quad q = 1, \\ 0 & ha \quad -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \le -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $q > 1$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = q - 1 > 0$ mennyiséget. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.85 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\frac{\varepsilon - 1}{a} < N \cdot 1.$$

Ebből és a 2.1 Bernoulli-egyenlőtlenségből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \le 1 + na \le (1+a)^n = q^n,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
A $q = 1$ és a $q = 0$ esetekben nyilvánvalóan teljesül az állítás.
Legyen $q \in \,]-1, 1[\, \setminus \{0\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ mennyiséget. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|q^n| = \frac{1}{(1+a)^n} \le \frac{1}{1+na} \le \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n},$$

amiből a 4.15 rendőr-elv és a 4.30 tétel alapján adódik a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ határérték.
Legyen $q \le -1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|q^n - q^{n+1}\right| \ge 1$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

4.32. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|q| < 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*
2. *Ha $q = 1$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.*
3. *Ha $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat divergens.*

Bizonyítás. Legyen $|q| < 1$. Ekkor az előző 4.32 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Legyen $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|q^n - q^{n+1}\right| \geq |1-q|$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

4.33. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.*

Bizonyítás. Ha $q = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $q > 1$ és tekintsük az $a_n = \sqrt[n]{q} - 1$ sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > 0$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

amiből

$$0 \leq a_n \leq \frac{q-1}{n}$$

adódik. Ebből a rendőr-elv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, és így $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ következik.
Ha $q < 1$, akkor tekintsük a $q' = \dfrac{1}{q}$ számot. Ekkor az előző eredmény alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q'}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q'}} = 1$$

4.34. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot(1)^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}.$$

Ebből a 4.15 rendőr-elv alapján adódik a bizonyítandó állítás.

4.35. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Definiáljuk az $N_1 = 2([\varepsilon]+1)$ és az $\alpha = \dfrac{N_1!}{\varepsilon^{N_1}}$ számot. Ha $n > N_1$ természetes szám, akkor

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} = \alpha \cdot \prod_{k=1}^{n-N_1} \frac{k+N_1}{\varepsilon} > \alpha \cdot 2^{n-N_1} = \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n.$$

Mivel a 4.31 tétel miatt $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$2^n > \frac{2^{N_1}}{\alpha}$$

teljesül. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot \frac{2^{N_1}}{\alpha} = 1$$

teljesül, vagyis

$$\sqrt[n]{n!} > \varepsilon.$$

4.36. Tétel. *(Gyökkritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ teljesül (például a $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(q - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$ választással). Ekkor $0 \leq |a_n| \leq q^n$, amiből a rendőr-elv alapján következik a $\lim a = 0$ határérték.

4.37. Tétel. *(Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < q \cdot |a_N| .$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$0 < |a_{N+k}| < q^k \cdot |a_N| .$$

Amiből a $k \to \infty$ határérték képzéssel a rendőr-elv alapján $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{N+k}| = 0$ következik, ebből pedig $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$ adódik.

4.38. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $a_n = n^p q^n$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |q| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = |q| < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.18 tételt. A fenti egyenlőtlenségből pedig a sorozatokra vonatkozó 4.37 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$ következik.

4.39. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{K}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|}{n+1} = 0 < 1$$

adódik, amiből a sorozatokra vonatkozó 4.37 hányados-kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ következik.

4.40. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$.*

Bizonyítás. Az $\alpha < 0$ esetben a 4.31 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$ és a minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennálló

$$0 \leq \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségre alkalmazva a rendőr elvet $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}=0$ adódik, tehát ezen két sorozat szorzatára szintén $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n!}=0$ adódik.

Tehát elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Tekintsük az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $a_n=\dfrac{n^\alpha}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha=0\cdot 1=0<1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.18 tételt. A sorozatokra vonatkozó 4.37 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n!}=0$.

4.41. Tétel. *(Napier állandó.)*

1. *Minden $x\in\mathbb{R}^+$ esetén az*

$$a:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat korlátos, monoton növő, tehát konvergens.

2. *Minden $x\in\mathbb{R}^+$ esetén a*

$$b:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

konvergens.

3. *Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=1.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $x\in\mathbb{R}^+$ és minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $a_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. A $z_1=\cdots=z_n=1+\dfrac{x}{n}$, $z_{n+1}=1$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\le\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n+1+x}{n+1}=1+\frac{x}{n+1}$$

adódik, amiből hatványozással $a_n\le a_{n+1}$ következik.

Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét, tehát azt a jól meghatározott egész számot melyre $[x]\le x$ és $[x]+1>x$. Az $z_1=\cdots=z_n=1+\dfrac{x}{n}$, $z_{n+1}=\cdots=z_{n+[x]+1}=1-\dfrac{x}{[x]+1}$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned}\sqrt[n+[x]+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}&\le\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+([x]+1)\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)}{n+[x]+1}=\\&=\frac{n+x+[x]+1-x}{n+[x]+1}=1\end{aligned}$$

adódik, amiből hatványozással

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\le 1$$

következik. Ennek átrendezése adja a sorozat korlátosságát bizonyító

$$a_n\le\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{-[x]-1}$$

egyenlőtlenséget. Ezek alapján az a sorozat monoton növő és felülről korlátos, vagyis konvergens.

2. Legyen $x\in\mathbb{R}^+$ és minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $b_n=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$. Mivel $[x]\le x<[x]+1$, ezért $0<[x]+1-x\le 1$, vagyis minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x}{n+1}\le\frac{x}{n+[x]+1-x}<\frac{x}{n}.$$

Ebből
$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{-1}\leq\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{n}<\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$
adódik, tehát a rendőr elv alapján a
$$\mathbb{N}^{+}\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{n}$$
sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}.$$
Mivel
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{-[x]-1}=1,$$
ezért a
$$c:\mathbb{N}^{+}\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\left(1+\frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^{n+[x]+1}$$
sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}.$$
A minden $n\in\mathbb{N}^{+}\setminus\{x\}$ számra érvényes
$$b_n=\left(\frac{n-x}{n}\right)^{n}=\left(\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n}\right)^{-1}$$
átalakításból azt kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}^{+}$ számra $b_{n+[x]+1}=c_n^{-1}$. Mivel a c sorozat konvergens és $\lim c\neq 0$ (hiszen minden $n\in\mathbb{N}^{+}$ esetén $c_1\leq c_n$), ezért a b sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\left(\lim_{n\to\infty}c_n\right)^{-1}.\tag{4.1}$$

3. A (4.1) egyenlet jelenti a bizonyítandó egyenlőséget.

4.42. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

Bizonyítás. Tekintsük a $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $b_n=\dfrac{n!}{n^n}$ sorozatot. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}.$$
A 4.41 tételben definiált $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>1$ teljesül, hiszen a sorozat monoton növő és $a_1=2>1$. Ezért
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}<1$$
adódik. A sorozatokra vonatkozó 4.37 hányados-kritérium alapján ezért $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

4.43. Tétel. *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ olyan sorozat, melyre minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{m+n}\leq a_m a_n$ teljesül. Ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{a_n}.$$

Bizonyítás. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik egyetlen olyan $p(m,n), q(m,n) \in \mathbb{N}$, melyre

$$m = p(m,n)n + q(m,n)$$

és $q(m,n) < n$. A sorozatra vonatkozó feltételezés alapján minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_m = a_{p(m,n)n+q(m,n)} \leq a_{p(m,n)n} a_{q(m,n)} \leq (a_n)^{p(m,n)} a_{q(m,n)}$$

teljesül, amiből

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{a_m} &\leq (a_n)^{\frac{p(m,n)}{m}} \cdot \sqrt[m]{a_{q(m,n)}} = (a_n)^{\frac{1}{n} - \frac{q(m,n)}{mn}} \cdot \sqrt[m]{a_{q(m,n)}} = \\ &= \sqrt[n]{a_n} \cdot \left(\frac{a_{q(m,n)}}{a_n^{\frac{q(m,n)}{n}}} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \sqrt[n]{a_n} \cdot \left(\frac{\max\left\{a_i \mid i = 0, \ldots, n-1\right\}}{\min\left\{a_n^{\frac{i}{n}} \mid i = 0, \ldots, n-1\right\}} \right)^{\frac{1}{m}}\end{aligned}$$

következik. Mivel minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\alpha} = 1 = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\alpha},$$

ezért

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$.

5. Sorok

5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

5.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*
3. *A $\sum \overline{a}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Mivel az α és a β sorozat konvergens, ezért összegük, számszorosuk és konjugáltjuk is konvergens lesz. Továbbá a

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(c\alpha_n) = c \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{\alpha_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}$$

egyenlőségek teljesülnek.

5.3. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor* $\lim a = 0$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és legyen $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Ekkor az $n \to \alpha_n$ és az $n \to \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek, és határértékük megegyezik. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

5.4. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. A sorozatokra vonatkozó 4.28 Cauchy-kritérium alapján az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon\right)$$

teljesül.

5.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \to \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, vagyis Cauchy-sorozat. Ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N + 1 < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$|\alpha_m - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$$

teljesül, amiből az $m \to \infty$ határátmenettel

$$|\lim \alpha - \alpha_{n-1}| \leq \varepsilon$$

adódik, amiből a

$$\lim \alpha - \alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

átalakítással adódik az állítás.

5.2. Majoráns és minoráns kritérium

5.6. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$ és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$ és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens és monoton növő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

5.7. Tétel. *A $\sum_{n} \frac{1}{n+1}$ sor divergens, a $\sum_{n} \frac{1}{(n+1)^2}$ sor konvergens.*

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergenciája.
2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

becslés is adódik.

5.3. Abszolút konvergens sorok

5.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.9. Tétel. *Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, .$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, hogy a belőle képzett $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.
Megmutatjuk, hogy az $n \mapsto \alpha_n$ sorzat Cauchy-sorozat, így a 4.29 Cauchy-kritérium alapján konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Ezek alapján minden $n, m > N$ természetes számra

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat.

5.10. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{K}$. A $\sum_n q^n$ sor*

1. *divergens, ha $|q| \geq 1$;*
2. *abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{K}$. Ha $|q| \geq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat nem tart a nullához, vagyis $\sum_n q^n$ sor az 5.3 konvergencia szükséges feltétele alapján a nem lehet konvergens.
Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

teljesül, valamint a 4.31 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

adódik.

5.4. Konvergenciakritériumok

5.11. Tétel. *(Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha a $\sum_n a_n$ és a $\sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Az a sorozat monoton csökkenése miatt az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\alpha(2^n-1) = a_0 + \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leq$$

$$\leq a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \beta(n-1)$$

$$\alpha(2^n) = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{2^n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j} \geq$$

$$\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+2^k} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\beta(n)$$

Tekintsük az $n \mapsto \alpha(n)$ és $n \mapsto \beta(n)$ monoton növő sorozatokat. A fenti becslés azt mutatja, hogy ha az egyik nem korlátos, akkor a másik sem az. Vagyis ha az egyik sor divergens, akkor a másik is. Ebből pedig következik, hogy ha egyis sor konvergens, akkor a másik is.

5.12. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.*

Bizonyítás. Az 5.11 kondenzáicós kritérium alapján a $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^q}$ sor konvergens. Ezt a sort a $\sum_n \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^n$ alakban lehet felírni, ami a $\frac{1}{2^{q-1}}$ hányadosú geometriai sor összege. A geometriai sor konvergenciájára vonatkozó 5.10 tétel alapján, ez pontosan akkor konvergens, ha $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ teljesül, ez pedig a $q > 1$ feltétellel ekvivalens.

5.13. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. 1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N \right\} < q$, ezért minden $k > N$

számra $|a(k)| < q^k$. A $\sum\limits_k q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in \,]0,1[$, ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.
2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$. Ekkor a lim sup definíciója alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N},\ k > N \right\} > q$. Tehát minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan $k > N$, melyre $|a_k| > q^k$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid |a_k| > q^0\right\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge\ |a_k| > q^{n+1}\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ nem korlátos részsorozata az a sorozatnak. Ezek alapján az a sorozat sem korlátos, ezért konvergens sem lehet, emiatt pedig a $\sum a$ sor sem lehet konvergens.

5.14. Tétel. *Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ sorozatra*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ tetszőleges sorozat.
1. Legyen $\alpha < \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges való szám. Ekkor a lim inf

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\inf \left\{ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n \in \mathbb{N},\ n \ge N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| > \alpha \cdot |a_N|\,.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| > \alpha^k \cdot |a_N|\,.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge \liminf_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha < \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \to \qquad \alpha \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. A 4.23 tétel szerint minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ sorozatra teljesül az

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

egyenlőtlenség.
3. Legyen $\alpha > \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tetszőleges valós szám. Ekkor a lim sup

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \mid n \in \mathbb{N},\ n \ge N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < \alpha \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| < \alpha^k \cdot |a_N|.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}\right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha > \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \to \qquad \alpha \ge \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.15. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ olyan, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{K}$ határérték. Ekkor létezik a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bizonyítás. Az előző 5.14 állítás és a 4.24 tétel alapján nyilvánvaló.

5.16. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ sorozat esetén*

1. $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;*
2. $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *akkor a $\sum a$ sor divergens.*

Bizonyítás. Az 5.13 Cauchy-féle gyökkritérium és az 5.14 tétel alapján nyilvánvaló.

5.5. Leibniz-sorok

5.17. Definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$. A $\sum a$ sor *m-edik részletösszege*

$$S_m \triangleq \sum_{n=0}^{m} a_k.$$

A konvergens $\sum a$ sor *m-edik hibatagja*

$$H_m \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_n,$$

melyet gyakran a $H_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

5.18. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.19. Tétel. *Ha $\sum_n (-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|H_n| \leq a_{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\begin{aligned}
&\alpha(2n) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2n} \geq 0 \\
&\alpha(2n+1) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (-a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2n+1} \leq a_0 \\
&\alpha(2(n+1)) = \alpha(2n) - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq \alpha(2n) \\
&\alpha(2(n+1)+1) = \alpha(2n+1) + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq \alpha(2n+1)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek alapján az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, ezért konvergens, valamint az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, ezért szintén konvergens. A

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha(2n+1) - \alpha(2n)) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0$$

határérték alapján $\lim_{n\to\infty} \alpha(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \alpha(2n)$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \alpha(n)$ határérték. Legyen $A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Mivel az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat monoton csökkenő és az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat monoton növő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\alpha(2n+1) \leq A \leq \alpha(2n),$$

ezért

$$\begin{aligned}
0 \leq & A - \alpha(2n+1) \leq \alpha(2n+2) - \alpha(2n+1) = a_{2n+2} \quad && \to \quad |A - \alpha(2n+1)| \leq a_{2n+2}, \\
0 \geq & A - \alpha(2n) \geq \alpha(2n+1) - \alpha(2n) = -a_{2n+1} \quad && \to \quad |A - \alpha(2n)| \leq a_{2n+1},
\end{aligned}$$

ami bizonyítja a hibatagra vonatkozó $|H_n| \leq a_n$ becslést.

5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok

5.20. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.21. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges abszolút konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Továbbá vezessük be az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $B = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jelöléseket. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen $n' = \max\{\sigma(k)|\ k \in \{0, \dots, n\}\}$, ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} |a \circ \sigma| = \sum_{k=0}^{n} \left|a_{\sigma(k)}\right| \le \sum_{l=0}^{n'} |a_l| \le B.$$

Ezért az $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \left|a_{\sigma(k)}\right|$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Vagyis a $\sum a \circ \sigma$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens.
Megmutatjuk, hogy $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon_1.$$

Ekkor az $N_2 = \max\left\{\sigma^{-1}(k)|\ k \in \{0, \dots, N_1\}\right\}$ számra igaz, hogy minden $n > N_2$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) \le N_1}} a_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{N_1+1} a_k + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)},$$

vagyis

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| = \left|A - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \le \left|\sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k\right| + \left|\sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ \sigma(k) > N_1}} \left|a_{\sigma(k)}\right| \le \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon_1.$$

Tehát a ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex (például a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ választáshoz kapott N_2 paraméter), hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|A - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A$ egyenlőséget.

5.22. Tétel. *(Riemann-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy a $\sum a$ sor feltételesen konvergens. Ekkor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemre $\alpha \le \beta$ esetén létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy*

$$\liminf \sum a \circ \sigma = \alpha \quad \textit{és} \quad \limsup \sum a \circ \sigma = \beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum a$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (vagyis feltételesen konvergens), továbbá legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$ tetszőleges.
A bizonyítás főbb lépései a következők.
– Megmutatjuk, hogy a sorozat végtelen sokszor vesz fel pozitív, illetve negatív, értékeket.
– Igazoljuk, hogy a pozitív, illetve negatív, értékeiből képzett sor divergens.

– Ezek után készítünk az eredeti sorozatból egy részsorozatot úgy, hogy elkezdjük összeadni a sorozat pozitív elemeikeit, egészen addig amíg a β számnál nagyobb nem lesz az összeg. Ezután ehhez elkezdjük hozzáadni a sorozat negatív elemeit, egészen addig amíg az α számnál kisebb nem lesz az összeg. Majd ezeket a lépéseket ismételjük.
– Megmutatjuk, hogy az így kapott σ részsorozatra $\liminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$ és $\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \beta$ teljesül.
– Végül figyelembe vesszük, hogy a sorozat értékei nullák is lehetnek.
1. Vezessük be az $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést és definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$N_+ = \{n \in \mathbb{N}|\ a_n > 0\}$$
$$N_- = \{n \in \mathbb{N}|\ a_n < 0\}$$
$$N_0 = \{n \in \mathbb{N}|\ a_n = 0\}$$

Az N_+, N_- és N_0 halmazok diszjunktak és uniójuk $\mathbb{N}$. Nyilván $m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n - \sum_{\substack{n\in N_-\\ n\le m}} (-a_n)$$
$$\sum_{n=0}^{m} |a_n| = \sum_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n + \sum_{\substack{n\in N_-\\ n\le m}} (-a_n).$$

2. Megmutatjuk, hogy N_+ és N_- végtelen halmaz. Tegyük fel ugyanis, hogy az N_+ halmaz véges és legyen $A_+ = \sum_{n\in N_+} a_n$. Ekkor minden $m > \max N_+$ számra az

$$\sum_{n=0}^{m} |a_n| = A_+ + \left(A_+ - \sum_{n=0}^{m} a_n\right) = 2A_+ - \sum_{n=0}^{m} a_n$$

egyenlőségből és a $\sum a$ sor konvergenciájából a $\sum a$ sor abszolút konvergenciája adódik, ami ellentmondás. Vagyis az N_+ halmaz végtelen. Hasonló módon igazolható, hogy az N_- halmaz is végtelen. Megmutatjuk, hogy az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n$ és az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_-\\ n\le m}} a_n$ sorozatok divergensek. Tegyük fel ugyanis, hogy az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n$ sorozat konvergens és legyen B_+ a határértéke, vagyis $B_+ = \sum\limits_{n\in N_+} a_n$. Ekkor a $\sum a$ sor konvergenciája miatt létezik a

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a_n - \sum_{\substack{k\in N_+\\ k\le m}} a_k\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{\substack{k\in N_-\\ k\le m}} a_k$$

határérték, vagyis

$$\sum_{k\in N_-} a_k = A - B_+.$$

Ebből a $\sum a$ sor abszolút konvergenciája adódik ellentmondásként, ugyanis

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} |a_n| = B_+ - (A - B_+).$$

Tehát az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_+\\ n\le m}} a_n$ sorozat divergens. Hasonló módon igazolható az $m \mapsto \sum\limits_{\substack{n\in N_-\\ n\le m}} a_n$ sorozat divergenciája.
3. Legyen $\sigma_+ : \mathbb{N} \to N_+$ és $\sigma_- : \mathbb{N} \to N_-$ monoton növő bijekció és definiáljuk a

$$a^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_{\sigma_+(n)}$$

$$a^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_{\sigma_-(n)}$$

sorozatokat. Szemléletesen az a^+ sorozat az eredeti a sorozatnak olyan részsorozata, mely pontosan az a pozitív elemeit tartalmazza, valamint a^- sorozat az eredeti a sorozatnak olyan részsorozata, mely pontosan az a negatív elemeiből áll. Az eddigiek alapján a $\sum a^+$ és $\sum a^-$ sor divergens. Definiáljuk az alábbi iterációval a $\tau^+, \tau^- : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és az $u^+, u^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot.

- A sorozatok kezdőelemei legyenek az alábbiak.

$$\tau^+(0) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} | \sum_{n=0}^{m} a_n^+ > \beta \right\} \qquad u^+(0) = \sum_{n=0}^{\tau^+(0)} a_n^+$$

$$\tau^-(0) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} | \ u^+(0) + \sum_{n=0}^{m} a_n^- < \alpha \right\} \qquad u^-(0) = u^+(0) + \sum_{n=0}^{\tau^-(0)} a_n^-$$

- Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau^+(n), \tau^-(n), u^+(n)$ és $u^-(n)$ definiált, akkor a sorozat következő elemeit az alábbiak szerint definiáljuk.

$$\tau^+(n+1) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} | \ u^-(n) + \sum_{n=\tau^+(n)+1}^{m} a_n^+ > \beta \right\}$$

$$u^+(n+1) = u^-(n) + \sum_{n=\tau^+(n)+1}^{\tau^+(n+1)} a_n^+$$

$$\tau^-(n+1) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} | \ u^+(n+1) + \sum_{n=\tau^-(n)+1}^{m} a_n^- < \alpha \right\}$$

$$u^-(n+1) = u^+(n+1) + \sum_{n=\tau^-(n)+1}^{\tau^-(n+1)} a_n^-$$

4. Ekkor a sorozatok definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra az alábbiak teljesülnek.

$$\beta < u^+(n) \qquad \alpha > u^-(n)$$

$$\beta \geq u^+(n) - a^+_{\tau^+(n)} \qquad \alpha \leq u^-(n) - a^-_{\tau^-(n)}$$

$$u^+(n) = \sum_{n=0}^{\tau^+(n)} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\tau^-(n-1)} a_n^- \qquad u^-(n) = \sum_{n=0}^{\tau^+(n)} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\tau^-(n)} a_n^-$$

Mivel $a^\pm$ az a sorozat részsorozatai és $\lim a = 0$, ezért $\lim a^\pm = 0$ is teljesül. Figyelembe véve a $\tau^\pm$ sorozatok monoton növekedését és a minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra teljesülő

$$\left|\beta - u^+(n)\right| \leq a^+_{\tau^+(n)} \qquad \left|\alpha - u^-(n)\right| \leq \left|a^-_{\tau^-(n)}\right|$$

egyenlőtlenségeket $\lim u^+ = \beta$ és $\lim u^- = \alpha$ adódik. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezést az alábbi módon.

- Minden $n \in \{0, \ldots, \tau^+(0)\}$ számra legyen $\sigma(n) = \sigma_+(n)$.
- Minden $n \in \{\tau^+(0) + 1, \ldots, \tau^+(0) + \tau^-(0) + 1\}$ számra legyen $\sigma(n) = \sigma_-(n-1)$.
- Minden $n > \tau^+(0) + \tau^-(0) + 1$ számhoz létezik egyetlen olyan k természetes szám, melyre

$$n \in \left\{\tau^-(k) + \tau^+(k) + 2, \ldots, \tau^-(k+1) + \tau^+(k+1) + 1\right\}.$$

Ha $n \in \{\tau^-(k) + \tau^+(k) + 2, \ldots, \tau^-(k) + \tau^+(k+1) + 1\}$, akkor legyen

$$\sigma(n) = \sigma_+(n - \tau^-(k) - 1).$$

Ha $n \in \{\tau^-(k) + \tau^+(k+1) + 2, \ldots, \tau^-(k+1) + \tau^+(k+1) + 1\}$, akkor legyen

$$\sigma(n) = \sigma_-(n - \tau^+(k+1) - 1).$$

A σ definíciójából következik, hogy σ injektív, $\operatorname{Dom}\sigma = \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ran}\sigma = N_+ \cup N_-$.
Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$ és $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \beta$ teljesül, ugyanis ennek az $u^{\pm}$ sorozatok részsorozatai, valamint az α számnál kisebb és a β számnál nagyobb értékhez nem torlódnak az $a \circ \sigma$ sorozat elemei.
5. Az N_0 halmaz számossága alapján három a következő három esettel kell számolni.
- Az $N_0 = \emptyset$ esetben $\sigma' = \sigma$.
- Ha $N_0 \neq \emptyset$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, melyhez létezik egy $\rho : N_0 \to \{0, \ldots, m\}$ bijekció. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} \rho^{-1}(n), & \text{ha} \quad n \le m \\ \sigma(n-m), & \text{ha} \quad n > m \end{cases}$$

- Ha N_0 végtelen halmaz, akkor létezik $\rho : N_0 \to \mathbb{N}$ bijekció. Definiáljuk ekkor az alábbi függvényt.

$$\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} \rho^{-1}\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ \sigma\left(\frac{n-1}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ekkor $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan bijekció, melyre $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma'(k)} = \alpha$ és $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma'(k)} = \beta$ teljesül.

5.23. Tétel. *Egy sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha feltétlen konvergens.*

Bizonyítás. Az 5.22 Riemann-tétel és az 5.21 tétel alapján nyilvánvaló.

5.7. Sorok Cauchy-szorzata

5.24. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

5.25. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.26. Tétel. *(Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum (a * b)$ sor is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, valamint legyen C olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < C$ teljesül. Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} (a * b)(k) - AB = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j - A\right) B + \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right). \tag{5.1}$$

A jobb oldal első tagja nullához tart. Megmutatjuk, hogy a második tag is a nullához tart. Minden $\varepsilon' > 0$ számhoz létezik $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - B\right| < \varepsilon'$; valamint létezik $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon'$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n > 2N$ esetén

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{N} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{N} |a_j| \varepsilon' + \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| C \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| + C \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon' A_a + C\varepsilon' = (C + A_a)\varepsilon'.$$

Vagyis tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(C + A_a)}$ és az ehhez választott N_1 és N_2 paraméterekhez tartozó $N' = 2\max\{N_1, N_2\}$ küszöbindex olyan lesz, hogy minden $n > N'$ számra

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B\right)\right| < \varepsilon,$$

vagyis a (5.1) képlet jobb oldalán lévő második tag is a nullához tart.
Most tegyük fel, hogy $\sum a$ és $\sum b$ is abszolút konvergens és az eddigi jelöléseket egészítsük ki a $B_a = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ szimbólummal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |a * b|(k) = \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} |a_l| |b_{k-l}| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{n-k} |b_l| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| B_a \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) B_a = A_a B_a,$$

vagyis a $\sum(a * b)$ sor abszolút konvergens.

5.8. Sorok pontonkénti szorzata

5.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat

- *korlátos változású*, ha a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$
teljesül;
- *korlátos részletösszegű*, ha a
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \infty$$
teljesül.

5.28. Tétel. *(Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_{n} a_n b_n$ sor konvergens és*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right|\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right),$$

valamint legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat és

$$B = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right|.$$

A minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennálló *Abel-átrendezés*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right) + a_n \sum_{j=0}^{n} b_j$$

igazolható n szerinti teljes indukcióval. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \left| \sum_{j=0}^{k} b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot B = AB,$$

ezért a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right)$ sor abszolút konvergens, vagyis konvergens is és

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} b_j \right) \right| \leq AB.$$

Az $n \mapsto a_n \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat zérussorozat, mert az $n \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j$ sorozat korlátos és a zérussorozat. Ebből már adódik a bizonyítandó állítás.

5.29. Tétel. *(Dirichlet-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor a $\displaystyle\sum_{n} a_n q^n$ sor konvergens,*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor

$$B_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} q^k \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|q|^{n+1} + 1}{|1-q|} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1+1}{|1-q|} = \frac{2}{|1-q|} < \infty.$$

Innen már az Abel-féle kritériumból következik az állítás.

5.9. Elemi függvények

5.30. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \text{a } \sum_{n} a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt az a *együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

5.31. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \operatorname{Dom} P_a$.

2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \operatorname{Dom} P_a$.

Bizonyítás. Az 5.13 Cauchy-féle gyökkritérium közvetlen következménye.

5.32. Tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Bizonyítás. 1. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = \dfrac{1}{n!}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, vagyis az 5.15 tétel alapján $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, tehát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugara végtelen.

2. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, vagyis az 5.15 tétel alapján $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, tehát az $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x^2)^n}{(2n+1)!}$ hatványsor konvergenciasugara végtelen.
A többi esetben is hasonlóan igazolható az állítás.

5.33. Definíció. (*Elemi függvények.*)

– Az *exponenciális függvény*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

– A *szinusz függvény*

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz függvény*

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\operatorname{tg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

– A *kotangens függvény*

$$\operatorname{ctg} : \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z \sin z \neq 0\ \} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

– A *szinusz hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{sh}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{ch}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{th}:\{z\in\mathbb{C}|\ \operatorname{ch}z\neq 0\}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\operatorname{cth}:\{z\in\mathbb{C}|\ \operatorname{ch}z\operatorname{sh}z\neq 0\ \}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{1}{\operatorname{th}z}.$$

5.34. Tétel. *(Euler-tétel.) Minden $z\in\mathbb{C}$ esetén*

$$\exp(\mathrm{i}\,z)=\cos z+\mathrm{i}\sin z.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\cos z+\mathrm{i}\sin z&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}-\frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!}+\mathrm{i}\,\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}-\mathrm{i}\,\frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,z)^{4n}}{(4n)!}+\frac{(\mathrm{i}\,z)^{4n+1}}{(4n+1)!}+\frac{(\mathrm{i}\,z)^{4n+2}}{(4n+2)!}+\frac{(\mathrm{i}\,z)^{4n+3}}{(4n+3)!}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,z)^n}{n!}=\exp(\mathrm{i}\,z).\end{aligned}$$

5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás

5.35. Tétel. *(Az exponenciális függvény.)*

1. *Minden $x\in\mathbb{C}$ számra* $\overline{\exp(x)}=\exp(\overline{x})$.
2. *Minden $x,y\in\mathbb{C}$ számra* $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.
3. *Minden $x\in\mathbb{C}$ számra* $(\exp(x))^{-1}=\exp(-x)$.
4. *Minden $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ számra $x_1<x_2$ esetén* $\exp(x_1)<\exp(x_2)$ *teljesül, vagyis az*

$$\exp|_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\exp(x)$$

függvény injektív.

Bizonyítás. 1. Legyen $x\in\mathbb{C}$ és $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$. Mivel az a sorozat konvergens, ezért

$$\overline{\exp(x)}=\overline{\lim_{n\to\infty}a_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\overline{x})^k}{k!}=\exp(\overline{x}).$$

2. Mivel a $\alpha_k = \dfrac{x^k}{k!}$ és $\beta_k = \dfrac{y^k}{k!}$ sorozatokból képzett sorok abszolút konvergensek, ezért Mertens-tétel alapján Cauchy-szorzatuk is konvergens lesz. Mivel

$$(\alpha * \beta)(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}.$$

3. Az előző pont alapján minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(x)\cdot\exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

4. Az exponenciális függvény definíciója alapján ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(a) > 1$. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$, akkor

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1)\cdot\exp(x_1) > \exp(x_1).$$

5.36. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\mathrm{Dom}\log = \mathrm{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x \in \mathrm{Dom}\log$ számra $\exp(\log x) = x$.

5.37. Definíció. Legyen $x \in \mathrm{Dom}\log$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z\log(x))$$

számot *az x szám z-edik hatványának* nevezzük.

5.38. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$. (értéke megközelítőleg $\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$.)

5.39. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}$ számra* $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

Bizonyítás. Az e szám és a hatványozás definíciója alapján nyilvánvaló.

5.40. Tétel. *Legyen $x, y \in \mathrm{Dom}\log$ olyan szám, melyre $x^y \in \mathrm{Dom}\log$ és legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$x^0 = 1, \qquad x^{z_1}\cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \qquad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \qquad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítások a hatványozás definíciójának és az exponenciális függvény multiplikativitásának közvetlen következményei.

5.41. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.*

Bizonyítás. Adott $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ sorozatokat.

1. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a 4.41 tétel alapján az $a(x)$ sorozat konvergens, valamint az 5.32 tétel alapján a $b(x)$ sorozat konvergens és definíció szerint $\lim b(x) = \exp x$. A binomiális kifejtés alapján

$$b(x)_n - a(x)_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right)\cdot\frac{x^k}{k!}.$$

A teljes indukcióval könnyen bizonyítható $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ formula és a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \geq 1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{n} = 1-\frac{k(k-1)}{2n}.$$

Ezek alapján

$$1-\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2n},$$

vagyis

$$0 \leq b(x)_n - a(x)_n \leq \frac{x^2}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n}\cdot x^2\exp x,$$

amiből a rendőrelv értelmében $\lim(b(x)-a(x)) = 0$ következik.
2. Ha $x < 0$, akkor a 4.41 tétel miatt $\lim a(x) = \frac{1}{\lim a(-x)}$, az 5.35 tétel miatt $\lim b(x) = \frac{1}{\lim b(-x)}$. Mivel ekkor $-x > 0$, ezért az 1. pont alapján

$$\lim a(-x) = \lim b(-x),$$

amiből $\lim a(x) = \lim b(x)$ következik.

5.42. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.*

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x)\\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).\end{aligned}$$

3. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\sin(i\,x) = i\operatorname{sh} x, \qquad \cos(i\,x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(i\,x) = i\sin x, \qquad \operatorname{ch}(i\,x) = \cos x.$$

4. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

5. *Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|e^{ix}| = 1$.*

Bizonyítás. Az 5.34 Euler-tétel alapján minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \text{és} \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos(x) = \cos(-x)$ és $\sin(x) = -\sin(-x)$. Ebből adódik a sin és cos függvényre vonatkozó egyenlőség.
Az sh és a ch függvényekre vonatkozó egyenlőség a függvények sorfejtésének közvetlen következménye.
Az addíciós formulák, illetve a többi azonosság egyszerű számolással igazolható a sin, cos, sh és ch függvény exponenciális alakjából.

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Függvények tulajdonságai

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre $-x \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növő*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén
$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$$
teljesül;
- *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén
$$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$
teljesül;
- *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x + p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az *f függvény periódusának* nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség.)* *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Elég a konvex esetre bizonyítani az állítást, hiszen az $f \mapsto -f$ transzformációval egymásba alakíthatók az állítások. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} [0, 1]^n$ esetén, melyre $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ az
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$
egyenlőtlenség teljesül, akkor nyilván $n = 2$ is igaz a következtetés, ami éppen a konvexitás definícióját jelenti.
Tegyük fel, hogy az f függvény konvex és az A halmaz álljon azokból az n természetes számokból,

melyre igaz, hogy minden $(x_i)_{1\le i\le n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1\le i\le n} \in [0,1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Nyilván $1 \in A$, az f függvény konvexitása miatt $2 \in A$ és célunk annak igazolása, hogy $A = \mathbb{N}^+$. Ezt úgy érjük el, hogy megmutatjuk ha $n \in A$, akkor $n+1 \in A$. Legyen $n \in A$, $(x_i)_{1\le i\le n+1} \in I^n$ és legyen $(a_i)_{1\le i\le n+1} \in [0,1]^n$ olyan, melyre $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Ha $a_{n+1} = 1$, akkor nyilván teljesül az

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $a_{n+1} \ne 1$. Ebben az esetben azonban a

$$\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}} \in [0,1]$$

számok összege 1, valamint

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i \in I.$$

Ezért felhasználva az f függvény konvexitását és az $n \in A$ feltételezést

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right) &= f\left((1-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i + a_{n+1}x_{n+1}\right) \le \\
&\le (1-a_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i\right) + a_{n+1} f(x_{n+1}) \le \\
&\le (1-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_{n+1}} f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i)
\end{aligned}$$

adódik, vagyis $n+1 \in A$.

6.2. Függvény határértéke

6.3. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.5. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az f *függvény határértéke a végtelenben,*

– $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

– *végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.7. Tétel. *(A határérték egyértelműsége.)*

1. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*
2. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_A &\to |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \\ 0 < |x - a| < \delta_B &\to |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \end{aligned}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a = \infty$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{K}$ legyen az f függvény határértéke a végtelenben. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$\begin{aligned} \delta_A < x &\to |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \\ \delta_B < x &\to |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \end{aligned}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap]\delta, \infty[$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Ha $a = -\infty$, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $A = B$.

A többi esetben is hasonló módon igazolható a határérték egyértelműsége.

6.8. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

– Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

– Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

6.9. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és legyen $a \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim\limits_{a} f = 0$, akkor $\lim\limits_{a} fg = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és legyen $a \in \mathbb{K}$ a $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim_a f = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, g \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ esetén $|g(x)| < K$. Mivel $\lim_a f = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f \cap (B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\})$ esetén $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ha $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, akkor minden $x \in (\mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, f) \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$|f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

Vagyis $\lim_a (fg) = 0$.

6.10. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaznak. (A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben $a = \pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f$ és $\lim_a g$, valamint $\lim_a f, \lim_a g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont*

1. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(f+g)$ halmaznak, $\lim_a (f+g)$ létezik és*
$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g;$$
2. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim_a (fg)$ létezik és*
$$\lim_a (fg) = \left(\lim_a f\right)\left(\lim_a g\right);$$
3. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim_a (\lambda f)$ létezik, és*
$$\lim_a (\lambda f) = \lambda(\lim_a f);$$
4. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim_a |f|$ létezik és*
$$\lim_a |f| = \left|\lim_a f\right|;$$
5. *torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(\overline{f})$ halmaznak, $\lim_a \overline{f}$ létezik és*
$$\lim_a \overline{f} = \overline{\lim_a f}.$$
6. *Ha az a pont torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{1}{f}\right)$ halmaznak és $\lim_a f \neq 0$, akkor $\lim_a \dfrac{1}{f}$ létezik és*
$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f}.$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}$ torlódási pontja a $K = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ halmaznak, legyen $F = \lim_a f \in \mathbb{K}$ és $G = \lim_a g$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in K:\ 0 < |x-a| < \delta_f \ \Rightarrow\ |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in K:\ 0 < |x-a| < \delta_g \ \Rightarrow\ |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in K:\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |(f+g)(x) - (F+G)| \le |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim_a (f+g) = F + G$.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K:\ 0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - F| < k,$$

vagyis minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra
$$|f(x)| < |F| + k.$$
Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy
$$\forall x \in K:\ 0 < |x - a| < \delta_f \ \Rightarrow\ |f(x) - F| < \varepsilon'$$
$$\forall x \in K:\ 0 < |x - a| < \delta_g \ \Rightarrow\ |g(x) - G| < \varepsilon'.$$
Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $0 < |x - a| < \delta$ esetén
$$|(fg)(x) - (FG)| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \le |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |G| \cdot |f(x) - F| \le$$
$$\le (|F| + k) \cdot \varepsilon' + |G| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|F| + |G| + k) \le \varepsilon,$$
teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + k}$. Vagyis az ε, F, G és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_g mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor
$$|\lambda f(x) - \lambda F| = |\lambda| \cdot |f(x) - F| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$
vagyis $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda F$.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy
$$\forall x \in K:\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - F| < \varepsilon$$
Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < |x - a| < \delta$ esetén
$$||f(x)| - |F|| \le |f(x) - F| < \varepsilon$$
$$\left|\overline{f(x)} - \overline{F}\right| = \left|\overline{f(x) - F}\right| = |f(x) - F| \le |f(x) - F| < \varepsilon$$
teljesül, vagyis $\lim\limits_a |f| = |F|$ és $\lim\limits_a \overline{f} = \overline{F}$.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{|F|}{2}$. Ekkor minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|F|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon\,|F|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f}$ és $0 < |x - a| < \delta$ esetén
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F}\right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)| \cdot |F|} < \frac{|f(x) - F|}{\frac{|F|}{2} \cdot |F|} < \frac{2}{|F|^2} \cdot \frac{\varepsilon\,|F|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.11. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \le g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték, akkor $\lim\limits_a f \le \lim\limits_a g$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \le g(x)$, valamint létezik a $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ határérték. Legyen $F = \lim\limits_a f$, $G = \lim\limits_a g$ és tegyük fel, hogy $G < F$. Az $\varepsilon = \dfrac{F - G}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ esetén, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \varepsilon$ és $|g(x) - G| < \varepsilon$. Vagyis $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén az $F - \varepsilon < f(x)$ egyenlőtlenség miatt $\dfrac{F + G}{2} < f(x)$, és a $g(x) < G + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $g(x) < \dfrac{F + G}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \le g(x)$.

6.12. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre* $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ *és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_a f = \lim_a h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim_a g$ határérték és $\lim_a g = A$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ teljesül és vezessük be a $H = \operatorname{Dom} f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint $A \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\lim_a f = \lim_a h = A$. Bevezetve az $\alpha = g - f$ és a $\beta = h - f$ függvényeket, minden $x \in H$ esetén $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ teljesül. A $\lim_a \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén $-\varepsilon < \beta(x) < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha(x)| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim_a \alpha = 0$. Ekkor a $g = \alpha + f$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban és $\lim_a g = \lim_a \alpha + \lim_a f = A$.

6.13. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_z f = F \in \mathbb{K}$ határérték és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ a z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ 0 < |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - F| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - F| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat, valamint

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{K}$ szám, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \,|\, x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, \ |f(x) - A| \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \,|\, x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, \ |f(x) - A| \geq \varepsilon \Big\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

6.3. Féloldali határérték

6.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

- Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik
$$\lim_a f|_{]a,\infty[} = A$$
határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a+} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.
- Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik
$$\lim_a f|_{]-\infty,a[} = A$$
határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a-} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

6.15. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az a pontban létezik az f függvénynek határértéke. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$ esetén
$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon$$
teljesül. Ekkor minden $x \in]a-\delta, a[$ esetén
$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon,$$
vagyis létezik $\lim\limits_{a-} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_a f$. Hasonlóan igazolható, hogy létezik $\lim\limits_{a+} f$ és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_a f$.
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és tegyük fel, hogy az f függvénynek az a pontban létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ teljesül. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a-\delta_1, a[$ esetén
$$\left| f(x) - \lim_{a-} f \right| < \varepsilon$$
teljesül és létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a, a+\delta_2[$ esetén
$$\left| f(x) - \lim_{a+} f \right| < \varepsilon.$$
Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $A = \lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f$ olyan szám, hogy minden $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$ esetén
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$
vagyis létezik $\lim\limits_a f$ határérték és $\lim\limits_a f = A$.

6.4. Függvény folytonossága

6.16. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$
- Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{K}) \triangleq \{f : A \to \mathbb{K} |\ f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

6.17. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in K = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K :\ |x - a| < \delta_f \ &\Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall x \in K :\ |x - a| < \delta_g \ &\Rightarrow\ |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in \mathbb{K} :\ |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $(f + g)$ függvény folytonos az a pontban.
2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K :\ |x - a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < k,$$

vagyis minden $|x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |f(a)| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K :\ |x - a| < \delta_f \ &\Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon' \\ \forall x \in K :\ |x - a| < \delta_g \ &\Rightarrow\ |g(x) - g(a)| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $|x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \leq \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \leq \\ &\leq (|f(a)| + k) \cdot \varepsilon' + |g(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|f(a)| + |g(a)| + k) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|f(a)| + |g(a)| + k}$. Vagyis az ε, $f(a)$, $g(a)$ és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_g mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. A $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $|x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

Vagyis a λf függvény folytonos az a pontban.
4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K :\ |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $|x-a|<\delta$ esetén

$$\begin{aligned}&||f(x)|-|f(a)|| \leq |f(x)-f(a)| < \varepsilon\\ &\left|\overline{f(x)}-\overline{f(a)}\right| = \left|\overline{f(x)-f(a)}\right| = |f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f(a)| < \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül, vagyis az $|f|$ és a $\overline{f}$ függvény folytonos az a pontban.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $|x-a|<\delta_1$ esetén $|f(x)-f(a)| < \dfrac{|f(a)|}{2}$. Ekkor minden $|x-a|<\delta_1$ számra $|f(x)| > \dfrac{|f(a)|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $|x-a|<\delta_f$ esetén $|f(x)-f(a)| < \dfrac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{1}{f}$ és $|x-a|<\delta$ esetén

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)|\cdot|f(a)|} < \frac{|f(x)-f(a)|}{\frac{|f(a)|}{2}\cdot|f(a)|} < \frac{2}{|f(a)|^2}\cdot\frac{\varepsilon\,|f(a)|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.18. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Ekkor minden $f,g \in C(A,\mathbb{K})$ elemre és minden $c \in \mathbb{K}$ számra*

$$f+g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A,\mathbb{K}).$$

Bizonyítás. Az előző állítás kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

6.19. Tétel. *Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f,g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g \;\; |y-f(a)| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(y)-g(f(a))| < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f \;\; |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)| = |g(f(x))-g(f(a))| < \varepsilon.$$

6.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f: \quad && 0 < |x-a| < \delta \quad \to \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon\\ &\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f: \quad && |x-a| < \delta \quad \to \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon\end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

6.21. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f,g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a,b,c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g\circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a, b, c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \mathrm{Dom}\, g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) = g\left(B_{\delta'}(b)\right)$ miatt

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b)\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

6.22. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \mathrm{Dom}\, f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $z \in \mathrm{Dom}\, f$, tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(z)$.
Visszafelé úgy bizonyítjuk az implikációt hogy feltesszük, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f |\ x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$ sorozat, melynek határértéke z. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - f(z)| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

6.23. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup\limits_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{K} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K} \setminus (U \cap K)) = K \cap ((\mathbb{K} \setminus U) \cup (\mathbb{K} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{K} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{K} \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{K} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K} \setminus (Z \cap K)) = K \cap ((\mathbb{K} \setminus Z) \cup (\mathbb{K} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{K} \setminus Z)$$

teljesül, ahol ugyancsak felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{K} \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

6.24. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

6.25. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, de $\lim\limits_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$ és $\lim\limits_{a-} f = \lim\limits_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei

6.26. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a 6.23 folytonosság topologikus jellemzése alapján, minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i$$

teljesül, ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(V_i) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

6.27. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 6.26 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a valós számokra vonatkozó 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

6.28. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor a 6.26 tétel alapján a $K' = f(K)$ halmaz is kompakt. A 6.23 tétel felhasználásával úgy igazoljuk, hogy $g = f^{-1}$ függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{g}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} g$ teljesül. Az f függvény injektivitása miatt $\overset{-1}{g}(A) = f(A)$. Az $A \cap K$ halmaz zárt és korlátos, ezért kompakt, valamint az f függvény folytonossága miatt $f(A \cap K)$ is kompakt halmaz, vagyis zárt. Legyen $Z = f(A \cap K)$. Mivel $\operatorname{Dom} g = K'$ és $Z \subseteq K'$, ezért $\overset{-1}{g}(A) = f(A) = f(A \cap K) = Z \cap \operatorname{Dom} g$.

6.29. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in \,]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen

$$H = \{z \in [a, b] \mid \forall x \in [a, z] : \ f(x) < 0\}.$$

Ekkor H korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma, legyen $c = \sup H$.
Megmutatjuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. Ha $c = a$, akkor az f függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]a, a + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $c = b$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]b - \delta, b[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak.
Végül igazoljuk, hogy $f(c) = 0$. Ha $f(c) < 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $f(c) > 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak. Mivel $f(c) > 0$ és $f(c) < 0$ is lehetetlen, ezért $f(c) = 0$.

6.30. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor* $\operatorname{Ran} f$ *nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növő függvény. Szigorúan monoton csökkenő függvényre teljesen hasonló a bizonyítás.
Először megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges olyan pont, melyre $y_1 < y_2$. Legyen $x_1, x_2 \in I$ olyan, hogy $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Ha $c \in \,]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - c$$

folytonos függvényre $h(x_1)h(x_2) < 0$ teljesül, tehát a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $x \in \,]x_1, x_2[$, hogy $f(x) = c$, vagyis $c \in \operatorname{Ran} f$. Ezért minden $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} f$, $y_1 \leq y_2$ esetén $[y_1, y_2] \subseteq \operatorname{Ran} f$ teljesül, amiből már következik, hogy $\operatorname{Ran} f$ intervallum.
Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ran} f$ nyílt halmaz. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$. Mivel f szigorúan monoton növő, ezért $y_1 < y_0 < y_2$. Legyen $r = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Ekkor $B_r(y_0) \subseteq \,]y_1, y_2[$, és az elöbbi megállapítás alapján $\operatorname{Ran} f$ intervallum, ezért $B_r(y_0) \subseteq \operatorname{Ran} f$, vagyis y_0 belső pontja a $\operatorname{Ran} f$ halmaznak.
Végül megmutatjuk, hogy f^{-1} folytonos. Ehhez legyen $y_0 \in \operatorname{Ran} f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ és tekintsük az

$$f|_{[a,b]} : [a, b] \to [y_1, y_2] \qquad x \mapsto f(x)$$

függvényt. Mivel ez folytonos bijekció, ezért a 6.28 tétel alapján az inverze is folytonos. Mivel $y_0 \in \operatorname{Int}[y_1, y_2] = \operatorname{Int} \operatorname{Dom} \left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$, valamint $f^{-1}|_{[y_1,y_2]} = \left(f|_{[a,b]}\right)^{-1}$ ezért az $f^{-1}|_{[y_1,y_2]}$ függvény is folytonos az y_0 pontban, vagyis az f^{-1} függvény is folytonos az y_0 pontban.

6.6. Függvény egyenletes folytonossága

6.31. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

6.32. Tétel. *Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x - y| < \delta \ \to \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

6.33. Tétel. *(Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\dfrac{\delta(x)}{2} | \; x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A "háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|y - p| \le |y - x| + |x - p| < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \le \delta(p),$$

ezért

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon.$$

6.7. Hatványsorok határértéke

6.34. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha az a sorozat által meghatározott P_a hatványsor konvergenciasugara R_a, akkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara is R_a.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Megmutatjuk, hogy

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

teljesül, ebből már következik az állítás.
1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|} < q$. Ekkor a $\limsup$ definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{\sqrt[n]{|a_n|} | \; n > N\right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$(n+1)\,|a_{n+1}| < (n+1)q^{n+1}$$
$$\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q}$$
$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \le \limsup_n \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \le q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < q \quad \to \quad \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \le q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \le \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q$. Ekkor a lim sup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\left\{ \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \mid n > N\right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $(n+1)\,|a_{n+1}| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &< q^{n+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n+1} \\ |a_n| &< q^n \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n} \qquad \forall n > N \\ \sqrt[n]{|a_n|} &< q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} &\le \limsup q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{aligned}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q \quad \to \quad \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}.$$

6.35. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in\,]0, R_a - |z_0|[$, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, melyhez tartozó hatványsor konvergencisugara R_a és legyen

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in\,]0, R_a - |z_0|[$. Legyen $z \in B_\rho(0)$, ekkor

$$P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k - z_0^k) - (z - z_0)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z_0^k =$$

$$= (z - z_0)\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - (z - z_0)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} =$$

$$= (z - z_0)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1}\right) =$$

$$= (z - z_0) \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} \right).$$

Ennek egy részlete

$$\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} ((z-z_0)+z_0)^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (z-z_0)^m z_0^{j-m} \right) z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (z-z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z-z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z-z_0)^m z_0^{k-1-m}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \le \sum_{j=m}^{k-1} \binom{k-1}{m} = (k-m) \binom{k-1}{m} \le k \binom{k-1}{m}$$

a fenti kifejezésre

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} \right| \le \sum_{m=1}^{k-1} k \binom{k-1}{m} |z-z_0|^m |z_0|^{k-1-m} \le$$
$$\le |z-z_0| \, k \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k-1}{m-1+1} |z-z_0|^{m-1} |z_0|^{k-1-m} =$$
$$= |z-z_0| \, k \sum_{m=0}^{k-2} \binom{k-1}{m+1} |z-z_0|^m |z_0|^{k-2-m} =$$
$$= |z-z_0| \, k \sum_{m=0}^{k-2} \left(\frac{k-1}{m+1} \right) \binom{k-2}{m} |z-z_0|^m |z_0|^{k-2-m} \le$$
$$\le |z-z_0| \, k \sum_{m=0}^{k-2} k \binom{k-2}{m} |z-z_0|^m |z_0|^{k-2-m} =$$
$$= |z-z_0| \, k^2 (|z-z_0| + |z_0|)^{k-2}$$

adódik. Ezek alapján

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z-z_0) P_{a'}(z_0)| \le |z-z_0| \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k |z-z_0| \, k^2 (|z-z_0| + |z_0|)^{k-2} \right| \le$$
$$\le |z-z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \, k^2 (|z-z_0| + |z_0|)^{k-2} \le |z-z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \, k^2 (\rho + |z_0|)^{k-2}.$$

Mivel $\rho + |z_0| < R_a$, ezért az 5.13 Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \, k^2 (\rho + |z_0|)^{k-2}$$

sor konvergens.
Tehát igazoltuk, hogy a

$$K = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot k^2 \cdot (\rho + |z_0|)^{k-2}$$

számra igaz, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

teljesül.

6.36. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim\limits_{x\to z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Az a sorozathoz rendelt hatványsor konvergenciasugara legyen $R_a > 0$ és legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$. Az előző 6.35 tétel miatt minden $\rho \in\,]0, R_a - |z_0|[$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ számra

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

Ekkor

$$|P_a(z) - P_a(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K + |z - z_0| \cdot |P_{a'}(z_0)|,$$

amiből a $\lim\limits_{z\to z_0}$ határértékképzés után

$$\lim_{z\to z_0} |P_a(z) - P_a(z_0)| = 0$$

adódik.

6.8. Elemi függvények folytonossága

6.37. Tétel. *Az* exp, sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th *és* cth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítás és az 5.15 tétel miatt nyilvánvaló.

6.38. Tétel. *(Nevezetes határértékek.)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bizonyítás. Az exponenciális és a szinusz függvény hatványsorából adódik.

6.39. Tétel. *Az* $\exp|_{\mathbb{R}}$ *függvényre* $\operatorname{Ran}\exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ *teljesül és a* log *függvényre pedig* $\operatorname{Dom}\log = \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. Csak a $\operatorname{Ran}\exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ állítást kell igazolni, hiszen a log függvény az exp függvény inverze. Legyen $a > 1$. Ekkor tekintsük a folytonos

$$\varphi : [0, a] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \exp(x) - a$$

függvényt. Mivel $\varphi(0) = 1 - a < 0$ és $\varphi(a) - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > a$ ezért a 6.29 Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x_0 \in [0, a]$ pont, melyre $\varphi(x_0) = 0$, vagyis $\exp(x_0) = a$ teljesül. Tehát $a \in \operatorname{Ran}\exp$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $1 < \frac{1}{a} \in \operatorname{Ran}\exp$, tehát létezik olyan x_0, melyre $\exp(x_0) = \frac{1}{a}$. Mivel $\exp(-x_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = a$, ezért $a \in \operatorname{Ran}\exp$.

6.40. Tétel. *(A logaritmus függvény.)* *A* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, szigorúan monoton növő bijektív függvény.*

Bizonyítás. A 6.39 tétel alapján $\operatorname{Dom}\log = \mathbb{R}^+$, valamint mivel $\operatorname{Dom}\exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ és $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} = \log$, ezért $\operatorname{Ran}\log = \mathbb{R}$. Az 5.35 tétel alapján az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény szigorúan monoton növő, ezért a log függvény is szigorúan monoton növő vagyis injektív függvény. Ezek alapján a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény bijekció.
Mivel $\exp|_{\mathbb{R}}$ nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.30 tétel alapján az inverze is folytonos, vagyis a log függvény folytonos.

6.41. Tétel. *(A hatványfüggvény folytonossága.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^{\alpha}$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, az

$$M_{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \alpha x$$

és az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos, ezért az $\exp \circ M_{\alpha} \circ \log$ függvény is folytonos, ami pedig éppen az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha}$ függvény.

6.42. Tétel. *(A π szám bevezetése.)*

1. *Minden $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ esetén $\sin x > 0$.*
2. *A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left]0, \sqrt{3}\right[$ intervallumon.*
3. $\cos\sqrt{3} < -\dfrac{1}{8}$
4. *Létezik egyetlen olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ekkor

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \cdots = \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{10\cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\cdot\left(1 - \frac{3}{6\cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\cdot\left(1 - \frac{3}{10\cdot 11}\right) + \cdots \geq \\
&\geq x\left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{x}{2} > 0.
\end{aligned}$$

2. Az 5.42 tételben szereplő addíciós formulák alapján minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right).$$

Tehát elég azt megmutatni, hogy az $x_1, x_2 \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, $x_1 < x_2$ esetben $\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ és $\sin\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Mivel $\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_2 - x_1}{2} \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ezért az első pont alapján $\sin\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $\sin\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$.
3. A cos függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\cos\sqrt{3} &= 1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{4!} - \left(\frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!}\right) - \left(\frac{3^5}{10!} - \frac{3^6}{12!}\right) - \cdots = \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{3^3}{6!}\left(1 - \frac{3}{7\cdot 8}\right) - \frac{3^5}{10!}\left(1 - \frac{3}{11\cdot 12}\right) - \cdots < -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

adódik.
4. A cos függvény folytonossága miatt a Bolzano-tétel alapján adódik, hogy létezik olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$, valamint a cos függvény $\left[0, \sqrt{3}\right]$ intervallumon való szigorú monotonitásából adódik, hogy legfeljebb egy ilyen x szám létezhet ebben az intervallumban.

6.43. Definíció. Legyen $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \overset{\triangle}{=} 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai

6.44. Tétel. *(Nevezetes szögek.)*

1. A $\frac{\pi}{2}$ és a π szögfüggvényei.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

2. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

3. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$\mathrm{e}^{x+2\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x}, \qquad \mathrm{sh}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \mathrm{sh}\,x, \qquad \mathrm{ch}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \mathrm{ch}\,x.$$

4. A $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{\pi}{3}$ szögfüggvényei.

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bizonyítás. 1. A $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a π szám definíciója alapján teljesül. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért $\sin\frac{\pi}{2} \in \{-1, 1\}$. A 6.42 tétel alapján $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, ezért $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. A $\sin\pi$ és a $\cos\pi$ érték az 5.42 tételben szereplő addíciós formulával igazolható.
2–3. Az egyenlőségek az 5.42 tételben szereplő addíciós formulákkal igazolhatók.
4. Legyen $a = \sin\frac{\pi}{6}$ és $b = \cos\frac{\pi}{6}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{6} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{6} = b^2 - a^2,$$

valamint

$$\sin\frac{3\pi}{6} = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad \cos\frac{3\pi}{6} = b^3 - 3a^2b.$$

A $\frac{\pi}{2}$ szinuszát és koszinuszát az 1. pont alapján beírva az

$$1 = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad 0 = b^3 - 3a^2b.$$

egyenletrendszer adódik. Ha a $b = 0$ teljesülne, akkor az első egyenlet alapján $a < 0$ teljesülne, azonban $\frac{\pi}{6} \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, ezért a 6.42 tétel alapján $a > 0$. Tehát $b \neq 0$. A második egyenlet miatt ekkor $b^2 = 3a^2$, amit az első egyenletbe írva $1 = 8a^3$ adódik. Innen már a és b értéke egyszerűen számolható.
A $\sin\frac{\pi}{3}$ és a $\cos\frac{\pi}{3}$ értéke számolható a $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ összefüggésre alkalmazott addíciós formulákból.
Legyen $a = \sin\frac{\pi}{4}$ és $b = \cos\frac{\pi}{4}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin\frac{2\pi}{4} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{4} = b^2 - a^2,$$

tehát

$$1 = 2ab \quad \text{és} \quad 0 = b^2 - a^2.$$

Mivel $\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4} > 0$, ezért a második egyenletből $a = b$ adódik, amiből pedig $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.45. Tétel. *(Euler képlet.)* $e^{i\pi} = -1$

Bizonyítás. A 6.44 és az 5.34 Euler-tétel következménye.

6.46. Tétel. *(Trigonometrikus függvények periódusa.)*

1. *Minden* $x \in]0, \pi[$ *esetén* $\sin x > 0$*, minden* $x \in]\pi, 2\pi[$ *esetén* $\sin x < 0$*.*
2. *A* $\sin x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \{0, \pi\}$ *az összes megoldása.*
3. *A* sin *függvény periódusa* 2π*.*
4. *Minden* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x > 0$*, minden* $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x < 0$*.*
5. *A* $\cos x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *az összes megoldása.*
6. *A* cos *függvény periódusa* 2π*.*

Bizonyítás. 1. A 6.44 tétel alapján minden $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ számra $\sin x > 0$. Ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, akkor az előző megállapítás és a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt $\sin x > 0$. Mivel $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$, ezért minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$. Ha $x \in]\pi, 2\pi[$, akkor a $\sin x = -\sin(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\sin x < 0$.
2. Az 1. pont és a 6.44 tétel alapján nyilvánvaló.
3. Tegyük fel, hogy létezik a sin függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \sin 0 = \sin(0 + p)$. A 2. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = -1$$

miatt π sem lehet a periódus. Tehát a sin függvény legkisebb periódusa 2π.
4. A 6.44 tétel alapján minden $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x > 0$, továbbá a cos függvény párossága és $\cos 0 = 1$ miatt minden $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x > 0$. Ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, akkor a $\cos x = -\cos(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\cos x < 0$.
5. Az előző pont alapján ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x > 0$; ha $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, akkor $\cos x < 0$; ha $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, akkor $\cos x = -\cos(x - \pi)$ miatt $\cos x > 0$. Tehát a $\cos x = 0$ egyenletnek a $[0, 2\pi[$ intervallumon csak $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ lehet a megoldása és a 6.44 tétel alapján ezek valóban megoldások.
6. Tegyük fel, hogy létezik a cos függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p. Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \cos -\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + p\right)$. A 4. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban $1 = \cos 0 \neq \cos(0 + p) = -1$ miatt π sem lehet a periódus. Tehát a cos függvény legkisebb periódusa 2π.

6.47. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* cos *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $[0, \pi]$ *intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. *A* sin *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon és*

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. *A* tg *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, valamint szigorúan monoton növő a* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon és*

$$\mathrm{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \mathrm{tg}\, x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Ha $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, akkor $0 < \dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_2-x_1}{2} < \pi$ miatt a 6.46 tétel alapján $\sin\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right), \sin\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0,\pi]$ halmazon. Mivel $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ és a cos függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran}\cos|_{[0,\pi]} = [-1,1]\,.$$

A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.
2. Ha $-\dfrac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$, akkor $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_1+x_2}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ miatt a 6.46 tétel alapján $\cos\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$, valamint $0 < \dfrac{x_2-x_1}{2} < \pi$ miatt $\sin\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\sin x_1 - \sin x_2 = -2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ halmazon. Mivel $\sin -\dfrac{\pi}{2} = -1$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran}\sin|_{\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} = [-1,1]\,.$$

A $\sin|_{\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.
3. A $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásához legyen $z = a + \mathrm{i}\,b$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A $\cos(a+\mathrm{i}\,b) = 0$ egyenlet az 5.42 tétel alapján

$$\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,a-2b} = -1$$

alakban íható fel, ami az 5.34 alapján az

$$\mathrm{e}^{-2b}\left(\cos(2a) + \mathrm{i}\sin(2a)\right) = -1$$

egyenlethez vezet. A két oldal abszolútértékét véve $\mathrm{e}^{-2b} = 1$ adódik, vagyis $b = 0$. A fenti egyenlet valós és képzetes részét véve az

$$\cos(2a) = -1 \qquad \sin(2a) = 0$$

egyenleteket kapjuk. Keressük ennek a megoldását a $2a \in [0, 2\pi[$ feltétel mellett. Ekkor a 6.46 tétel második pontja alapján a $\sin(2a) = 0$ egyenletből $2a = 0$ vagy $2a = \pi$ következik. A $2a = 0$ esetben $\cos(2a) \neq -1$, a $2a = \pi$ esetben azonban $\cos(2a) = -1$. Tehát a $[0, 2\pi[$ intervallumban egyetlen megoldás van $a = \dfrac{\pi}{2}$. A trigonometrikus függvények 2π szerinti periodicitása miatt a $\cos z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom}\operatorname{tg} = \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Legyen $-\dfrac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$. Ekkor $0 < x_2 - x_1 < \pi$, tehát a 6.46 tétel 1. pontja alapján $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 = \frac{-1}{\cos x_1 \cos x_2}\sin\left(x_2 - x_1\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a tg függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon.
A tg függvény páratlan és $\operatorname{tg} 0 = 0$ ezért $\operatorname{Ran} \operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = \mathbb{R}$ igazolásához elég megmutatni, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, melyre $\operatorname{tg} x = y$ teljesül. Legyen $y \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_1, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\sin x > \frac{1}{2}$. Mivel $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ és a cos függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\cos x < \frac{1}{2y}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $x_0 \in \left]\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2}\right[$ tetszőleges pont. Ekkor $\sin x_0 > \frac{1}{2}$ és $\cos x_0 < \frac{1}{2y}$, tehát

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2y}} = y.$$

A folytonos tg függvényre a $[0, x_0]$ intervallumon $\operatorname{tg} 0 < y < \operatorname{tg} x_0$ teljesül, vagyis a Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x \in]0, x_0[$, melyre $\operatorname{tg} x = y$, ezért $y \in \operatorname{Ran} \operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

6.48. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét ***arkusz szinusz függvénynek*** nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét ***arkusz koszinusz függvénynek*** nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét ***arkusz tangens függvénynek*** nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg} \triangleq \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

6.49. Tétel. *Az* arcsin *az* arccos *és az* arctg *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az arcsin és az arccos függvény a 6.28 tétel alapján folytonos. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.30 tétel alapján az inverze is folytonos.

6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai

6.50. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. *A* ch *függvény szigorúan monoton növő a* $[0, \infty[$ *halmazon és*
$$\operatorname{ch}|_{[0,\infty[} : [0, \infty[\to [1, \infty[\qquad x \mapsto \operatorname{ch} x$$
bijekció.
2. *Az* sh *függvény szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*
$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$
bijekció.
3. *A* th *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*
$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to]-1, 1[\qquad x \mapsto \operatorname{th} x$$
bijekció.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy $0 < x$ esetén $0 < \operatorname{sh} x$. Ekkor a $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$ adódik és az igazolandó

$$\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right) > 0$$

egyenlőtlenség következik az $1 < q^2$ egyenlőtlenségből. Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$ és $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, ezért a

$$\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{ch} x_2 = -2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján a ch függvény szigorúan monoton növő a $[0, \infty[$ halmazon.
Most igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén $\operatorname{ch} x > 1$. A $q = \mathrm{e}^x$ jelöléssel $1 < q$ és ekkor

$$\operatorname{ch} x > 1 \quad \leftrightarrow \quad q + \frac{1}{q} - 2 > 0 \quad \leftrightarrow \quad (q-1)^2 > 0.$$

Legyen $q \in [1, \infty[$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in [0, \infty[$, melyre $\operatorname{ch} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x + 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{q^2 - 1} \geq 1$, ezért $q + \sqrt{q^2 - 1} \in \operatorname{Dom} \log$, sőt $\log\left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right) \geq 0$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right) \in [0, \infty[$$

számra $\operatorname{ch} x = q$ teljesül.
A ch függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
2. Mivel minden $x \in [0, \infty[$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$ és a ch függvény páros, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$. Ha $\leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, vagyis az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$, ezért a

$$\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{sh} x_2 = -2 \operatorname{ch}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

azonosság alapján az sh függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre $\operatorname{sh} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2q \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2q\,\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4}}{2} = q \pm \sqrt{1 + q^2} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{1 + q^2} > 0$, ezért $q + \sqrt{1 + q^2} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \log\left(q + \sqrt{1 + q^2}\right) \in \mathbb{R}$$

számra $\operatorname{sh} x = q$ teljesül.
Az sh függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.
3. A $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet az 5.42 tétel alapján a $\cos(\mathrm{i}\, z) = 0$ egyenlettel ekvivalens, vagyis a 6.47 tétel alapján a $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom}\operatorname{th} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Legyen $x_1 < x_2$. Ekkor $0 < x_2 - x_1$, tehát az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{th} x_1 - \operatorname{th} x_2 = \frac{-1}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2} \operatorname{sh}(x_2 - x_1)$$

azonosság alapján a th függvény szigorúan monoton növő a valós számok halmazán.
Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a

$$\operatorname{th} x < 1 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^{-x}$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < 1$, valamint a

$$-1 < \operatorname{th} x \quad \leftrightarrow \quad -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \leftrightarrow \quad 0 < \mathrm{e}^x$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < -1$.
A fenti bizonyításokhoz hasonlóan adott $q \in \,]-1, 1[$ megkeressük azt az $x \in \mathbb{R}$ számot, melyre $\operatorname{th} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= q \\
\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} &= q \\
\mathrm{e}^{2x} - 1 &= q\,\mathrm{e}^{2x} + q \\
\mathrm{e}^{2x} &= \frac{1+q}{1-q}
\end{aligned}$$

Mivel $\frac{1+q}{1-q} > 0$, ezért $\frac{1+q}{1-q} \in \operatorname{Dom}\log$, vagyis az

$$x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+q}{1-q}\right)$$

számra $\operatorname{th} x = q$ teljesül.
Az th függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

6.51. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

– Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis

$$\operatorname{arsh} \stackrel{\triangle}{=} \left(\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}\right)^{-1}.$$

– A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis

$$\operatorname{arch} \stackrel{\triangle}{=} \left(\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}\right)^{-1}.$$

– A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis

$$\operatorname{arth} \stackrel{\triangle}{=} \left(\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}\right)^{-1}.$$

6.52. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. *Minden* $x \in [1, \infty[$ *esetén* $\operatorname{arch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
3. *Minden* $x \in \,]-1, 1[$ *esetén* $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Bizonyítás. Az előző 6.50 tétel bizonyításban már levezettük ezeket a formulákat.

6.53. Tétel. *Az* arsh *az* arch *és az* arth *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján ezek a függvények folytonos függvények kompozíció, ezért folytonosak.

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Differenciálhatóság

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \mid \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Jelölés. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}$ jelölést is.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel,hogy az f függvény differenciálható az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Ekkor a derivált definíciója alapján
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0,$$
vagyis
$$0 = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right|,$$
amiből
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0$$
következik.
Most tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ olyan szám, melyhez létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$
Ekkor
$$0 = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right|,$$
vagyis
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0,$$
amiből
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c = 0,$$
következik, tehát f differenciálható az a pontban és $f'(a) = c$.

7.4. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x\in\operatorname{Dom} f:\quad \big(|x-a|<\delta\ \to\ |f(x)-f(a)-c(x-a)|\le\varepsilon\cdot|x-a|\big).$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a)=c$ teljesül.

Bizonyítás. Az előző állításból és a határérték definíciójából következik.

7.5. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, $f'(a)=A$ és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a differenciálhatóság jellemzése alapján létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x\in\operatorname{Dom} f:\quad \big(|x-a|<\delta\ \to\ |f(x)-f(a)-A(x-a)|\le\varepsilon\cdot|x-a|\big).$$

Vagyis minden $|x-a|<\delta$ számra

$$|f(x)-f(a)|\le(|A|+\varepsilon)\,|x-a|\,,$$

amiből $\lim\limits_a f=f(a)$ adódik. Ez pedig az f függvény folytonosságát jelenti.

7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

7.6. Tétel. *Legyen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\cap\operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;*
2. *minden $c\in\mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a)=cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a)\neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Legyen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\cap\operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. A számolás folyamán a határértékekre vonatkozó 6.10 tételt fogjuk többször felhasználni.

1.

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)$$

2.

$$\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=cf'(a)$$

3. Mivel az f függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ teljesül.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}=\\&=\lim_{x\to a}f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\end{aligned}$$

4. Mivel a g függvény folytonos az a pontban, ezért annak létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in B_r(a)$ számra $g(x)\neq 0$. A továbbiakban az a pontnak ezt a környezetét fogjuk csak tekinteni. Továbbá a g függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ teljesül. Ezek alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}=\\&=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}-\frac{f(a)}{g(x)g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

7.7. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R})$$

teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ algebra.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

7.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a g függvény differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$, tehát

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |y - g(a)| < \delta_1 \;\to\; |f(y) - f(g(a)) - f'(g(a))(y - g(a))| \leq \varepsilon_1 |y - g(a)| . \end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$, tehát

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |x - a| < \delta_2 \;\to\; |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_2 |x - a| . \end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \qquad |x - a| < \delta_3 \;\to\; |g(x) - g(a)| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_3 \;\to\; |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| .$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_2 \;\to\; |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_1 |x - a| .$$

Legyen $\delta' = \min \{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| &\leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| \\ |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| &\leq \varepsilon_1 |x - a| . \end{aligned}$$

Ezek alapján, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} &|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| = \\ &\quad = |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \\ &\qquad + f'(g(a))(g(x) - g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| \leq \\ &\quad \leq |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| + \\ &\qquad + |f'(g(a))| \cdot |(g(x) - g(a)) - g'(a)(x - a)| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| \leq \\ &\quad \leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 |x - a| + |g'(a)| |x - a|) + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| = \\ &\quad = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) |x - a| \end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a)|\right) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $|x-a| < \delta'$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - (f'(g(a)) \cdot g'(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon \cdot |x - a|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

7.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\infty} f' \qquad b \stackrel{\triangle}{=} \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az f *függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.3. Hatványsorok deriválása

7.10. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor differenciálható a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor az $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarára $R_{a'} = R_a$ teljesül a 6.34 tétel alapján.
Legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$. Ekkor a 6.35 tétel alapján létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq |z - z_0|^2 \cdot K.$$

A hatványsor deriválhatóságához a 7.4 differenciálhatóság jellemzése alapján elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in B_\rho(z_0) \cap \operatorname{Dom} P_a$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\delta = \min\left\{\rho, \dfrac{\varepsilon}{K}\right\}$ számra teljesül, hogy minden $z \in B_\delta(z_0)$ esetén

$$|z - z_0|^2 \cdot K \leq |z - z_0| \cdot \delta \cdot K \leq |z - z_0| \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Vagyis minden $z \in B_\delta(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

Tehát P_a differenciálható a z_0 pontban és $(P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0)$.

7.11. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n})' = -n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n-1}$.)*

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

7.12. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. A 7.10 tétel alapján minden $z \in B_{R_a}(0)$ esetén $(P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0)$, ahol a' az $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ képlettel definiált sorozat. Ezt összevetve a fenti tétellel

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' \Big|_{z=z_0} &= (P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z_0^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k z_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k z^k)' |_{z=z_0}\end{aligned}$$

adódik.

7.13. Tétel. *(Elemi függvények deriváltja.)* $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra.
Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z.$$

7.4. Középértéktételek

7.14. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A 6.27 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a, b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in]a, b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in]a, b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \lim\limits_{x\to\alpha+} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \lim\limits_{x\to\alpha-} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.
Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in]a, b[$ teljesül.

7.15. Tétel. *(Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Bizonyítás. Elég Rolle-tételt alkalmazni a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

függvényre.

7.16. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Bizonyítás. Cauchy-tételt kell alkalmazni a $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre.

7.17. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a| .$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle középérték tétel közvetlen következménye.

7.18. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a, b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.
1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növő.
3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növő.
A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

7.5. Függvény inverzének deriválása

7.19. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható és minden $b \in f(I)$ pontra*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$. Mivel $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$, ezért f szigorúan monoton növő, tehát invertálható is, valamint f differenciálhatósága miatt f folytonos.

1. Megmutatjuk, hogy $f(I)$ intervallum. Legyen $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, valamint legyen $x_1 = f^{-1}(y_1)$ és $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - c$$

függvényre teljesülnek a 6.29 Bolzano-tétel feltételei, ezért létezik olyan $v \in]x_1, x_2[$, melyre $f(v) = c$, vagyis $c \in f(I)$. Ezek alapján minden $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$ esetén $[y_1, y_2] \in f(I)$, tehát $f(I)$ intervallum.
2. Legyen $b \in f(I)$ tetszőleges. Vezessük be az $a = f^{-1}(b)$ és a $g = f^{-1}$ jelölést. Mivel $a \in I$ és I nyílt, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_1}(a) \subseteq I$. Ekkor $T = \left[a - \frac{r_1}{2}, a + \frac{r_1}{2}\right] \subseteq I$ és

$$f\left(a - \frac{r_1}{2}\right) < f(a) < f\left(a + \frac{r_1}{2}\right).$$

Mivel $f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right) \in I$ és $f(I)$ intervallum, ezért

$$b \in \left]f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right)\right[\subseteq I.$$

Vagyis a $\delta_1 = \min\left\{b - f\left(a - \frac{r_1}{2}\right), f\left(a + \frac{r_1}{2}\right) - b\right\}$ számra $B_{\delta_1}(b) \subseteq I$ teljesül, vagyis az $f(I)$ halmaz nyílt. Az $f' : T \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény felveszi minimumát a T kompakt halmazon. Tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $c \in T$ esetén $K \leq f'(c)$. Vagyis a Lagrange-féle középértéktétel alapján minden $x \in T$ számra

$$K\,|a - x| \leq |f(a) - f(x)| \tag{7.1}$$

teljesül. Tehát, ha $y \in f(I)$ olyan, hogy $|y - b| < \delta_1$, akkor $x = g(y) \in T$ és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$|g(b) - g(y)| \leq \frac{1}{K}\,|b - y|. \tag{7.2}$$

Megmutatjuk, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $\delta = \min\{\varepsilon K, \delta_1\}$, akkor minden $y \in f(I)$ számra fennáll az

$$|y - b| < \delta \quad \to \quad |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

implikáció. Valóban, ha $y \in f(I)$ olyan, hogy $|y - b| < \delta$, akkor $x = g(y) \in T$ és a (7.2) egyenlőtlenség alapján

$$|g(b) - g(y)| \leq \frac{1}{K}\,|b - y| < \frac{1}{K} \cdot K\varepsilon = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy az f^{-1} függvény folytonos a $b \in f(I)$ pontban.
Megmutatjuk, hogy a g függvény differenciálható a $b \in f(I)$ pontban és

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

teljesül. Ehhez a differenciálás jellemzése alapján elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in f(I)$ elemre

$$|y - b| < \delta \quad \to \quad \left|g(y) - g(b) - \frac{1}{f'(g(b))}(y - b)\right| \leq \varepsilon \cdot |y - b|.$$

teljesül. Felírva az f függvény a pontbeli deriválhatóságát és a g függvény b pontbeli folytonosságát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' \in \mathbb{R}^+ \exists \delta' \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I : &\qquad |x - a| < \delta' \;\to\; |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \varepsilon' \cdot |x - a| \\ \forall \varepsilon'' \in \mathbb{R}^+ \exists \delta'' \in \mathbb{R}^+ \forall y \in f(I) : &\qquad |y - b| < \delta'' \;\to\; |g(y) - g(b)| < \varepsilon'', \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon^* \in \mathbb{R}^+ \exists \delta^* \in \mathbb{R}^+ \forall y \in f(I) : \\ &\quad |y - b| < \delta^* \;\to\; |f(g(y)) - f(g(b)) - f'(a)(g(y) - g(b))| \leq \varepsilon^* \cdot |g(y) - g(b)|, \end{aligned}$$

teljesül. (Az $\varepsilon' = \varepsilon^*$ választással kapott δ' paramétert választva ε'' számnak, a hozzá tartozó δ'' adja a δ^* mennyiséget.) Ha felhasználjuk, hogy f és g egymás inverzei, akkor

$$\forall \varepsilon^* \in \mathbb{R}^+ \exists \delta^* \in \mathbb{R}^+ \forall y \in f(I): \quad |y-b| < \delta^* \;\rightarrow\; |y - b - f'(a)(g(y)-a)| \leq \varepsilon^* \cdot |g(y)-a|\,, \tag{7.3}$$

adódik. A (7.2) egyenlet alapján alapján

$$\forall y \in f(I): \quad |y-b| < \delta_1 \;\rightarrow\; |g(y)-a| \leq \frac{1}{K}\,|y-b|\,.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ezek után legyen $\varepsilon^* = |f'(a)|\,K\varepsilon$, illetve $\delta = \min\{\delta_1, \delta^*\}$, ahol δ^* az ε^* paraméterhez tartozó paraméter a (7.3) egyenletben. Ha $|y-b| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}\left|g(y) - g(b) - \frac{1}{f'(g(b))}(y-b)\right| &= \frac{1}{|f'(a)|} \cdot |y - b - f'(a)(g(y)-g(b))| \leq \\ &\leq \frac{1}{|f'(a)|} \cdot |f'(a)|\,K\varepsilon \cdot |g(y)-a| \leq K\varepsilon \cdot \frac{1}{K}\,|y-b| = \\ &= \varepsilon \cdot |y-b|\,,\end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

7.6. Elemi függvények inverzének deriválása

7.20. Tétel. *(Elemi függvények inverzének a deriváltja.)*

1. *Minden* $x \in \mathbb{R}^+$ *számra* $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. *Minden* $x \in\,]-1,1[$ *esetén* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. *Minden* $x \in\,]-1,1[$ *esetén* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. *Minden* $x \in\,]1,\infty[$ *esetén* $\operatorname{arch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \exp$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$$

teljesül.
2. Legyen $x \in\,]-1,1[$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \sin$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

teljesül. Mivel

$$1 = \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

ezért

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Abból, hogy a sin függvény szigorúan monoton növő a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon következik, hogy az arcsin függvény is szigorúan monoton növő, vagyis $\arcsin' > 0$. Ezek alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Az arcsin függvénynél bemutatott gondolatmenet alapján bizonyítható.
4. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \mathrm{tg}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}\,x)} = \cos^2 \mathrm{arctg}\,x$$

teljesül. Mivel

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(\mathrm{arctg}\,x) + \sin^2(\mathrm{arctg}\,x) \\ \frac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)} &= 1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,x) \\ \frac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)} &= 1 + x^2, \end{aligned}$$

ezért $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. 5. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.19 tételt alkalmazva az $f = \mathrm{sh}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{arsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{arsh}\,x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mathrm{arsh}\,x}$$

teljesül. Mivel minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{ch}\,a = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 a}$, ezért $\mathrm{ch}\,\mathrm{arsh}\,x = \sqrt{1+x^2}$, vagyis

$$\mathrm{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6–7. A 7.19 tétel és a 6.52 tételben szereplő formulák segítségével könnyen igazolható.

7.21. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a $\mathrm{Ran}\,f$ halmazon és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\,f^{-1}$ elemre.*

f	$\mathrm{Dom}\,f$	$\mathrm{Ran}\,f$	f'	f^{-1}	$\mathrm{Dom}\,f^{-1}$	$\mathrm{Ran}\,f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	exp	log	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	cos	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1,\infty[$	sh	arch	$[1,\infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$	arth	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló.

7.22. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*
1. *Ha $a \in [1,\infty[$, akkor az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^a$ függvény deriváltja $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.*
2. *Ha $a \in]-\infty,1[$, akkor az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^a$ függvény deriváltja $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{a-1}$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in [1, \infty[$ és $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ az $f(x) = x^a$ függvény. Ekkor

$$f'(x) = (\exp(a\log(x)))' = \exp(a\log(x))a\frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

teljesül a hatványozás definíciója, a láncszabály és az exponenenciális valamint a logaritmus függvény deriválási szabálya alapján.

7.7. L'Hospital szabály

7.23. Tétel. *(L'Hospital szabály.) Legyen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g'(]a, b[)$.*

1. Ha $\lim\limits_{b-} f = \lim\limits_{b-} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim\limits_{b-} \dfrac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{b-} \dfrac{f}{g}$ határérték is és

$$\lim_{b-} \frac{f}{g} = \lim_{b-} \frac{f'}{g'}.$$

2. Ha $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim\limits_{a+} \dfrac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{a+} \dfrac{f}{g}$ határérték is és

$$\lim_{a+} \frac{f}{g} = \lim_{a+} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g'(]a, b[)$, valamint $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g \in \{0, \infty\}$. Ennek a bizonyításnak a mintájára igazolható a többi eset is.
1. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = 0$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim\limits_{a+} \dfrac{f}{g} = A$ határértéket. Terjesszük ki az f és g függvényt az a pontra is a 0 értékkel és jelölje $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ ezeket a függvényeket. Legyen $c \in]a, b[$ tetszőleges pont. Ekkor az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, c]$ intervallumon az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]a, c[$, melyre

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tehát ha $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\xi \in]a, a + \delta[$ esetén

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon,$$

akkor az $x \in]a, a + \delta[$ számokra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül.
2. Most tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = \infty$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta[$ számra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim\limits_{a+} \dfrac{f}{g} = A$ határértéket.

Mivel $\lim\limits_{a+} \dfrac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_1[$ esetén $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < 1$, vagyis minden $x \in]a, a+\delta_1[$ számra

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < 1 + |A|$$

teljesül, tehát az $\dfrac{f'}{g'}$ függvény korlátos a $]a, a+\delta_1[$ halmazon.

Mivel $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a+} g = \infty$, ezért létezik olyan $c \in]a, a+\delta_1[$, hogy minden $x \in]a, c]$ esetén $f(x), g(x) > 0$. Mégegyszer alkalmazva ezt az elvet, azt kapjuk, hogy létezik olyan $d \in]a, c[$, hogy minden $x \in]a, d]$ esetén $f(x) > f(c)$ és $g(x) > g(c)$. Vezessük be a

$$T :]a, d[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}$$

függvényt. Legyen $z \in]a, d[$ tetszőleges pont. Ekkor az f és g függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt a $[z, c]$ intervallumon, az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]z, c[$, melyre

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

vagyis az

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{T(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

egyenlőség alapján

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} T(z) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1\right),$$

tehát

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - A\right| \le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(T(z) - 1\right)\right|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim\limits_{a+} \dfrac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_2[$ esetén

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a+0} T(x) = 1$ és az $\dfrac{f'}{g'}$ korlátos a $]a, d[$ halmazon, ezért létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a+\delta_3[$ esetén

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)} \left(T(x) - 1\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül minden $z \in]a, d[$ számra. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ olyan szám, hogy minden $x \in]a, a+\delta[$ számra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

7.8. Többszörös deriváltak

7.24. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$ és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.25. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.*

Bizonyítás. 1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény és legyen $a, b \in I$, $a < b$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(a) \leq f'(b)$. Minden $x \in]a, b[$ esetén

$$x = \frac{x-a}{b-a} b + \frac{b-x}{b-a} a,$$

valamint $\dfrac{x-a}{b-a}, \dfrac{b-x}{b-a} \in [0, 1]$ és $\dfrac{x-a}{b-a} + \dfrac{b-x}{b-a} = 1$. Tehát az f függvény konvexitása alapján

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a} b + \frac{b-x}{b-a} a\right) \leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a).$$

Rövid számolással ebből az egyenlőtlenségből

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

adódik, amiből

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \\ &\leq \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b) \end{aligned}$$

következik.
Megfordítva, legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' monoton növő és legyen $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $t \in [0, 1]$ számra

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

teljesül, vagy másképp, hogy a

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b)$$

függvényre $g \leq 0$ teljesül. A g függvény a folytonossága és a $[0, 1]$ kompaktsága miatt felveszi a maximumát valamely $t_0 \in [0, 1]$ pontban. Tegyük fel, hogy $g(t_0) = c > 0$. Ekkor a Rolle-tétel bizonyítása alapján $g'(t_0) = 0$. Mivel f' monoton növő és

$$g'(t) = f'(t(a-b) + b)(a-b) - f(a) + f(b),$$

ezért g' is monoton növő. Tehát minden $z \in]t_0, 1[$ esetén $g'(z) \geq 0$. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva a $[t_0, 1]$ intervallumra, azt kapjuk, hogy létezik olyan $z \in]t_0, 1[$, melyre

$$g(1) - g(t_0) = g'(z)(1 - t_0),$$

azonban $g(1) - g(t_0) = 0 - c < 0$ és $g'(z)(1 - t_0) \geq 0$. Mivel ellentmondást kaptunk így a $g(t_0) = c > 0$ feltételezés nem helytálló, vagyis a g függvény maximuma nem lehet szigorúan pozitív.
2. A konkáv eset a -1 számmal való szorzással visszavezethető a konvex esetre.

7.26. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.*

Bizonyítás. A 7.25 előző állítás és a 7.18 tétel alapján nyilvánvaló.

7.27. Tétel. *(Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

Bizonyítás. Az exponenciális függvény konvexitásából és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \log x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(\log x_k)$$

7.28. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{\beta}.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Ha $0 < x, y$, akkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján minden $i \in \{1, \dots, n\}$ számra

$$\left(\frac{x_i}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_i}{y}\right)^{\beta} \leq \alpha \left(\frac{x_i}{x}\right) + \beta \left(\frac{y_i}{y}\right)$$

teljesül, melyet összegezve az i indexre

$$\frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \alpha \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha + \beta = 1$$

adódik. Ennek átrendezése a bizonyítandó egyenlőtlenség.

7.29. Tétel. *(Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n \left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

adódik, aminek az átrendezése a bizonyítandó tétel.

7.9. Taylor-sorfejtés

7.30. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \lambda(b-x)^p.$$

függvényt. Ekkor a

$$\begin{aligned}g(a) &= f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \lambda(b-a)^p \\ g(b) &= 0\end{aligned}$$

egyenlőségből látszik, hogy a

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^p}\left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$$

választás esetén $g(a) = g(b) = 0$ teljesül. Mivel a g függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében, valamint $g(a) = g(b) = 0$, ezért a Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in]a, b[$ pont, melyre $g'(\xi) = 0$ teljesül.
Most meghatározzuk a g' függvényt.

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\right)' + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\ &= -\sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}\right) + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + p\lambda(b-x)^{p-1} =\end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + p\lambda(b-x)^{p-1} =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1}.$$

Vagyis a $g'(\xi) = 0$ egyenletből

$$-\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(b-x)^n + \lambda p(b-\xi)^{p-1} = 0$$

adódik, amibe beírva λ értékét és átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséghez jutunk.

7.31. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

7.33. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T^f_{1,a}$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.34. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)} \cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$ és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T^f_{n,a}$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Az $n = 0$ esetben nyilvánvaló az állítás, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 1$. Legyen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

olyan polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $j \in \{0, \ldots, n\}$ esetén

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} b_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}$$

teljesül. Az n-ed rendben való érintkezés miatt minden $j \in \{0, \ldots, n\}$ számra

$$f^{(j)}(a) = P_n^{(j)}(a) \quad \to \quad f^{(j)}(a) = j! \cdot b_j$$

teljesül, vagyis $b_j = \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ezért

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T^f_{n,a}(x).$$

7.36. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

Bizonyítás. A tételt az n paraméter szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(1)}$. Ekkor $T^f_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ egyenlőség miatt a bizonyítandó határérték

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{|x-a|} = 0,$$

mely következik a differenciálhatóság általános jellemzéséből (7.3 tétel).
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített szám. Tegyük fel, hogy minden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre és $a \in \mathbb{R}$ pontra, $a \in \operatorname{Dom} g^{(n)}$ esetén

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T^g_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n+1,a}(x)}{|x-a|^{n+1}} = 0.$$

Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül és tekintsük a

$$h : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) - T^f_{n+1,a}(x)$$

függvényt. Mivel

$$\left(T^f_{n+1,a}\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = T^{f'}_{n,a}(x),$$

ezért

$$h'(x) = f'(x) - T^{f'}_{n,a}(x).$$

A $g = f'$ függvényre alkalmazva az indukciós hipotézist a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T^{f'}_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0$$

határértéket kapjuk, vagyis

$$\lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left| \frac{h'(z)}{|z-a|^n} \right| < \varepsilon,$$

vagyis

$$|h'(z)| < \varepsilon \cdot |z-a|^n .$$

Legyen $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges és alkalmazzuk a véges növekmények formuláját a h függvényre az a és x végpontú szakaszra, melyet jelöljön J.

$$|h(x) - h(a)| = |h(x)| \le \left(\sup_{z\in J} |h'(z)| \right) \cdot |x-a| \le \varepsilon \cdot \left(\sup_{z\in J} |z-a|^n \right) \cdot |x-a| < \varepsilon \cdot |x-a|^{n+1}$$

Vagyis megmutattuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)\setminus\{a\}$ esetén

$$\left| \frac{h(x)}{|x-a|^{n+1}} \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{|x-a|^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^{f}_{n+1,a}(x)}{|x-a|^{n+1}} = 0$$

határértéket jelenti.

7.10. Lokális szélsőérték jellemzése

7.37. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.38. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \ne 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) < 0$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) > 0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$ teljesül, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$. Az 1. pontot igazoljuk, a második pont a -1 számmal való szorzással visszavezethető az elsőre.
Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $]a-r, a+r[\subseteq \operatorname{Dom} f$. Az infinitezimális Taylor-formula alapján (7.36 tétel) a

$$\varphi :]a-r, a+r[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvény folytonos, továbbá a deriváltakra vonatkozó feltételek miatt

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

vagyis az $x \neq a$ esetben

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{|x-a|^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^n}{|x-a|^n},$$

amiből

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^n}{|x-a|^n} + \varphi(x) \right) \tag{7.4}$$

következik.
1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban. Ekkor létezik olyan δ_1, hogy minden $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$. Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$. Ha n páros, akkor (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right),$$

vagyis minden $x \in]a-\delta, a+\delta[$ számra

$$0 > \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \quad \to \quad -n!\varphi(x) > f^{(n)}(a),$$

amiből a $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt $0 \geq f^{(n)}(a)$ adódik, azonban feltettük, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$, ezért $0 > f^{(n)}(a)$.
Ha n páratlan, akkor a $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[$ esetén

$$\varphi(x) < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|.$$

Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$.
Ha $0 < f^{(n)}(a)$ és $x \in]a, a+\delta[$, akkor $a < x$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = 1$, tehát a (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
Ha $0 > f^{(n)}(a)$ és $x \in]a-\delta, a[$, akkor $x < a$, $\dfrac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = -1$, tehát a (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.
2. Tegyük fel, hogy n páros és $f^{(n)}(a) < 0$. A (7.4) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right).$$

A $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $]a-\delta_1,a+\delta_1[$ esetén

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\varphi(x)<0.$$

Ekkor a $\delta=\min\{r,\delta_1\}$ számra teljesül az, hogy minden $x\in\,]x-\delta,x+\delta[\,\setminus\{a\}$ elemre

$$f(x)-f(a)=|x-a|^n\cdot\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\varphi(x)\right)<0,$$

vagyis $f(x)<f(a)$.

7.39. Tétel. *Legyen $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ és $r\in\mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a)\subseteq\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy*

$$\exists K\in\mathbb{R}\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in B_r(a):\ \left(\left|f^{(n)}(x)\right|\le K\right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\qquad\forall x\in B_r(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ és $r\in\mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a)\subseteq\operatorname{Dom} f$, továbbá legyen $K\in\mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in B_r(a):\ \left(\left|f^{(n)}(x)\right|\le K\right)$$

teljesül. Legyen $x\in B_r(a)$ rögzített szám. A Taylor-formula alapján, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y\in B_r(a)$, hogy

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le\frac{K}{(n+1)!}r^{n+1}.$$

Mivel az $n\mapsto\dfrac{K}{(n+1)!}r^{n+1}$ sorozat a nullához tart, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|=0$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

7.40. Definíció. Legyen $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $a\in\operatorname{Dom} f$. Azt mondjuk, hogy az f *függvény analitikus az a pontban* ha létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$ és olyan $s:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat, hogy $B_r(a)\in\operatorname{Dom} f$, valamint a

$$P_{s,a}(x)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}s_k(x-a)^k$$

hatványsor abszolút konvergens minden $x\in B_r(a)$ elemre, és $P_{s,a}=f$ teljesül a $B_r(a)$ halmazon. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *analitikus*, ha analitikus minden $a\in\operatorname{Dom} f$ pontban. Adott $A\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű analitikus függvények halmazát $C^\omega(A,\mathbb{R})$ jelöli.

7.41. Tétel. *Legyen $c\in\mathbb{K}$ és $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ olyan sorozat, melyre létezik $r\in\mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x\in B_r(0)$ esetén*

$$P_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a=b$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A hatványsorok n-edik deriváltja

$$P_a^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = P_b^{(n)}(x).$$

Amiből az $x = 0$ helyettesítés után $a_n = b_n$ adódik. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, ezért $a = b$.

7.42. Tétel. *Ha $x \in]-1, 1[$, akkor*

$$\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Bizonyítás. Az $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, ezért minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

függvény. Valamint $\mathrm{Dom} \log = \mathbb{R}^+$ miatt minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$f(x) = \log(1 + x)$$

függvény. A hatványsor illetve a logaritmus függvény deriválási szabály alapján

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x)}$$
$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k .$$

Mivel $|x| < 1$, ezért a geometriai sor összegképlete alapján $(f - g)' = 0$ a $]-1, 1[$ intervallumon. Vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in]-1, 1[$ esetén $f(x) = C + g(x)$. Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért $C = 0$. Vagyis minden $x \in]-1, 1[$ számra $f(x) = g(x)$.

7.11. Binomiális sorfejtés

7.43. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

7.44. Tétel. *(Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1, 1[$ esetén*

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = (1 + x)^\alpha$ és $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. A

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha - k + 1}{k - 1} \right| = 1,$$

határérték alapján a hatványsor konvergenciasugara 1, vagyis minden $x \in]-1,1[$ esetén a $P(x)$ hatványsor konvergens.

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$. Ez az

$$\begin{aligned}
P'(x)f(x) - f'(x)P(x) &= (1+x)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \\
&= (1+x)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{k}x^k\right) = \\
&= (1+x)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right)x^k - \alpha\right) = \\
&= (1+x)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right)x^k = 0
\end{aligned}$$

egyenlőségből következik, ahol felhasználtuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k} = 0.$$

Mivel $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $f = cP$ teljesül a $]-1,1[$ halmazon. Továbbá az $f(0) = P(0)$ miatt $c = 1$, vagyis $f = P$.

8. Határozatlan integrál

8.1. Primitív függvény és tulajdonságai

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az *f függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

8.2. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor*

$$\int f = \{F + C|\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.
Ha $G \in (F + C|\ C \in \mathbb{R})$, akkor létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, melyre $G = F + C$. Ekkor $G' = F' = f$, vagyis a G függvény is az f primitívfüggvénye.
Ha $G : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye, akkor $G' = f$, tehát $(G - F)' = 0$. Ebből a 7.18 tétel alapján következik, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, szám, hogy $G - F = C$, vagyis $G \in (F + C|\ C \in \mathbb{R})$.

Jelölés. A fenti tétel miatt, ha F az f függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

8.3. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. Az $F, G : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \qquad (cF)' = cF'$$

deriválási szabályból következik.

8.4. Tétel. *(Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \exp = \exp + C \qquad \int \sin = -\cos + C \qquad \int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \log|x| + C \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + C \qquad \int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + C$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C$$

Bizonyítás. A primitív függvények deriválásával könnyen bizonyíthatóak az egyenlőségek.

8.2. Integrálási módszerek

8.5. Tétel. *(Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye.
Legyen $F \in fg - \int (fg')$. Ekkor

$$fg - F \in \int (fg') \quad \to \quad (fg - F)' = fg' \quad \to \quad f'g + fg' - F' = fg' \quad \to \quad F' = f'g,$$

vagyis $F \in \int (f'g)$, ezért az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, valamint

$$fg - \int (fg') \subseteq \int (f'g)$$

teljesül.
Most megmutatjuk, hogy $\int (f'g) \subseteq fg - \int (fg')$. Ehhez legyen $F \in \int (f'g)$. Ekkor a bizonyítandó $F \in fg - \int (fg')$ kifejezés ekvivalens alakja az alábbi.

$$fg - F \in \int (fg')$$

Ez viszont egyszerűen adódik az

$$(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

deriválásból.

8.6. Tétel. *(Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f \right) \circ \varphi.$$

Bizonyítás. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus.
Megmutatjuk, hogy az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $F \in \int f$ és legyen $G = F \circ \varphi$. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

vagyis $G \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$. A fenti gondolatmenetből

$$\left(\int f \right) \circ \varphi \subseteq \int (f \circ \varphi)\varphi'$$

is következik.
Most igazoljuk, hogy

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' \subseteq \left(\int f \right) \circ \varphi$$

teljesül. Legyen $F \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$, ami azt jelenti, hogy $F' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Azt kell igazolni, hogy $F \circ \varphi^{-1} \in \int f$, ami ekvivalens azzal, hogy $(F \circ \varphi^{-1})' = f$. A függvénykompozíció deriválására vonatkozó láncszabály és az inverzfüggvény deriválására vonatkozó

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}.$$

szabály felhasználásával a bizonyítandó

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi^{-1})' &= \left(F' \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)' = \\ &= \left(((f \circ \varphi) \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \\ &= \left(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f\end{aligned}$$

egyenlőség adódik.

8.7. Tétel. *(Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{aligned}
&\int \arcsin(x)\ \mathrm{d}\,x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C && x \in]-1,1[\\
&\int \arccos(x)\ \mathrm{d}\,x = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C && x \in]-1,1[\\
&\int \mathrm{arctg}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C && x \in \mathbb{R}\\
&\int \mathrm{arsh}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arsh}\,x - \sqrt{1+x^2} + C && x \in \mathbb{R}\\
&\int \mathrm{arch}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arch}\,x - \sqrt{x^2-1} + C && x \in]1,\infty[\\
&\int \mathrm{arth}(x)\ \mathrm{d}\,x = x\,\mathrm{arth}\,x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C && x \in]-1,1[\\
&\int \log(x)\ \mathrm{d}\,x = x\log(x) - x + C && x \in]0,\infty[
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Mindegyik formula a parciális integrálás következménye.
Az első integrált megmutatjuk részletesen. Legyen

$$\begin{aligned} f &:]-1,1[&& x \mapsto x\\ g &:]-1,1[&& x \mapsto \arcsin x\\ \varphi &:]-1,1[&& x \mapsto \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Ekkor f, g és φ differenciálható függvény, valamint

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

formula felhasználásával azt kapjuk, hogy az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, hiszen

$$(-\varphi)' = fg' \quad \to \quad -\varphi \in \int (fg')\,.$$

A 8.5 parciális integrálás tétele alapján az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül, ami ebben az esetben az alábbi egyenlőséget jelenti.

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = \\ &= x\arcsin x - (-\varphi(x)) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

8.8. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az*

$$\int \sin^n \cos^m$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. Ha $m = 0$, akkor

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1 - \cos t)^k \, \mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ -\displaystyle\int (1 - t^2)^k \, \mathrm{d}\,t, & t = \cos x \quad \textit{ha} \quad n = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. Ha $n = 0$, akkor

$$\int \cos^m x \, \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\int (1 + \cos t)^k \, \mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \displaystyle\int (1 - t^2)^k \, \mathrm{d}\,t, & t = \sin x \quad \textit{ha} \quad m = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.

4. Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2k} t)(1 + \cos t)^{l-k} \, \mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n \le m, \\ \dfrac{1}{2^{k+l+1}} \displaystyle\int (\sin^{2l} t)(1 - \cos t)^{k-l} \, \mathrm{d}\,t, & t = 2x \quad \textit{ha} \quad n > m. \end{cases}$$

Bizonyítás. A helyettesítéses integrálás alapján egyszerűen igazolható.

8.9. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. Ekkor az $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{(ax + b)^n} \, \mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \log|ax + b| + C, & \textit{ha } n = 1; \\ \dfrac{1}{a(1 - n)} \cdot \dfrac{1}{(ax + b)^{n-1}} + C, & \textit{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) + C,$$

és ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2 + bx + c \ne 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log\left|\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C$$

teljesül.

3. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \ne 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} |\ ax^2 + bx + c \ne 0\}$ halmazon

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} \, \mathrm{d}\,x = \frac{2ax + b}{(1 - n)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ + \frac{2(2n - 3)a}{(1 - n)(b^2 - 4ac)} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \, \mathrm{d}\,x.$$

4. Az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmazon*

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x.$$

5. Ha $n>1$ *és* $b^2-4ac \neq 0$, *akkor az* $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c \neq 0\}$ *halmazon*

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ + \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Bizonyítás. Deriválással egyszerűen adódik.

8.3. Parciális törtekre bontás

8.10. Tétel. *(Parciális törtekre bontás.) Legyen* $P_n(x)$ *egy tetszőleges* n*-ed fokú-,* $Q_m(x)$ *pedig egy olyan* m*-ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója* 1.

1. *Ha* $n \geq m$, *akkor létezik egyetlen olyan* $\bar{P}(x)$ $(n-m)$*-ed fokú- és* m*-nél kisebb fokú* $\tilde{P}(x)$ *polinom, hogy*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \bar{P}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. *A* Q_m *polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott* $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(p_i,q_i)_{i=1,\ldots,l}$ *páronként különböző valós számok és számpárok, valamint* $(z_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(v_i)_{i=1,\ldots,l}$ *természetes számok, hogy minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$Q_m(x) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x+\lambda_i)^{z_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{v_i}\right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1 \leq i \leq l$ *esetén sem létezik valós gyöke az* $x^2+p_ix+q_i$ *polinomnak. Ha* $n<m$, *akkor egyértelműen léteznek olyan* $(\mu_{ij})_{i=1,\ldots,k;j=1,\ldots,z_i}$, $(\alpha_{ij},\beta_{ij})_{i=1,\ldots,l;j=1,\ldots,v_i}$ *valós számok, hogy*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{z_i}\frac{\mu_{ij}}{(x+\lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{v_i}\frac{\alpha_{ij}x+\beta_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

teljesül minden $x \in \operatorname{Dom}\dfrac{P_n}{Q_m}$ *elemre.*

8.11. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $l \in \mathbb{Z}^n$. Ekkor $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$x^{[l]} \triangleq \prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}.$$

Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}^+$. Ha minden $1 \leq j \leq k$ esetén $l_j \in \mathbb{Z}^n$ és $c_j \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{k} c_j x^{[l_j]}$$

függvényt n *változós polinomnak* nevezzük.

8.12. Definíció. (*Racionális függvény.*)

– Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt *racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P,Q polinomok, hogy $f=\dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

– Az $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt n *változós racionális függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan P, Q n változós polinomok, hogy $f = \dfrac{P}{Q}$ teljesül a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

8.13. Tétel. *(Csebisev-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $m, n, p \in \mathbb{Q}$, ahol $p = \dfrac{q}{r}$ valamilyen q egészre. Az*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}\, x$$

integrál csak az alábbi három esetben fejezhető ki elemi függvények segítségével.

1. *Ha $p \in \mathbb{Z}$. Az integrál meghatározásához a binomiális kifejtés alkalmazandó az $(a+bx^n)^p$ kifejezésre.*
2. *Ha $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*
3. *Ha $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{b + ax^{-n}}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*

8.14. Tétel. *Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény. Ekkor az alábbi integrálok a megadott helyettesítések rekurzív alkalmazásával racionális törtfüggvények integráljává transzformálhatók. Az integráloknál $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ továbbá $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \operatorname{sh} t \text{ vagy } x = a \operatorname{tg} t$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \operatorname{ch} t \text{ vagy } x = a \frac{1}{\cos t}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, \mathrm{d}\, x \qquad x = a \sin t \text{ vagy } x = a \cos t$$

$$\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}\, x \qquad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Az $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, \mathrm{d}\, x$ integrálnál

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x, & \text{ha} \quad a > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}, & \text{ha} \quad c > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda_1), & \text{ha} \quad ax^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \end{cases}$$

alkalmazandó.

Bizonyítás. Az utolsó esetet bizonyítjuk, a többi teljesen hasonló gondolatmenettel igazolható. Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény és $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Ekkor a trigonometrikus függvényekre vonatkozó összefüggések alapján

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

valamint

$$\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Vagyis az eredeti integrál felírható az

$$\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}\, x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \, \mathrm{d}\, t$$

alakban, ami a t változónak racionális törtfüggvénye.

9. Határozott integrál

9.1. A *majdnem mindenütt* tulajdonság

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\leq b}} \{[a,b]\,,[a,b[,]a,b],]a,b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}^+ \qquad [a,b]\,,[a,b[,]a,b],]a,b[\mapsto b-a.$$

Jelölés. Adott $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén sokszor fogjuk tekinteni az a és b pontok által meghatározott intervallumokat. Azokban az esetekben, mikor mondanivalónk érvényes az $[a,b]$,$[a,b[$, $]a,b]$ és $]a,b[$ intervallumok mindegyikére, az $\wr a,b\wr$ szimbólummal fogunk élni.

9.2. Tétel. *Ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ teljesül, akkor $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{I}_0$ és*

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) \leq \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

Bizonyítás. Legyen $A_1 = \wr a_1, b_1\wr$ és $A_2 = \wr a_2, b_2\wr$.
Ha $b_1 = a_2$, akkor az $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ feltétel miatt $A_1 = \wr a_1, b_1]$ és $A_2 = [a_2, b_2\wr$, tehát $A_1 \cup A_2 = \wr a_1, b_2\wr \in \mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = b_2 - a_1 = b_2 - a_2 + b_1 - a_1 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

Ha $b_1 > a_2$, akkor $A_1 \cup A_2 = \wr \min\{a_1, a_2\}, \max\{b_1, b_2\}\wr \in \mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = \max\{b_1, b_2\} - \min\{a_1, a_2\} \leq b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2),$$

ahol felhasználtuk az $a_1 \leq b_1$ és $a_2 \leq b_2$ egyenlőtlenséget.

9.3. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon.$$

9.4. Tétel. *(Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy*

   $$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \textit{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon$$

   teljesül.
2. *Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.*
3. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is nulla mértékű.*
4. *Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.*

Bizonyítás. 1. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \in \mathfrak{I}_0$,

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Legyen

$$N_p = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists c_n \in \mathbb{R} :\ A_n = \{c_n\}\}$$
$$N_r = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} :\ a_n < b_n\ \wedge\ A_n = \wr a_n, b_n \wr\} .$$

Ekkor $N_p \cap N_r = \emptyset$ és $N_p \cup N_r = \mathbb{N}$. Minden $n \in N_r$ számhoz létezik olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \wr a_n, b_n \wr$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] \frac{3a_n - b_n}{2}, \frac{3b_n - a_n}{2} \right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = 2\mu_0(A_n)$. Minden $n \in N_p$ számhoz létezik olyan $c_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \{c_n\}$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] c_n - \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n} \right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}$. Az így definiált nyílt halmazokból álló $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}_r} \mu_0(U_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_p} \mu_0(U_n) < 2 \sum_{n \in \mathbb{N}_r} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_p} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} \leq$$
$$\leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül.
2. A definíció alapján nyilvánvaló.
3. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $n \in \mathbb{N}$ paraméterhez tartozó A_n halmaz nulla mértékű, ezért létezik olyan $(U_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $U_{n,i} \in \mathfrak{I}_0$, $A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i}$ és $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i} = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{\sigma(k)},$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_{\sigma(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

4. Mivel az egy elemű halmaz nulla mértékű, ezért az előző pont alapján nyilvánvaló.

9.5. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]\,, [a, b[\,,]a, b]\,,]a, b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és ehhez definiáljuk az $\alpha = \dfrac{3a + b}{4}$ és $\beta = \dfrac{a + 3b}{4}$ számokat. Mivel

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]\,, [a, b[\,,]a, b]\,,]a, b[\,,$$

ezért elég igazolni, hogy $[\alpha, \beta]$ nem nulla mértékű. Indirekt, tegyük fel, hogy $[\alpha, \beta]$ nulla mértékű. Ekkor a 9.4 tétel alapján létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer, melyre

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

teljesül, továbbá feltehetjük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[\alpha, \beta] \cap U_n \neq \emptyset$, hiszen egyébként kihagyhatjuk az $[\alpha, \beta]$ halmaz lefedéséből. Mivel az $[\alpha, \beta]$ halmaz kompakt, ezért véges sok nyílt halmazzal is lefedhető, vagyis létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} U_n.$$

Ezek után tekintsük az alábbi konstrukciót.

– Mivel $\alpha \in \bigcup_{n=0}^{N} U_n$, ezért létezik olyan $r_0 \in \{0, \ldots, N\}$ szám, melyre $\alpha \in U_{r_0}$ teljesül, és legyen $L_0 = U_{r_0}$.
– Ha már valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén r_i és L_i definiált, akkor ha $\beta < \sup L_i$ teljesül, akkor ne definiáljunk több elemet, ha pedig $\beta \geq \sup L_i$, akkor a

$$\sup L_i \in \left(\bigcup_{n=0}^{N} U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{i} U_{r_k} \right)$$

tartalmazás miatt létezik olyan $m \in \{0, \ldots, N\} \setminus \{r_k | k = 0, \ldots, i\}$ elem, melyre $\sup L_i \in U_m$ teljesül. Ekkor legyen $r_{i+1} = m$ és legyen $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}}$.
Tegyük fel, hogy a fenti konstrukcióval $M + 1$ elemet definiáltunk, vagyis ismert az $(L_i)_{i \in \{0, \ldots, M\}}$ halmazrendszer. A konstrukció miatt $[\alpha, \beta] \subseteq L_M$ teljesül, valamint minden $i \in \{0, \ldots, M-1\}$ esetén $L_i \cap U_{r_{i+1}} \neq \emptyset$, tehát a 9.2 tétel miatt $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}} \in \mathfrak{I}_0$ és

$$\mu_0(L_{i+1}) = \mu_0(L_i \cup U_{r_{i+1}}) \leq \mu_0(L_i) + \mu_0(U_{r_{i+1}})$$

teljesül. Ebből az

$$\beta - \alpha = \mu_0([\alpha, \beta]) \leq \mu_0(L_M) \leq \sum_{k=0}^{M} \mu_0(U_{r_k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_k) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ellentmondás adódik.

9.6. Definíció. A

$$C \triangleq [0,1] \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m - 1} \left] \frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right[$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.7. Tétel. *(A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.*

Bizonyítás. 1. A Cantor-halmaz korlátos és zárt, tehát kompakt.
2. Definiáljuk rekurzív módon a

$$\rho : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1]) \qquad J \mapsto \left(\frac{1}{3} J \right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} J \right)$$

leképezéssel és az $I_0 = [0,1]$ kezdőelemmel az $n \mapsto I_n$ sorozatot, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_{n+1} = \rho(I_n)$. Ha $J \in \mathcal{P}([0,1])$ az $\mathfrak{I}_0$ halmaz véges sok elemének az uniója, akkor $\rho(I)$ is ilyen tulajdonságú, vagyis mindegyik I_n halmaz véges sok intervallum uniója. A ρ definíciója alapján minden $i \in \mathbb{N}$ elemre $\mu_0(I_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mu_0(I_n)$ is teljesül, vagyis $\mu_0(I_0) = 1$ miatt $\mu_0(I_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Rövid számolással igazolható, hogy minden $i \in I$ esetén $C \subseteq I_n$ teljesül, ahol C jelöli a Cantor-halmazt. Mivel $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, ezért minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ és ekkor I_n intervallumoknak olyan véges rendszere, melyre

$$C \subseteq \cup I_n \quad \text{és} \quad \sum_{J \in I_n} \mu_0(J) < \varepsilon.$$

9.8. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} | \ p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p.

9.9. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majdnem mindenütt nulla folytonos függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ pont, melyre $f(a) \neq 0$. Ekkor a folytonosság miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \,]a-\delta, a+\delta[$ pontra $|f(x)| \geq \dfrac{|f(a)|}{2}$. Mivel a $]a-\delta, a+\delta[$ halmaz a 9.5 tétel alapján nem nulla mértékű, ezért a

$$]a-\delta, a+\delta[\, \subseteq \{x \in \mathbb{R} | \ f(x) \neq 0\}$$

a tartalmazás miatt az $\{x \in \mathbb{R} | \ f(x) \neq 0\}$ halmaz sem lehet nulla mértékű.

9.2. A Riemann-integrál

9.10. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ x_0 = a, \ x_{n-1} = b, \ \forall i \in (n-1) : \ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

9.11. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i | \ 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i | \ 0 \leq i \leq m\}, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\dots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\dots,k}$ felosztást az *x és az y felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.12. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} | \ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} | \ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

9.13. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.*

1. *Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \le S_x(f)$.*
2. *Ha z jelöli az $[a, b]$ intervallum triviális folsztását, azaz $z = (a, b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \le s_x(f)$ és $S_x(f) \le S_z(f)$.*
3. *Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \le y$ teljesül, akkor $s_x(f) \le s_y(f)$ és $S_y(f) \le S_x(f)$.*
4. *Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \le S_y(f)$ teljesül.*
5. *Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \le y$ teljesül.
1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Az $s_z(f) \le s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \ge \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t\in[a,b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \left(\inf_{t\in[a,b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f) \end{aligned}$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \le S_z(f)$ teljesül.
3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\begin{aligned} &\left(\inf_{t\in[x_j,c]} f(t) \right)(c - x_j) + \left(\inf_{t\in[c,x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \ge \\ &\qquad \ge \left(\inf_{t\in[x_j,x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t\in[x_j,x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j) \\ &\left(\sup_{t\in[x_j,c]} f(t) \right)(c - x_j) + \left(\sup_{t\in[c,x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \le \\ &\qquad \le \left(\sup_{t\in[x_j,x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t\in[x_j,x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j), \end{aligned}$$

ezért $s_x(f) \le s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \ge S_{x'}(f)$.
Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \le s_y(f)$ és $S_x(f) \ge S_y(f)$ teljesül.
4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \le z$ és $y \le z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \le s_z(f)$ és $S_z(f) \le S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \le S_z(f)$, ezért $s_x(f) \le S_y(f)$.
5. Mivel minden x felosztásra $z \le x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \le s_x(f) \le S_x(f) \le S_z(f),$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

9.14. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

- *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int_a^b} f$;
- *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int_a^b} f$;
- *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ értéket.

Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{f : [a, b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}.$$

– Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq -\int_a^b f$$

jelölést.
– Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

– Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f *függvény határozott integráljának* nevezzük.

9.15. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha $\operatorname{Re} \circ f, \operatorname{Im} \circ f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és ekkor a

$$\int_a^b f \triangleq \left(\int_a^b \operatorname{Re} \circ f\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b \operatorname{Im} \circ f\right)$$

képlettel értelmezzük a komplex értékű függvény integrálját.

9.16. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \le \beta$. Az állítással ellentétben tegyül fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a 9.13 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \le S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \le S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

9.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

9.17. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a,b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \qquad S_y < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \le z$ és $y \le z$, ezért $s_x(f) \le s_z(f)$ és $S_z(f) \le S_y(f)$, vagyis

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \le s_z(f) \le c$$

$$c \leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2},$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.
Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. A 9.16 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.
Tegyül fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.
Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

9.18. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t\in[a,b]} f(t)\right) - \left(\inf_{t\in[a,b]} f(t)\right).$$

Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i).$$

9.19. Tétel. *Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A 9.17 tétel alapján nyilvánvaló.

9.20. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u,v\in[a,b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $H = f([a, b])$ és $A = \{|x - y| \mid x, y \in H\}$. Mivel f korlátos, ezért a H halmaz is korlátos, vagyis létezik az $\alpha = \sup H$ és a $\beta = \inf H$ valós szám. Megmutatjuk az

$$\alpha - \beta = \sup A$$

egyenlőséget, melyből már következik a bizonyítandó állítás.
Bármely $x, y \in H$ számra $\beta \leq x, y \leq \alpha$ teljesül, ezért

$$\beta - \alpha \leq x - y \leq \alpha - \beta,$$

vagyis

$$|x - y| \leq \alpha - \beta.$$

Tehát $\alpha - \beta$ felső korlátja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik kisebb felső korlátja az A halmaznak. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan felső korlát, melyre $\delta < \alpha - \beta$ teljesül. Vezessük be a pozitív $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta - \delta}{2}$ paramétert. Ekkor létezik olyan $x, y \in H$, melyre $\alpha - \varepsilon < x$ és $y < \beta + \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$x - y > \alpha - \varepsilon - \beta - \varepsilon = \delta > 0.$$

Tehát van olyan $x, y \in H$ elem, melyre $|x - y| > \delta$ teljesül, tehát δ nem felső korlátja az A halmaznak.

9.4. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

9.21. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f+g, cf, fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ algebra, valamint*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, melyre

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} < s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} < s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$\begin{aligned} s_z(f) + s_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t\in[z_i, z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t\in[z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t\in[z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = s_z(f+g) \\ S_z(f) + S_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t\in[z_i, z_{i+1}]} f(t) + \sup_{t\in[z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t\in[z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = S_z(f+g). \end{aligned}$$

Legyen $z = x \sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f) + s_x(g) \leq s_x(f+g) \leq s_z(f+g) \leq S_z(f+g) \leq S_y(f+g) \leq S_y(f) + S_y(g)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < s_z(f+g) \leq S_z(f+g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\Omega_z(f+g) < \varepsilon$. Ez pedig a 9.19 tétel alapján azt jelenti, hogy $f+g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{és} \qquad \inf S(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.
Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t \in [a,b]$ esetén $|f(t)| < K$ teljesül. Ekkor minden $u, v \in [a,b]$ elemre

$$\left|f^2(u) - f^2(v)\right| = |f(u) + f(v)| \cdot |f(u) - f(v)| \leq 2K \cdot |f(u) - f(u)|.$$

Vagyis bármely $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra a 9.20 tétel alapján

$$\Omega_x(f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]} \left|f^2(u) - f^2(v)\right| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v\in[x_i,x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) = 2K\Omega_x(f)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2 \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$. Ha $g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor az $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ teljesül.

9.22. Tétel. *Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a,c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c,b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a,c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a,c,b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért a 9.13 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f),$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon.$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melykere $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a,c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.
A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c,b]$ intervallumon is.
2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a,c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c,b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a,b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.
Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a,c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül és mivel $f \in \mathcal{R}([c,b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c,b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a,b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f),$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) \leq \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik.

9.23. Tétel. *Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a,b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a,b]$ kompakt halmaz, ezért a 6.33 Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a,b]$ számra

$$|u - v| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $n = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$ és minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztást. Ekkor a 9.20 tétel alapján

$$\begin{aligned}\Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

9.24. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.
Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonlót konstruáltunk a 9.23 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\begin{aligned}\Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $c = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

9.25. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

ezért minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ indexre a 9.20 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]).$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ következik.

9.26. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvényre*

1. *ha $f \geq 0$, akkor $\int\limits_a^b f \geq 0$;*
2. *ha $f \geq g$, akkor $\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$;*
3. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.
1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a,b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékükre is $\int_a^b f \geq 0$ teljesül.
2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h a 9.21 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

A tétel 1. pontja alapján $\int_a^b h \geq 0$, ezért $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

9.5. Newton–Leibniz-tétel

9.27. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a,b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, $F \in C([a,b], \mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetsző-leges $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztását. Minden $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

adódik. Mivel $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \leq f(c_i) \leq \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\inf_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t)\right)(x_{i+1}-x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i) = \\ &= F(b)-F(a) \le \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\right)(x_{i+1}-x_i) = S_x(f). \end{aligned}$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \le F(b)-F(a) \le S_x(f)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\int_a^b f = F(b)-F(a)$ következik.

9.28. Tétel. *Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon, akkor*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a,b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és innen már a 9.27 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

9.6. Az integrálfüggvény

9.29. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.30. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Az I_f függvény folytonos.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in]a,b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I_f'(x_0) = f(x_0)$.*
3. *Ha $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, $x_0 \in]a,b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $|f(x)| < K$.
1. Legyen $x,y \in [a,b]$. Ekkor a 9.22 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f,$$

vagyis felhasználva a 9.26 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K\,|x-y|$$

adódik, amiből az $y \to x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.
2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a,b] : |z - x_0| < \delta \quad \to \quad |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a, b]$. Ekkor a 9.22 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$I_f(z) - I_f(x_0) = \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f$$
$$(f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) \leq \int_{x_0}^z f \leq (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0),$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \to x_0 + 0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I_f'(x_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

9.31. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor*

$$\int\limits_a^b f = \lim_{x \to a+} \int\limits_x^b f = \lim_{x \to b-} \int\limits_a^x f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Ekkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a, b]$ elemre $|f(x)| < K$ teljesül. A 9.22 tétel alapján minden $x \in]a, b[$ esetén

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f,$$

ebből a 9.26 tétel felhasználásával

$$\left| \int_a^b f - \int_x^b f \right| = \left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^x K = (x - a)K$$
$$\left| \int_a^b f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq \int_x^b K = (b - x)K$$

adódik. Ebből

$$\lim_{x \to a+} \left| \int_a^b f - \int_x^b f \right| = 0$$
$$\lim_{x \to b-} \left| \int_a^b f - \int_a^x f \right| = 0$$

következik, melynek egyszerű átalakítása a bizonyítandó állítás.

9.7. Lebesgue-tétel

9.32. Tétel. *(Lebesgue-tétel.) Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $x \in [a, b]$ számra $|f(x)| < K$ teljesül.
1. Az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : \quad |x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$ teljesül, ezért az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban az

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : \quad |x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n}.$$

alakban is felírható. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$D_n = \left\{ x \in [a, b] \ \middle| \ \forall \delta > 0 \exists y \in [a, b] : \ |x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n} \right\},$$

valamint legyen $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Ekkor $x \in D$ pontosan akkor teljesül, ha f nem folytonos az x pontban.
2. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor a D halmaz nulla mértékű, ezért a 9.4 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz is nulla mértékű. Fordítva, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz nulla mértékű, akkor a 9.4 tétel alapján D is nulla mértékű. Tehát elég az alábbi következtetéseket igazolni.

$$D \text{ nulla mértékű} \quad \to \quad f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \quad \to \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ : D_n \text{ nulla mértékű}$$

3/a. Tegyük fel, hogy a D halmaz nulla mértékű és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 9.4 tétel alapján létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt intervallumokból álló halmazrendszer, melyre

$$D \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon'$$

teljesül. Ha $z \in [a, b] \setminus D$, akkor az f függvény folytonos az z pontban, vagyis létezik olyan $\delta_z \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

$$\forall y \in \,]z - \delta_z, z + \delta_z[\, \cap [a, b] : \quad |f(z) - f(y)| < \varepsilon'$$

teljesül. Ekkor

$$[a, b] \subseteq D \cup ([a, b] \setminus D) \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{z \in [a, b] \setminus D} \left] z - \frac{\delta_z}{2}, z + \frac{\delta_z}{2} \right[\right)$$

az $[a, b]$ kompakt halmaz egy nyílt halmazokkal való lefedését adja meg, melyből kiválasztható véges sok, mely szintén lefedi az $[a, b]$ halmazt. Tehát létezik olyan $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz és véges sok $z_1, \ldots, z_m \in [a, b] \setminus D$ pont, melyre

$$[a, b] \subseteq \left(\bigcup_{n \in F} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left] z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right[\right) \tag{9.1}$$

teljesül.
3/b. Most elkészítjük ezen lefedés végpontjai által meghatározott felosztást. Ehhez legyen

$$\mathcal{G}' = \left(\bigcup_{n \in F} \{\inf A_n, \sup A_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left\{ z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right\} \right) \cup \{a, b\},$$
$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cap [a, b],$$

és az alábbi rekurzióval definiáljunk egy sorozatot.

– Legyen $x_0 = a$ és $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \setminus \{x_0\}$.
– Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén x_i és $\mathcal{G}_i$ már definiált és $x_i < b$, akkor legyen $x_{i+1} = \min \mathcal{G}_i$ és $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i \setminus \{x_{i+1}\}$, ha pedig $x_i = b$, akkor legyen vége a sorozatnak.

Mivel a véges elemszámú $\mathcal{G}$ halmazból válogatunk elemeket így egy véges hosszúságú $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ sorozatot kapunk, mely egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak.
3/c. Az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részre bontjuk, az egyikben az intervallumok hossza kicsi, a másikban az oszcillációs összeg kicsi. Ehhez definiáljuk a

$$J_1 = \{j \in \{0, \ldots, n-1\} \mid \exists n \in F : \ ]x_j, x_{j+1}[\subseteq A_n\}$$
$$J_2 = \left\{ j \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus J_1 \middle| \ \exists i \in \{1, \ldots, m\} : \ ]x_j, x_{j+1}[\subseteq \left] z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right[\right\}$$

indexhalmazt. Nyilván $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ és $J_1 \cap J_2 \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$. Megmutatjuk, hogy $J_1 \cup J_2 = \{0, \ldots, n-1\}$ teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $i_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$, melyre $i_0 \notin J_1$ és $i_0 \notin J_2$ teljesül. Legyen $\alpha = x_{i_0}$ és $\beta = x_{i_0+1}$. Mivel $\alpha \in [a, b]$ ezért a (9.1) képlet alapján az alábbi esetek lehetségesek.
– Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\alpha \in A_n$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_1$ miatt $\sup A_n < \beta$, tehát a felosztás konstrukciója miatt az $[\alpha, \beta]$ intervallumban $\sup A_n$ is szerepelne osztópontként.
– Létezik olyan $i \in \{1, \ldots, m\}$, melyre $\alpha \in \left] z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right[$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_2$ miatt $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} < \beta$, tehát az $[\alpha, \beta]$ intervallumban lenne még egy osztópont, $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}$, a konstrukció miatt.

Tehát mindkét esetben ellentmondást kapunk, így $J_1 \cup J_2 = \{0, \ldots, n-1\}$.
3/d. Az I felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részben számoljuk ki.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sum_{i \in J_1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_1} 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 2K \sum_{n \in F} \mu_0(A_n) \leq \\
&\leq 2K \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < 2K\varepsilon' \\
\omega_2 &= \sum_{i \in J_2} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_2} 2\varepsilon' \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\
&\leq 2\varepsilon' \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) \leq 2\varepsilon'(b - a)
\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \omega_1 + \omega_2 < 2K\varepsilon' + 2(b-a)\varepsilon' = 2(K + b - a)\varepsilon'.$$

Vagyis a tetszőlegesen választott ε paraméterhez legyen $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(K + b - a)}$. Ebből az ε' paraméterből kapott x felosztásra $\Omega_x(f) < \varepsilon$ fog teljesülni, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.
4. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\ldots,m}$ olyan felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \dfrac{\varepsilon}{n}$ teljesül, továbbá nézzük meg, hogy a D_n halmaz az osztópontok mely intervallumába metsz bele, ehhez definiáljuk a

$$J = \{i \in \{0, \ldots, m-1\} \mid D_n \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset\}$$

indexhalmazt. Ha $i \in J$, akkor létezik olyan $x_0 \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre $x_0 \in D_n$ is teljesül. A D_n halmaz definíciója alapján ekkor létezik olyan $z \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre

$$|f(x_0) - f(z)| > \frac{1}{n}$$

teljesül. Ebből viszont a 9.20 tétel alapján

$$\omega(f, [x_i, x_{i+1}]) > \frac{1}{n}$$

következik. Felírva az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget

$$\frac{\varepsilon}{n} > \Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq$$
$$\geq \sum_{i \in J} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i)$$

adódik, amiből pedig

$$\sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

Mivel

$$D_n \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^{m} \{x_i\} \right) \cup \bigcup_{i \in J}]x_i, x_{i+1}[\,,$$

ezért a D_n halmaz lefedhető véges sok, tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumokkal, vagyis nulla mértékű.

9.8. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

9.33. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a, b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a, b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Ekkor*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}\, t.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a, b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a, b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Ha $n = 0$, akkor a bizonyítandó állítás

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \ \mathrm{d}\, t,$$

mely egyből következik a 9.27 Newton–Leibniz-formulából.
Az $n > 0$ esetben definiáljuk a $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ függvényt, melyre minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $g^{(k)}(t) = (-1)^k \dfrac{(b-t)^{n-k}}{(n-k)!}$ teljesül. Ekkor a parciális integrálás szabálya alapján minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ számra

$$\int_a^b f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) = (-1)^k \left[f^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t) \right]_a^b - \int_a^b f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t =$$
$$= -(-1)^k \frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}(b-a)^{n-k} - \int_a^b f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t,$$

amiből átrendezéssel

$$-\frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}(b-a)^{n-k} = (-1)^k \int_a^b f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) + f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}\, t$$

adódik. Ha ennek az egyenletnek a bal oldalát összegezzük, akkor

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}(b-a)^{n-k} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

adódik, ha a jobb oldalát, akkor

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k f^{(n-k)}(t) g^{(k+1)}(t) \right) \ \mathrm{d}\, t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \Big((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t)\Big) - \sum_{k=0}^{n-1} \Big((-1)^{k+1} f^{(n+1-(k+1))}(t) g^{(k+1)}(t)\Big) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} \Big((-1)^k f^{(n+1-k)}(t) g^{(k)}(t)\Big) - \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k} f^{(n+1-k))}(t) g^{(k)}(t)\Big) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_a^b f^{(n+1)}(t) g(t) - \Big((-1)^n f^{(1)}(t) g^{(n)}(t)\Big) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \,\mathrm{d}\,t - \int_a^b (-1)^n f^{(1)}(t)(-1)^n \frac{(b-t)^0}{0!} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f'(t) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \,\mathrm{d}\,t - f(b) + f(a)
\end{aligned}
$$

adódik. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \,\mathrm{d}\,t - f(b) + f(a),$$

aminek az átrendezése a bizonyítandó állítás.

9.34. Tétel. *(Az integrálszámítás középértéktételei.) Legyen $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$.*

1. Ha $g \geq 0$, akkor létezik $\xi \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

2. Létezik $\xi \in [a,b]$, hogy

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(\xi).$$

Bizonyítás. Legyen $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$.
1. Tegyük fel, hogy $g \geq 0$. Ha $g = 0$, akkor nyilván teljesül az állítás, ezért feltehető, hogy $g \neq 0$. Mivel az f függvény folytonos, ezért korlátos is, tehát létezik véges $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ és $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Ekkor minden $x \in [a,b]$ esetén $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, vagyis a 9.26 tétel alapján

$$\int_a^b mg(x) \,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b Mg(x) \,\mathrm{d}\,x.$$

Ebből az $\alpha = \int_a^b g$ jelöléssel

$$m \leq \frac{1}{\alpha} \int_a^b (fg) \leq M$$

adódik. A Bolzano-tétel alapján az f függvény valamely $\xi \in [a,b]$ pontban az $\frac{1}{\alpha} \int_a^b (fg)$ értéket is felvesz és ekkor

$$f(\xi)\alpha = \int_a^b (fg)$$

teljesül.
2. Az 1 pontban szereplő egyenlőséget kell alkalmazni a $g = 1$ választással.

9.35. Tétel. *A*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b],\mathbb{R})\times C([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R} \qquad (f,g)\mapsto\langle f,g\rangle \triangleq \int\limits_a^b fg$$

leképezés skaláris szorzás.

Bizonyítás. Legyen $f,g,h\in C([a,b],\mathbb{R})$ és $c\in\mathbb{R}$. Ekkor a 9.21 tétel alapján

$$\begin{aligned}
\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f+g)h = \int_a^b (fh+gh) = \int_a^b fh + \int_a^b gh = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle\\
\langle cf,g\rangle &= \int_a^b cfg = c\int_a^b fg = c\,\langle f,g\rangle\\
\langle f,g\rangle &= \int_a^b fg = \langle g,f\rangle\,.
\end{aligned}$$

Továbbá az $f^2\geq 0$ egyenlőtlenség miatt

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2 \geq \int_a^b 0 = 0.$$

Ha $f=0$, akkor nyilván $\langle f,f\rangle = 0$.
Tehát azt kell csak megmutatni, hogy az $\langle f,f\rangle = 0$ egyenletből $f=0$ következik.
Tegyük fel, hogy van olyan $x_0\in\,]a,b[$ pont, melyre $f(x_0)\neq 0$, vagyis $c=f^2(x_0)>0$. Ekkor létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\,\cap\,[a,b]$ esetén $f^2(x)>\frac{c}{2}$. Legyen $\delta'=\min\{x_0-a,b-x_0,\delta\}$ és tekintsük a

$$g:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} 0, & \text{ha}\quad |x-x_0|>\delta';\\ \dfrac{c}{2\delta'}(x-x_0+\delta'), & \text{ha}\quad x_0-\delta'\leq x<x_0;\\ \dfrac{c}{2\delta'}(x_0+\delta'-x) & \text{ha}\quad x_0\leq x<x_0+\delta'\end{cases}$$

függvényt. Ekkor $g\in C([a,b],\mathbb{R})$ és $g\leq f^2$ teljesül, ezért a 9.26 tétel miatt az

$$0=\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2 \geq \int_a^b g \geq \frac{c\delta'}{2} > 0$$

ellentmondást kapjuk.

9.36. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Ha $f,g\in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor*

$$\left(\int\limits_a^b fg\right)^2 \leq \int\limits_a^b f^2 \int\limits_a^b g^2$$

teljesül.

Bizonyítás. A 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség és a 9.35 tétel következménye.

9.9. Improprius integrál

9.37. Definíció. (*Improprius integrál.*)

– Legyen $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, \infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $[a, \infty[$ intervallumon* és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az *f függvény improprius integrálja divergens az $[a, \infty[$ intervallumon.*

– Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, a], \mathbb{R})$ teljesül és a

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja a $]-\infty, a]$ intervallumon*, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $[a, b[$ intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, b], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $]a, b]$ intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.

9.38. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvényt.*

1. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a, \infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és ebben az esetben*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha - 1)}.$$

2. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0, a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$ és ebben az esetben*

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}\, x = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Bizonyítás. A 9.27 Newton–Leibniz-formula alapján rövid számolással igazolható.

10. Véges dimenziós terek topológiája

10.1. Skaláris szorzás és norma

10.1. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n & (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{array}$$

10.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

Bizonyítás. A vektortér tulajdonságai nyilvánvaló módon teljesülnek a fenti műveletekre.

10.3. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

10.4. Tétel. *A $\mathbb{K}^n$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^n : \ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
5. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Bizonyítás. A definíció nyilvánvaló következménye.

10.5. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ vektorra*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \le \langle z, z \rangle = \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{t} \langle y, x \rangle - t \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle .$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y \rangle} \left(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

adódik.

10.6. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}}.$$

10.7. Definíció. A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren.

10.8. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup-*normának vagy maximum-normának nevezünk).*

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty . \end{aligned}$$

10.9. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ teljesül.*

Bizonyítás. A definíciók alapján nyilvánvaló.

10.10. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \, \|y\|_2 \cos \alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

Bizonyítás. A vektorok által bezárt szög definíciója és a fenti tétel k alapján nyilvánvaló.

10.11. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| ,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm (\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| ,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

10.2. Topológiai alapfogalmak

10.12. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n | \ \|x - y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

10.13. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $\|y - z\| < \rho$, amiből

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \|x - y\| + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

10.14. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Bizonyítás. A norma definíciója alapján mindegyik tulajdonság nyilvánvaló.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in \mathbb{K}^n$ pontok esetén a továbbiakban a $d(x, y) = \|x - y\|$ jelölést használjuk.

10.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.16. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér $A_1, \ldots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + \|x_i - x_1\|$. Ekkor minden i számra a 10.13 tétel miatt $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

10.17. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^n$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R \in]0, r - \|x - y\|[$. Ekkor a 10.13 tétel miatt $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül.

10.18. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*

3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min \{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

10.19. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.
3. Legyen $(Z_i)_{i \in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{K}^n \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$\mathbb{K}^n \setminus \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{K}^n \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i \in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i \in I} Z_i$ halmaz zárt.

10.20. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{K}^n \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{K}^n \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

10.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x

– *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;

– *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset \;\wedge\; B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
– *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \; (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
– *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X = \{x\}$.

10.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

10.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : \; B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

10.24. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*

1. *$\operatorname{Int} X$ halmaz nyílt;*
2. *$\operatorname{Int} X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. *$\overline{X}$ halmaz zárt;*
4. *$\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{K}^n \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - \|y - z\| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

10.25. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

10.26. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{K}^n$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

10.27. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$*. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X},$$
$$\overline{X} = \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X).$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(\mathbb{K}^n \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$\mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X) = \mathbb{K}^n \setminus \left(\mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)}\right) = \overline{\mathbb{K}^n \setminus (\mathbb{K}^n \setminus X)} = \overline{X}.$$

10.28. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

10.3. Sorozatok

10.29. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

10.30. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatnak legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \dfrac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \dfrac{d(x,y)}{2}$. Amiből a

$$d(x,y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < d(x,y)$$

ellentmondás adódik.

10.31. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ jelöli.

10.32. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.

– Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

10.33. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathsf{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

10.34. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathsf{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

10.35. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathsf{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ *és* $x \in \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$.

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathsf{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ és $x \in \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.39 kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in \left(B_{\frac{1}{r}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{K}^{\mathsf{n}} \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{K}^{\mathsf{n}} \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

10.36. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathsf{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathsf{n}}$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az $a+b$ sorozat konvergens és* $\lim(a+b)=(\lim a)+(\lim b)$.
2. *A ca sorozat konvergens és* $\lim(ca)=c(\lim a)$.
3. *A λa sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a)=(\lim\lambda)(\lim a)$.
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és* $\lim\|a\|=\|\lim a\|$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\|\cdot\|)$ normált tér, $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A=\lim a$, a $B=\lim b$ és a $\Lambda=\lim\lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a,N_b\in\mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n>N_a$ számra $\|a_n-A\|<\frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n>N_b$ számra $\|b_n-B\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N=\max\{N_a,N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n>N$ esetén

$$\|(a_n+b_n)-(A+B)\|\le\|a_n-A\|+\|b_n-B\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2. A $c=0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n>N_a$ esetén $\|a_n-A\|<\frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n>N_a$ számra

$$\|ca_n-cA\|=|c|\cdot\|a_n-A\|<|c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra $|\lambda_n|<K$. Tegyük fel, hogy $A\neq 0$. Legyen $N_a\in\mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n>N_a$ esetén $\|a_n-A\|<\frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda\in\mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n>N_\lambda$ esetén $|\lambda_n-\Lambda|<\frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N=\max\{N_a,N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n>N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\lambda_n a_n-\Lambda A\|&=\|\lambda_n a_n-\lambda_n A+\lambda_n A-\Lambda A\|\le|\lambda_n|\cdot\|a_n-A\|+\|A\|\cdot|\lambda_n-\Lambda|<\\&<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+\|A\|\cdot\frac{\varepsilon}{2\|A\|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $A=0$, akkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n>N$ esetén $\|a_n\|<\frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n-0\|\le K\cdot\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon.$$

4. Ha $N_a\in\mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n>N_a$ esetén $\|a_n-A\|<\varepsilon$, akkor minden $n>N_a$ számra

$$|\|a_n\|-\|A\||\le\|a_n-A\|<\varepsilon.$$

10.37. Tétel. *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $p\in[1,\infty[\cup\{\infty\}$, és $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}},\|\cdot\|_p)$ térben, ha minden $i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ esetén az $a_i=\mathrm{pr}_i\circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a)=\lim(\mathrm{pr}_i\circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $p\in[1,\infty[\cup\{\infty\}$, és $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x=\lim a$, $i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d_p(a_n,x)<\varepsilon$. Ekkor $|\mathrm{pr}_i(a_n)-\mathrm{pr}_i(x)|<\varepsilon$, vagyis $\lim(\mathrm{pr}_i\circ a)=\mathrm{pr}_i(\lim a)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i\circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x=(\lim(\mathrm{pr}_1\circ a),\dots,\lim(\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}}\circ a))\in\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Minden $i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}$ esetén létezik olyan $N_i\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i<n$ természetes számra $|\mathrm{pr}_i(a_n)-x_i|<\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}$. Legyen $N=\max\{N_i|\ i\in\{1,\dots,\mathfrak{n}\}\}$. Ekkor minden $N<n$ természetes számra a $p\neq\infty$ esetben

$$d_p(a_n,x)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}}|\mathrm{pr}_i(a_n)-x_i|^p}<\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}}\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}\right)^p}=\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}}\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}}1}=\varepsilon\frac{\sqrt[p]{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}}\le\varepsilon,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| \mid i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}\} < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \le \varepsilon$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

10.4. Cauchy-sorozatok

10.38. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

10.39. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \le n \le N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\mathrm{Ran}\, a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

10.40. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N < n, m$ természetes szám esetén

$$d(a_n, a_m) \le d(a_n, A) + d(a_m, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

10.41. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_1 < n, m$ esetén $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d(a_n, A) \le d(a_n, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \ge n$.

10.42. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ teljes halmaz.

10.43. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér teljes, továbbá minden* $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *zárt halmaz teljes.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ Cauchy-sorozat a $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $n, m \in \mathbb{N}$ index esetén

$$|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(a_m)| \le \|a_n - a_m\|_\infty,$$

ezért $\mathrm{pr}_i \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}$ számtestben vagyis a 4.29 tétel alapján konvergens. Amiből a 10.37 tétel alapján adódik, hogy az a sorozat konvergens.
Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ zárt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ térben, azonban zárt halmazban haladó konvergens sorozat határértéke is a halmazban van, ezért A teljes.

10.44. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

10.45. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér Banach-tér.*

10.5. Kompakt halmazok

10.46. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.

– Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^n$ térnek.

10.47. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

10.48. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz.

1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq \mathbb{K}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in \mathbb{K}^n \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x)|\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)\right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x\in H} \left(B_{r(x)}(x) \cap B_r(p)\right) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq \mathbb{K}^n \setminus X$. Tehát $\mathbb{K}^n \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i\in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = \mathbb{K}^n \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i\in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

10.49. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^n$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $(K_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap\limits_{i\in I} K_i = \emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} (K_i \cap K_{i_0}) \right) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}},$$

vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} U_i$. Ebből

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i = \bigcup_{i\in I'} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right)$$

adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap\limits_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right) \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

10.6. Heine–Borel-tétel

10.50. Tétel. *Minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén a $[-R, R]^n$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.*

Bizonyítás. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a $T_0 = [-R, R]^n$ halmazt az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.
A T_0 halmaz nyilván korlátos, hiszen az $r_0 = 1 + 2R$ számra teljesül, hogy bármely $x \in T_0$ esetén $T_0 \subseteq B_{r_0}(x)$.
Most megmutatjuk, hogy zárt is. Ehhez legyen $c : \mathbb{N} \to T_0$ tetszőleges konvergens sorozat, a $\lim c = C$ határértékkel. Ekkor a 10.37 tétel alapján minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\lim \mathrm{pr}_i(c) = C_i$ teljesül. Mivel a $\mathrm{pr}_i(c)$ konvergens sorozat az $[a_i, b_i]$ zárt halmazban halad, ezért $C_i \in [a_i, b_i]$. Tehát $C \in T_0$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy a T_0 halmaz nem kompakt. Ekkor létezik olyan $(U_k)_{k\in K}$ nyílt halmazokból álló lefedése a T_0 halmaznak, melynek nem létezik véges részbefedése. Vegyünk egy ilyen $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszert.
Most definiáljuk a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat az alábbi rekurzióval. A T_0 halmazt már fent definiáltuk. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a T_n halmaz ismert és
i) ha $n \geq 1$, akkor $T_n \subseteq T_{n-1}$;
ii) az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek nem létezik olyan véges részhalmaza, mely lefedi a T_n halmazt;
iii) $T_n = \prod\limits_{i=1}^{\mathfrak{n}} [\alpha_i, \beta_i]$ alakú, ahol minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.
Ezek a feltételek teljesülnek a T_0 halmazra. Legyen $j \in \{0, 1\}^{\mathfrak{n}}$ és definiáljuk a

$$A_j = \prod_{i=1}^{\mathfrak{n}} \left[\alpha_i + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + j_i \frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right]$$

halmazokat. Ekkor a

$$T_n = \bigcup_{j\in\{0,1\}^{\mathfrak{n}}} A_j$$

felbontás nem más mint a T_n halmaz $2^{\mathfrak{n}}$ darabra való felosztása az élek felezésével. Minden $j \in \{0, 1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszer lefedi az A_j halmazt. Ha minden $j \in \{0, 1\}^{\mathfrak{n}}$ esetén az $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek létezne olyan véges részhalmaza, mely lefedi az A_j halmazt, akkor a T_n halmaznak is létezne véges részbefedése. Tehát létezik legalább egy olyan $j \in \{0,1\}^{\mathfrak{n}}$ index, melyre az teljesül, hogy a $(U_k)_{k\in K}$ halmazrendszernek egyetlen véges részhalmaza sem fedi be az A_j halmazt. Válasszunk egy ilyen j indexet és legyen $T_{n+1} = A_j$. Ekkor az így definiált T_{n+1} halmazra teljesülnek az i)–iii) tulajdonságok.

Tekintsük a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazokat. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $r_n = \dfrac{r_0}{2^n}$. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in T_n$ esetén $T_n \subseteq B_{r_n}(x)$ teljesül.

Minden $i \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}$ esetén a $(\mathrm{pr}_i(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-féle közösrész-tétel feltételei, ezért

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n) \neq \emptyset.$$

Legyen $x_i \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_i(T_n)$ és $x = (x_1,\ldots,x_{\mathfrak{n}})$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in T_n$. Mivel $x \in T_0$, ezért létezik olyan $k_0 \in K$ index, melyre $x \in U_{k_0}$ teljesül. Az U_{k_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R(x) \subseteq U_{k_0}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $r_n < R$ teljesül. Ekkor

$$x \in T_n \subseteq B_{r_n}(x) \subseteq B_R(x) \subseteq U_{k_0}$$

miatt azt kaptuk, hogy a T_n halmaz lefedhető véges sok, nevezetesen egyetlen U_{k_0} nyílt halmazzal, ellentmondva ezzel feltételezésünknek.

10.51. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy kompakt részhalmaza, akkor K a 10.48 tétel alapján korlátos és zárt.

Most tegyük fel, hogy $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ korlátos és zárt halmaz. A K halmaz korlátossága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq B_R(0)$ teljesül. Ekkor a végtelen norma definíciója alapján $K \subseteq \prod\limits_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R,R]$.

A 10.50 tétel alapján $\prod\limits_{i=1}^{\mathfrak{n}} [-R,R]$ kompakt halmaz és K ennek zárt részhalmaza, tehát a 10.48 tétel alapján K kompakt.

10.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

10.52. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$. Az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ tetszőleges sorozat. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge\ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x. Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.

Most legyen $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nem kompakt halmaz. Ekkor a 10.51 tétel alapján A vagy nem zárt vagy nem korlátos.

Ha A nem zárt, akkor létezik egy $x \in \overline{A} \setminus A$ pont és ehhez egy $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen olyan

konvergens részsorozata, mely határértéke az A halmazban lenne.
Ha A nem korlátos, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \nsubseteq B_{n+1}(0)$ teljesül. Legyen $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$ tetszőleges. Ekkor az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \leq \|a_n\|$ teljesül. Tehát a egyetlen részsorozata sem korlátos, ezért konvergens sem lehet. Vagyis az a egy olyan A halmazban haladó sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata.

10.8. Függvények határértéke

10.53. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists\delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

10.54. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény, az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in \mathbb{K}^m$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $a \in \mathbb{K}^n$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{K}^m$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < d(x, a) < \delta_A \;\rightarrow\; d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2}$$
$$0 < d(x, a) < \delta_B \;\rightarrow\; d'(f(x), B) < \frac{d'(A, B)}{2}$$

teljesül, ahol d' jelöli a $\|\cdot\|'$ norma szerinti távolságot, azaz $d'(A, B) = \|A - B\|'$. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A, B) \leq d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A, B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

10.55. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

10.56. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és a $z \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in \mathbb{K}^m$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \; 0 < d(x, z) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat

esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a z ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{K}^m$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

10.57. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f$, $\lim_a g$ és $\lim_a \varphi$. Akkor az a pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(f+g)$, a $\operatorname{Dom}(\lambda f)$, a $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ és a $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ halmaznak, valamint*

1. $\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g$;
2. $\lim_a (\lambda f) = \lambda(\lim_a f)$;
3. $\lim_a (\varphi f) = (\lim_a \varphi)(\lim_a f)$;
4. $\lim_a \|f\| = \left\| \lim_a f \right\|$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$,, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}^n$ torlódási pontja a $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ halmaznak, legyen $F = \lim_a f$, $G = \lim_a g$, $\Phi = \lim_a \varphi$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in H : \ 0 < \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in H : \ 0 < \|x - a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x) - G\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H : \ 0 < \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f+g)(x) - (F+G)\| \leq \|f(x) - F\| + \|g(x) - G\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim_a (f+g) = F + G$.

2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik

olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor $\|f(x) - F\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezek alapján ha $x \in H$, $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda F\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - F\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda F$.
3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x - a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_f \ &\Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon', \\ \forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta_\varphi \ &\Rightarrow \ |\varphi(x) - \Phi| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x - a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned} \|(\varphi f)(x) - \Phi F\| &= \|\varphi(x) f(x) - \Phi f(x) + \Phi f(x) - \Phi F\| \le \\ &\le \|f(x)\| \cdot |\varphi(x) - \Phi| + |\Phi| \cdot \|f(x) - F\| \le \\ &\le (\|F\| + 1) \cdot \varepsilon' + |\Phi| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (\|F\| + |\Phi| + 1) < \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|F\| + |\Phi| + 1}$.
Ezek alapján az ε, $\|F\|$ és $|\Phi|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1 ,δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H: \ 0 < \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - F\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < \|x - a\| < \delta$ esetén

$$\big|\|f(x)\| - \|F\|\big| \le \|f(x) - F\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim\limits_a \|f\| = \|F\|$.

10.9. Függvények folytonossága

10.58. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.
– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Jelölés. Adott $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált terek és $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$ részhalmazok esetén a

$$C(U, V) \triangleq \{f : U \to V |\ f \text{ folytonos}\}$$

jelölést fogjuk használni.

10.59. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ d(x, z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(z)$.
Tegyük fel, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \operatorname{Dom} f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), \ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), \ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), f(z)) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

10.60. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f = f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && 0 < d(x, a) < \delta && \to && d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \\
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : && d(x, a) < \delta && \to && d'(f(x), f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

10.61. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Ekkor az a pontban*

1. *$f + g$;*
2. *λf;*
3. *φf;*
4. *$\|f\|$*

folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in H$, ahol $H = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
1. Az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x - a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta_g \ \Rightarrow \ \|g(x)-g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|(f+g)(x)-(f+g)(a)\| \le \|f(x)-f(a)\| + \|g(x)-g(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $f+g$ folytonos az a pontban.
2. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ számra, ha $\|x-a\| < \delta$, akkor $\|f(x)-f(a)\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ezért ha $\|x-a\| < \delta$, akkor

$$\|\lambda f(x) - \lambda f(a)\| = |\lambda| \cdot \|f(x)-f(a)\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis λf folytonos az a pontban.
3. Létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta_1 \ \Rightarrow \ \|f(x)-f(a)\| < 1,$$

vagyis, ha $x \in H$ olyan, hogy $\|x-a\| < \delta_1$, akkor

$$\|f(x)\| < \|F\| + 1.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_φ, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta_f \ \Rightarrow \ \|f(x)-F\| < \varepsilon' \\
&\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta_\varphi \ \Rightarrow \ |\varphi(x)-\varphi(a)| < \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_\varphi, \delta_1\}$ számra, ha $x \in H$ olyan, hogy $0 < \|x-a\| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned}
\|(\varphi f)(x) - \varphi(a)f(a)\| &= \|\varphi(x)f(x) - \varphi(a)f(x) + \varphi(a)f(x) - \varphi(a)f(a)\| \le \\
&\le \|f(x)\| \cdot |\varphi(x)-\varphi(a)| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x)-f(a)\| \le \\
&\le (\|f(a)\|+1) \cdot \varepsilon' + |\varphi(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{\|f(a)\| + |\varphi(a)| + 1}$. Tehát az ε, $\|f(a)\|$ és $|\varphi(a)|$ számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1, δ_f, δ_φ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.
4. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in H : \ \|x-a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon.$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $\|x-a\| < \delta$ esetén

$$\big|\|f(x)\| - \|f(a)\|\big| \le \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\|f\|$ folytonos az a pontban.

10.62. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $\lambda \in \mathbb{K}$, valamint $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor $f+g$, λf, φf és $\|f\|$ is folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell alkalmazni minden $a \in \mathbb{K}^n$ pontra.

10.63. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_{\delta(z)}(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.
$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus (U \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.
$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{n}}$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus \overset{-1}{f}(\mathbb{K}^{\mathtt{m}} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus (Z \cap K)) = K \cap (\mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

10.64. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathtt{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^{\mathtt{n}} \to \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathtt{m}}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

10.65. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathtt{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : \mathbb{K}^{\mathtt{n}_1} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{n}_2}$, $g : \mathbb{K}^{\mathtt{n}_2} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathtt{n}_3}$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g : \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \ \Rightarrow\ d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f: \quad d_1(x,a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x,a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

10.66. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

10.67. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

10.68. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az U *és U részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

10.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

10.69. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((10.63) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

10.70. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 10.69 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

10.71. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z)$ halmaz zárt, tehát a 10.63 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

10.72. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^m$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor* f *homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $V \subseteq \mathbb{K}^m$ és $f : K \to V$ folytonos bijekció. Ekkor a 10.69 tétel alapján V kompakt halmaz, és a 10.71 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

10.11. Egyenletesen folytonos függvények

10.73. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x,y) < \delta \;\to\; d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

10.74. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x,y) < \delta \;\to\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

10.75. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor* f *egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{K}^m$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x,y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x,y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y,p) \leq d_1(y,x) + d_1(x,p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{array}{ccc} d_1(x,p) < \delta(p) & \to & d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y,p) < \delta(p) & \to & d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

10.12. Normák ekvivalenciája

10.76. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K\,\|x\|'$.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren.

$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \frac{R}{2\,\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \frac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \frac{R}{2\,\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\| \leq K\,\|x\|'$.

$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K\,\|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y-z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y-z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y-z\| \leq K \cdot \|y-z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

10.77. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.78. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^n$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \leq K_1\,\|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2\,\|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\alpha\,\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\,\|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

10.79. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

Bizonyítás. Egyszerűen igazolható, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{n} \cdot \|x\|_\infty$$

teljesül, ezért az előző állítás alapján a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek.

10.80. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren a végtelen norma ekvivalens bármely más normával. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus bázisa, azaz minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén e_i legyen az a vektor, melynek az i-edik komponense 1, minden más komponense 0. Definiáljuk még a $K_1 = \max\{\|e_i\| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K_1 \le K_1 n \cdot \|x\|_\infty .$$

Most megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Ehhez igazolni kell, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ elemekhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektorra

$$\|x - y\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$$

teljesül. A $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nK_1}$ választás jó lesz, ugyanis ebben az esetben ha $\|x - y\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le K_1 n \|x - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ halmazt. Mivel a $\|\cdot\|_\infty$ függvény nyilván folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $S = \overset{-1}{\|\cdot\|_\infty}(\{1\})$, ezért S egy zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, tehát zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Továbbá S nyilván korlátos, ezért a 10.51 tétel alapján S kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel $\|\cdot\|$ folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel miatt léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in S$ vektorra

$$\alpha \le \|x\| \le \beta$$

teljesül. Ha $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor, akkor $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, ezért $\alpha \le \left\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$. Vagyis $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_\infty \le \dfrac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$ teljesül.
Mivel a normák ekvivalenciája tranzitív, ezért megmutattuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren bármely két norma ekvivalens.

10.13. Normák ekvivalenciájának következményei

10.81. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^n$ tér milyen normával van ellátva.*

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján halmazok nyíltság független a norma megválasztásától. Tehát minden norma esetén ugyanazok a nyílt halmazok. Ezért a nyílt halmazok komplementerei, a zárt halmazok, szintén ugyanazok minden norma esetén. A kompaktság fogalma egyedül a nyíltságot használja a topológiai fogalmak közül, ezért a kompaktság szintén normafüggetlen tulajdonság a $\mathbb{K}^n$ téren. A korlátosság normafüggetlensége pedig a a 10.78 tétel következménye.

10.82. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{K}^n$ téren és $\|\cdot\|_{(a)}$, $\|\cdot\|_{(b)}$ norma az $\mathbb{K}^m$ téren. A 10.78 tétel alapján léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_{(1)} \leq c\,\|x\|_{(2)}$ és minden $y \in \mathbb{K}^m$ esetén $\|y\|_{(b)} \leq d\,\|y\|_{(a)}$.
Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az a pontban a $\|\cdot\|_{(1)}$ és az $\|\cdot\|_{(a)}$ norma szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontra, ha $\|x - a\|_{(1)} < \delta'$, akkor $\|f(x) - f(a)\|_{(a)} < \frac{\varepsilon}{d}$. Legyen $\delta = \frac{\delta'}{c}$ és $x \in \operatorname{Dom} f$ tetszőleges. Ha $\|x - a\|_{(2)} < \delta$, akkor

$$\|x - a\|_{(1)} \leq c\,\|x - a\|_{(2)} < c\delta = \delta',$$

amiből a pedig

$$\|f(x) - f(a)\|_{(b)} \leq d\,\|f(x) - f(a)\|_{(a)} < d \cdot \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon$$

adódik. Ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény folytonos az a pontban a $\|\cdot\|_{(2)}$ és a $\|\cdot\|_{(b)}$ norma szerint.

10.83. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^n$ téren választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{K}^n$ téren, $A \in \mathbb{K}^n$ és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\|\cdot\|_{(1)}$ norma szerint. A 10.78 tétel alapján létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\|_{(2)} \leq c\,\|x\|_{(1)}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ $N < n$ esetén

$$\|a_n - A\|_{(1)} < \frac{\varepsilon}{c},$$

amiből

$$\|a_n - A\|_{(2)} \leq c\,\|a_n - A\|_{(1)} < \varepsilon$$

következik. Ez viszont igazolja, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\|\cdot\|_{(2)}$ norma szerint is.

10.84. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben, akkor a 10.48 tétel alapján K korlátos és zárt.
Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Ekkor a 10.80 tétel alapján K korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben, vagyis a 10.51 tétel alapján K kompakt a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. A 10.80 tétel alapján ekkor K kompakt az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben.
Legyen $K \subseteq \mathbb{C}^n$ korlátos és zárt halmaz a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ normált térben. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

valós lineáris leképezést. Egyszerűen igazolható, hogy ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2n}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^n$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ tér között. Tehát $\varphi(K)$ korlátos és zárt halmaz az $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ térben. Ezért az előzőek alapján $\varphi(K)$ kompakt az $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_*)$ térben. Vagyis K kompakt a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ térben.

10.85. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ halmazt. A 10.80 tétel alapján az A halmaz pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált térben, amikor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben. A 10.52 tétel alapján A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak. A 10.80 tétel alapján egy sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_\infty)$ térben, ha konvergens a $(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ térben. Tekintsük az $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált teret és egy $A \subseteq \mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$ halmazt. Legyen

$$\varphi : \mathbb{C}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{2\mathfrak{n}} \qquad (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_{\mathfrak{n}}, \operatorname{Im} z_{\mathfrak{n}}).$$

Ekkor

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{2\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|$$

norma az $\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}$ téren, valamint minden $z \in \mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$ esetén $\|z\| = \|\varphi(z)\|_*$ teljesül. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ tér között, ezért A pontosan akkor kompakt a $(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ térben, amikor $\varphi(A)$ kompakt a $(\mathbb{R}^{2\mathfrak{n}}, \|\cdot\|_*)$ térben. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy $\varphi(A)$ pontosan akkor kompakt ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak. Mivel φ lineáris izometria, ezért pontosan akkor teljesül, hogy minden $\varphi(A)$ halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme a $\varphi(A)$ halmaznak, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, mely határértéke eleme az A halmaznak.

10.86. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|$ norma szerint, akkor a 10.80 tétel alapján Cauchy-sorozat, a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint is. Ekkor viszont konvergens a 10.43 tétel szerint. Ugyancsak a 10.80 tétel alapján a sorozat konvergens lesz a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

10.87. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ lineáris altér, akkor L teljes.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ lineáris altér. Ha $u_1, \ldots, u_m \in L$ bázis az L vektortérben, akkor tekintsük a

$$\varphi : L \to \mathbb{K}^m \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

bijekciót és a

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$$

normát. Ha $a : \mathbb{N} \to L$ Cauchy-sorozat, akkor $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauhy-sorozat a $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_*)$ Banach-térben, ezért konvergens is. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(a_n) = x$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varphi^{-1}(x) \in L$ teljesül.

10.88. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\operatorname{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján a pr_i függvény pontosan akkor folytonos bármely norma szerint, ha folytonos a végtelen norma szerint. Ha $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, akkor a $\delta = \varepsilon$ választással élve azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra, ha $\|x - a\|_\infty < \delta$, akkor

$$|\operatorname{pr}_i(x) - \operatorname{pr}_i(a)| = |x_i - a_i| \le \|x - a\|_\infty < \varepsilon.$$

Vagyis pr_i folytonos minden tetszőlegesen választott pontban, ezért folytonos.

10.89. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Pontosan akkor létezik a $\lim\limits_{a} f$ határérték, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_{a} f_i$ határérték és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

Bizonyítás. A 10.80 tétel alapján az állítás független a normák megválasztásától, tehát elég a végtelen normákat tekinteni. Ezért a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a $\|\cdot\|_\infty$ normával dolgozunk. Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.
Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_a f$ határérték és legyen $F = \lim\limits_a f$. Legyen $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontra, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta$, akkor $\|f(x) - F\|_\infty < \varepsilon$. Az

$$|f_i(x) - F_i| \leq \|f(x) - F\|_\infty$$

egyenlőtlenségből viszont következik már a $F_i = \lim\limits_a f_i$ határérték.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és legyen

$$F = \left(\lim_a f_i, \ldots, \lim_a f_{\mathfrak{m}}\right).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $0 < \|x - a\|_\infty < \delta_i$, akkor $|f_i(x) - F_i| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\|_\infty < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis $F = \lim\limits_a f$.

10.90. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen f folytonos az a pontban. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén pr_i folytonos, ezért a kompozíciójuk, $\mathrm{pr}_i \circ f$, is folytonos lesz az a pontban.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ elemre, ha $\|x - a\| < \delta_i$, akkor $\|f(x)_i - f(a)_i\| < \varepsilon$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ekkor

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \|x - a\| < \delta \quad \to \quad \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

vagyis f folytonos az a pontban, ha a $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ téren a végtelen normát tekintjük. Azonban 10.80 tétel alapján ekkor $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tér bármely normája szerint folytonos lesz f az a pontban.

10.14. Sorok

10.91. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum\limits_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

10.92. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük A. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

10.93. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| ,$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

10.94. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor az $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$, $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ részletösszeg sorozatokra alkalmazva a 10.57 tételt adódik az állítás.

10.15. Lineáris leképezések

10.95. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

Jelölés. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazt elterjedt jelölése még az $\mathrm{L}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ vagy $\mathrm{L}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K})$.
Megemlítjük még az alábbi gyakran használt jelöléseket.

$$\mathrm{GL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) = \left\{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \exists A^{-1}\right\}$$
$$\mathrm{SL}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(\mathbb{K}^n) = \{A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \mid \det A = 1\}$$

Továbbá, az irodalomban elterjedt konvenciót követve a lineáris leképezés argumentumát nem tesszük zárójelbe, vagyis ha A lineáris leképezés és $x \in \mathrm{Dom}\, A$ akkor $Ax \overset{\triangle}{=} A(x)$.

10.96. Tétel. *Ha $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett összeadás és skalárral való szorzás definíciója alapján nyilvánvaló.

10.97. Tétel. *Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ és minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji} = (Ae_i)_j$. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$(Ax)_j = \mathrm{pr}_j\, A\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i\, \mathrm{pr}_j(Ae_i) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} x_i (Ae_i)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

10.98. Definíció. Adott $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\} \\ j \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

10.99. Tétel. *Minden $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ és tekintsük az

$$x = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi(e_k)} e_k$$

vektort. Ekkor minden $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}$ vektorra

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) y_k = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = \varphi(y)$$

teljesül.
Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n$ olyan, hogy minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektorra

$$\varphi(y) = \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle,$$

akkor ebből az $y = x_1 - x_2$ vektorra

$$0 = \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = \|x_1 - x_2\|^2$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.

10.100. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \left\{x \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \|x\| \leq 1\right\}$$
jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;
2. *minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra*
$$\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot \sup_{x \in X} \|Ax\|';$$
3. *A folytonos.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ és a $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tereket. Legyen

$$K = \max\left\{\|Ae_1\|', \ldots, \|Ae_n\|'\right\}.$$

A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 10.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\|_1 \leq C\|x\|$ teljesül. Ekkor minden $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|Ax\|' = \left\|A\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|' = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k A e_k\right\|' \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k A e_k\|' \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| K = \|x\|_1 K \leq KC\|x\|.$$

Tehát

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|' \leq \sup_{\|x\| \leq 1} KC\|x\| = KC < \infty.$$

Vezessük be a $c = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|'$ jelölést. Minden $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektor esetén ekkor

$$\|Ax\|' = \|x\| \cdot \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|' \leq \|x\| \cdot c$$

teljesül. Az $x = 0$ esetben pedig nyilván $\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot c$.
Legyen $a \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ha a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c+1}$ választással élünk és valamely $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{a\}$ pontra $\|x - a\| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|Ax - Aa\|' = \|x - a\| \cdot \left\|A\frac{x - a}{\|x - a\|}\right\|' \leq \|x - a\| c < \delta \cdot c = \varepsilon \cdot \frac{c}{c+1} < \varepsilon$$

teljesül. Vagyis A folytonos a tetszőlegesen választott a pontban, ezért folytonos.

10.101. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér. A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. A 10.100 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{\|x\| \le 1} \|(A + B)x\|' = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax + Bx\|' \le \sup_{\|x\| \le 1} \left(\|Ax\|' + \|Bx\|'\right) \le \\
&\le \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|' + \sup_{\|x\| \le 1} \|Bx\|' = \|A\| + \|B\| ; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\| \le 1} \|\lambda Ax\|' = |\lambda| \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|' = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $\|x\| \le 1$ esetén $\|Ax\|' = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \le 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

10.102. Definíció. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

Jelölés. Ha lineáris leképezésnek a normáját vesszük, akkor mindig az operátornormát számoljuk, hacsak másképp nem nyilatkozunk.

10.103. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *és* $x \in \mathbb{K}^n$*. Ekkor*

$$\|Ax\|' \le \|A\| \cdot \|x\| .$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektorra $\|x'\| \le 1$, ezért $\|Ax'\|' \le \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

10.104. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{n_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ *normált tér minden* $i = 1, 2, 3$ *esetén, legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{n_1}, \mathbb{K}^{n_2})$ *és* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{n_2}, \mathbb{K}^{n_3})$*. Ekkor*

$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^{n_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, valamint $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{n_1}, \mathbb{K}^{n_2})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{n_2}, \mathbb{K}^{n_3})$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{n_1}$ vektor esetén

$$\|BAx\|_{(3)} \le \|B\| \cdot \|Ax\|_{(2)} \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)} ,$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_{(1)} \le 1} \|BAx\|_{(3)} \le \sup_{\|x\|_{(1)} \le 1} \Big(\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{(1)}\Big) = \|B\| \cdot \|A\| .$$

10.105. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *tér Banach-tér.*

Bizonyítás. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ tér véges dimenziós normált tér, ezért a 10.86 tétel alapján teljes.

Jelölés. Ha $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ tér elemeivel dolgozva a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér identitás leképezését nem írjuk ki, ha ezzel nem okozunk félreértést, illetve az 1 fogja jelölni az alábbi konvenciónak megfelelően.

$$\forall A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \forall \lambda \in \mathbb{K}: \qquad \lambda \pm A \triangleq \lambda \, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}} \pm A$$

10.106. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ leképezésre $\|A\| < 1$ teljesül, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $\mathrm{id} - A$ elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathrm{id} - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ identitásfüggvényt.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \le \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1-A) \cdot \sum_{k=0}^{n} A^k = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k \right) \cdot (1-A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1-A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) \cdot (1-A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

10.107. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \triangleq \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) | \; \exists a^{-1} \right\}.$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor

1. *minden $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$;*
2. *a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. 1. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\left\|1 - ba^{-1}\right\| = \left\|(a-b)a^{-1}\right\| \le \|a - b\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $1 - (1 - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a, balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$.
2. Mivel a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.

3. Legyen $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n},\mathbb{K})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n},\mathbb{K})$ elemre

$$\|a-x\| < \delta \quad \to \quad x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n},\mathbb{K}) \ \wedge \ \left\|a^{-1}-x^{-1}\right\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\left\|a^{-1}\right\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n},\mathbb{K})$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\begin{aligned}
&\left((x^{-1}-a^{-1})+a^{-1}\right)\cdot((x-a)+a)=1\\
&(x^{-1}-a^{-1})(x-a)+(x^{-1}-a^{-1})a+a^{-1}(x-a)=0\\
&(x^{-1}-a^{-1})a=-a^{-1}(x-a)-(x^{-1}-a^{-1})(x-a)\\
&x^{-1}-a^{-1}=-a^{-1}(x-a)a^{-1}-(x^{-1}-a^{-1})(x-a)a^{-1}\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\| \le \left\|a^{-1}\right\|^2\cdot\|x-a\|+\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\cdot\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\|\left(1-\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|\right) \le \left\|a^{-1}\right\|^2\cdot\|x-a\|\\
&\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\| \le \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1-\|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\|}\cdot\|x-a\| < \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1-\frac{1}{2}}\cdot\|x-a\|
\end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x-a\| < \delta_1 \quad \to \quad \|x-a\|\cdot\left\|a^{-1}\right\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|a^{-1}\right\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\left\|x^{-1}-a^{-1}\right\| < \varepsilon$$

teljesül.

10.16. Multilineáris leképezések

10.108. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1,\ldots,x_k) \mapsto A(x_1,\ldots,x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1,\ldots,k\}$ indexre

$$A(x_1,\ldots,x_{i-1},\lambda x_i+\mu y_i,x_{i+1},\ldots,x_k) = \lambda A(x_1,\ldots,x_k)+\mu A(x_1,\ldots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\ldots,x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ jelölést használjuk.

10.109. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, valamint $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$. Minden $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji_1\ldots i_k} = A(e_{i_1}\ldots e_{i_k})_j$. Ekkor minden $x^{(1)},\ldots,x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektor és $j \in \{1,\ldots,\mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$A(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})_j = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1,\ldots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\ldots x^{(k)}_{i_k} \tag{10.1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $A \in \operatorname{Lin}^k\left((\mathbb{K}^\mathfrak{n})^k, \mathbb{K}^\mathfrak{m}\right)$, $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} A(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})_j &= A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}\right)_j = \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_k}^{(k)} A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})_j = \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\mathfrak{n}} A_{j,i_1\ldots i_k} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_k}^{(k)} \end{aligned}$$

teljesül.

10.110. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : (\mathbb{K}^\mathfrak{n})^k \to \mathbb{K}^\mathfrak{m}$ multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{x_i \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1\right\}$$

jelölés mellett $\sup_{x\in X} \|A(x)\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$\|A(x_1, \ldots, x_k)\|' \leq \|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x\in X} \|A(x)\|' ;$$

3. *A folytonos.*

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |a_i|$$

normát. A véges dimenziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 10.80 tétel szerint, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra $\|x\|_1 \leq C\|x\|$ teljesül. Legyen

$$K = \max\left\{\|A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\|' \mid \forall j \in \{1, \ldots, k\} : i_j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\right\}.$$

Legyen minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tetszőleges vektor, melyet a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tér standard bázisában az

$$x_j = \sum_{i_j=1}^{\mathfrak{n}} a_{j,i_j} e_{i_j}$$

alakban írhatunk fel. Az A multilinearitásának a felhasználásával az

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \ldots, x_k)\|' &= \left\|A\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} a_{1,i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} a_{2,i_2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} a_{k,i_k} e_{i_k}\right)\right\|' \leq \\ &\leq \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} \cdots \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}| |a_{2,i_2}| \ldots |a_{k,i_k}| \|A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\|' \leq \\ &\leq K \sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}} \cdots \sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}} |a_{1,i_1}| |a_{2,i_2}| \ldots |a_{k,i_k}| = \\ &= K\left(\sum_{i_1=1}^{\mathfrak{n}_1} |a_{1,i_1}|\right)\left(\sum_{i_2=1}^{\mathfrak{n}_2} |a_{2,i_2}|\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_k=1}^{\mathfrak{n}_k} |a_{k,i_k}|\right) = \\ &= K\|x_1\|_1 \|x_2\|_1 \cdot \ldots \cdot \|x_k\|_1 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq KC \cdot C \cdot \ldots \cdot C \|x_1\| \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\| \leq \\ &\leq KC^k \prod_{j=1}^{k} \|x_j\|\end{aligned}$$

egyenlőtlenség adódik. Tehát ha

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1 \right\},$$

akkor $\sup\limits_{x \in X} \|A(x)\|' \leq KC^k < \infty$.
Vezessük be a $c = \sup\limits_{x \in X} \|Ax\|'$ jelölést. Minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektor esetén ekkor

$$\|A(x_1, \ldots, x_k)\|' = \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\| \left\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_k}{\|x_k\|}\right) \right\|' \leq \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\| \, c$$

teljesül.
A (10.1) képlet alapján minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j \circ A$ nem más, mint egy olyan véges összeg, melynek tagjai véges sok projekció szorzatának számszorosai. Ezért minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $\mathrm{pr}_j \circ A$ folytonos, tehát a 10.90 tétel alapján A folytonos.

10.111. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left(\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\right)^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{ \|Ax\|' \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} | \; \|x_i\| \leq 1\} \right\}$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint vezessük be az

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

jelölést. Legyen $A, B \in \mathrm{Lin}^k\left(\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\right)^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. A 10.110 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \in X} \|(A + B)x\|' = \sup_{x \in X} \|Ax + Bx\|' \leq \sup_{x \in X} \left(\|Ax\|' + \|Bx\|'\right) \leq \\ &\leq \sup_{x \in X} \|Ax\|' + \sup_{x \in X} \|Bx\|' = \|A\| + \|B\|; \\ \|\lambda A\| &= \sup_{x \in X} \|\lambda Ax\|' = |\lambda| \sup_{x \in X} \|Ax\|' = |\lambda| \cdot \|A\|.\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy egy $A \in \mathrm{Lin}^k\left(\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\right)^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorrendszerre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = \|x_1\| \ldots \|x_k\| \, A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_k}{\|x_k\|}\right) = 0$$

teljesül, vagyis $A = 0$. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

10.112. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\mathrm{Lin}^k\left(\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\right)^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Mivel $\dim \mathrm{Lin}^k\left(\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\right)^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^k < \infty$, ezért véges dimenziós normált tér, tehát a 10.86 tétel alapján teljes.

10.113. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}_{\mathrm{s}}^k((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli a továbbiakban.

10.114. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. A*

$$\begin{aligned}\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) &\to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^{k+1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\\ A &\mapsto \Big((x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_{k+1})\Big)\end{aligned}$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér $A, B \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$, $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x)+B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) =\\ &= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) = (\rho(A)+\rho(B))(x,y)\\ \rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) =\\ &= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y)\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$, tehát ρ lineáris.
Most igazoljuk, hogy ρ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.
Mivel ρ lineáris injektív leképezés, ezért a képterének a dimenziója megegyezik az értelmezési tartományának a dimenziójával. Az

$$\dim \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}^{k+1} = \dim \mathrm{Lin}^{k+1}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right),$$

egyenlőség alapján ρ szürjektív, tehát lineáris bijekció.
Használjuk a továbbiakban az

$$X = \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \mid \|x_i\| \leq 1\}$$

jelölést. Ha $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)\right)$, akkor

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y \in X\\ x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \ \|x\| \leq 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\\ \|x\| \leq 1}} \sup_{y \in X} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}\\ \|x\| \leq 1}} \|A(x)\| = \|A\|$$

teljesül.

10.115. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.

– Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
– Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
– Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^n$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

10.116. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \geq K \|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \leq -K' \|v\|^k$.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$ pozitív definit leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in \mathbb{R}^n |\ \|v\| = 1\}$ halmazt. Az S halmaz korlátos, zárt, tehát a 10.84 tétel alapján kompakt. Vagyis az A folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon és felveszi a minimumát is. Az A függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \leq A(v^{[n]})$. Ez a K szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos A függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana A pozitív definitségének.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $A(x^{[k]}) \geq K \|x\|^k$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \ldots, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

teljesül, amiből az A operátor multilinearitása miatt

$$A(x, \ldots, x) \geq K \cdot \|x\|^k$$

adódik.
Ha A negatív definit, akkor $-A$ pozitív definit, amire alkalmazva az előző eredményt, kapjuk a bizonyítandó állítást ebben az esetben is.

10.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

10.117. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\, \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \Big(d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

10.118. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ kontrakció a $C \in [0, 1[$ kontrakciós együtthatóval. Legyen $x \in \mathrm{Dom}\, f$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ha $y \in B_\varepsilon(x) \cap \mathrm{Dom}\, f$, akkor

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) < d(x, y) < \varepsilon,$$

vagyis $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, amiből $f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ következik. Ez viszont éppen az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti.

10.119. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció a $C \in]0, 1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \to M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq C d(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in \Omega$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor az

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq C d(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből a $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

10.18. Konvex halmazok szétválasztása

10.120. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\mathrm{dist}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x\in A} d(z, x).$$

10.121. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*
$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. *$\overline{A} = \{z \in M \mid \ \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\mathrm{dist}_A(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

vagyis

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x, y) \leq \inf_{z\in A} d(y, z) = \mathrm{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y) \leq d(x, y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\mathrm{dist}_A(y) - \mathrm{dist}_A(x) \leq d(x, y)$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x, y).$$

2. A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy dist_A egyenletesen folytonos, amiből pedig a folytonossága következik.
3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M|\ \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ősképe ($B = \overset{-1}{\mathrm{dist}}_A(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x, z) \geq r$, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) = \inf_{z \in A} d(x, z) \geq r,$$

vagyis $\mathrm{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

10.122. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf \{\|x - y\| \ |\ x \in A,\ y \in B\}.$$

10.123. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0, 1]$ paraméterre $(1 - t)x + ty \in K$ teljesül.

10.124. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a, b) = \mathrm{dist}(K, Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált teret. Legyenek $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $r = \mathrm{dist}(K, Z)$. Vizsgáljuk az

$$\mathrm{dist}_Z : K \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto \mathrm{dist}_Z(y)$$

függvényt. A 10.121 tétel értelmében ez folytonos függvény, ezért a K kompakt halmazon felveszi minimumát. Tegyük fel, hogy az $a \in K$ pontban veszi fel a minimumát. Ekkor $\mathrm{dist}_Z(a) > 0$, ugyanis ha $\mathrm{dist}_Z(a) = 0$ teljesülne, abból a 10.121 tétel alapján $a \in \overline{Z} = Z$ teljesülne, amiből az $a \in K \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódna.
Igazoljuk, hogy $\mathrm{dist}_Z(a) = r$. Ha $\mathrm{dist}_Z(a) > r$ lenne, akkor minden $y \in K$ esetén $\mathrm{dist}_Z(y) \geq \mathrm{dist}_Z(a)$, vagyis minden $x \in Z$ esetén $d(x, y) \geq \mathrm{dist}_Z(a)$ adódna, ebből pedig az

$$r = \inf \{d(x, y)|\ x \in Z,\ y \in K\} \geq \mathrm{dist}_Z(a) > r$$

ellentmondást kapnánk. A $\mathrm{dist}_Z(a) < r$ egyenlőtlenség pedig $\mathrm{dist}(K, Z)$ definíciójának mondana ellent. Ezért $\mathrm{dist}_Z(a) = r$.
Megmutatjuk, hogy $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \neq \emptyset$. Ha $\overline{B_{r+1}(a)} \cap Z = \emptyset$ teljesülne, akkor minden $x \in Z$ esetén $d(a, x) \geq r + 1$ lenne, amiből $\mathrm{dist}_Z(a) \geq r + 1$ adódna. Tekintsük a

$$d(a, \cdot) : \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto d(a, x)$$

kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényt. Ennek legyen a minimuma a $b \in Z$ pontban. Megmutatjuk, hogy ekkor $d(a, b) = \mathrm{dist}_Z(a)$ teljesül. A $\mathrm{dist}_Z(a)$ definíciója alapján

$$\mathrm{dist}_Z(a) = \inf \{d(a, x)|\ x \in Z\} \leq d(a, b).$$

Ha $\mathrm{dist}_Z(a) < d(a, b)$ lenne, akkor létezne olyan $b' \in Z$ melyre $\mathrm{dist}_Z(a) < d(a, b') < d(a, b)$ teljesülne. Ekkor $b' \in \overline{B_{r+1}(a)} \cap Z$ olyan pont lenne, ahol a $d(a, \cdot)$ függvény kisebb értéket venne fel, mint a minimumhelyén, a b pontban.
Ezzel igazoltuk, hogy az $a \in K$ és $b \in Z$ pontra $d(a, b) = r = \mathrm{dist}(K, Z)$.
A továbbiakban tekintsük az $\mathbb{R}^n$ teret a $\|\cdot\|_2$ normával és tegyük fel, hogy az előzőekben ezen norma

mellett határoztuk meg az a, b pontokat. Legyen $z = a - b$, $c = \frac{1}{2}\left(\|a\|_2^2 - \|b\|_2^2\right)$ és $x \in K \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x-a) + a - b\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\alpha(t) = t^2 \|x-a\|_2^2 + 2t\langle x-a, a-b\rangle + \|a-b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\frac{\langle x-a, a-b\rangle}{\|x-a\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0,1[$ ahol $\alpha(0) > \alpha(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x-a)+a \in K$ pontra a $d(a,b) > d(p,b)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a,b)$.
Tehát $t_0 \le 0$, ami éppen az $\langle x-a, a-b\rangle \ge 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\langle x, a-b\rangle \ge \langle a, a-b\rangle$$
$$\langle x, z\rangle - c \ge \langle a, a-b\rangle - c = \frac{\|a-b\|_2^2}{2} > 0$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = a$ esetben $\langle a, z\rangle - c = \frac{\|a-b\|_2^2}{2} > 0$. Vagyis minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$.
Legyen most $x \in Z \setminus \{b\}$ tetszőleges pont. Tekintsük a

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \|t(x-b) + b - a\|_2^2$$

kvadratikus kifejezést, melyet az

$$\beta(t) = t^2 \|x-b\|_2^2 + 2t\langle x-b, b-a\rangle + \|a-b\|_2^2$$

alakban is felírhatunk. Ennek a függvénynek a minimumhelye a $t_0 = -\frac{\langle x-b, b-a\rangle}{\|x-b\|_2^2}$ pontban van. Ha $0 < t_0$ teljesülne, akkor létezne olyan $t' \in]0,1[$ ahol $\beta(0) > \beta(t')$ lenne, vagyis a $p = t'(x-b)+b \in Z$ pontra a $d(a,b) > d(a,p)$ teljesülne, ami ellentmonda annak, hogy a két halmaz távolsága éppen $d(a,b)$. Tehát $t_0 \le 0$, ami éppen az $\langle x-b, b-a\rangle \ge 0$ egyenlőtlenséget jelenti. Ebből

$$\langle x-b, a-b\rangle \le 0$$
$$\langle x, z\rangle \le \langle b, a-b\rangle$$
$$\langle x, z\rangle - c \le \langle b, a-b\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$$

következik. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x = b$ esetben $\langle b, z\rangle - c = -\frac{\|a-b\|_2^2}{2} < 0$. Vagyis minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.

10.125. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

Bizonyítás. A 10.124 tételt kell alkalmazni a $K = \{p\}$ kompakt konvex halmazra.

10.126. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \forall x \in Z : \ \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \ \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és

$$H = \{(z,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z :\ \langle z,x \rangle < c\}.$$

Ha $p \in Z$, akkor minden $(z,c) \in H$ esetén $\langle z,p \rangle < c$, tehát

$$p \in \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z,y \rangle < c\}$$

Ha $p \notin Z$, akkor létezik olyan $(z,c) \in H$, hogy $\langle z,p \rangle > c$, tehát

$$p \notin \bigcap_{(z,c)\in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z,y \rangle < c\}.$$

10.19. Az algebra alaptétele

10.127. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} :\ r < |x| \ \to\ C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C} :\ f(x) \neq 0 \ \to\ \exists y \in \mathbb{C} :\ |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre teljesülnek az állítás feltételei. Legyen $\alpha = \inf\limits_{x\in\mathbb{C}} |f(x)|$. Ekkor a $C = \alpha + 1$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $r < |x|$ esetén $C < |f(x)|$. A $\mathbb{C}$ normált térben $K = \overline{B_r(0)}$ korlátos és zárt halmaz, ezért kompakt. Az f függvény a K kompakt halmazon felveszi minimumát, vagyis létezik olyan $a \in K$, melyre $f(a) = \alpha$ teljesül. Ha $\alpha = 0$, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|f(y)| < |f(a)|$. Ekkor az $r < |y|$ esetben az

$$1 + \alpha \leq |f(y)| < |f(a)| = \alpha$$

ellentmondást kapjuk. Az $|y| \leq r$ esetén $y \in K$, ami pedig annak mond ellent, hogy a K kompakt halmazon az a pontban minimális az $|f|$ függvény. Tehát az $\alpha > 0$ feltevés esetén ellentmondást kapunk, így $\alpha = 0$.

10.128. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n = 1$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számra

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = 0,$$

ezért létezik olyan r_k, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r_k < |z|$ esetén

$$\left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| < \frac{1}{2n}.$$

Legyen $R = \max\{r_0, \dots, r_{n-1}\}$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $R < |z|$ számra

$$\left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| \geq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{z^{n-k}}\right| > 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát, ha $z \in \mathbb{C}$ és $R < |z|$, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2},$$

ha még $1 < |z|$ is teljesül, akkor

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{|z|}{2}.$$

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter esetén

$$r = \max\{R, 1, 2C\}.$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$|p(z)| > C$$

teljesül.

Ha $a_n \notin \{0, 1\}$ és adott egy $C \in \mathbb{R}^+$ paraméter, akkor az előzőek alapján a $\dfrac{C}{|a_n|}$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$\left|\frac{p(z)}{|a_n|}\right| > \frac{C}{|a_n|},$$

vagyis $|p(z)| > C$.

10.129. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinomot, ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $p(x) \neq 0$. Alakítsuk át a p polinomot az alábbiak szerint.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k((z-x)+x)^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} (z-x)^j x^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} (z-x)^j x^{k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (z-x)^j \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}\right)$$

Minden $j \in \{0, \dots, n\}$ esetén bevezetve a $b_j = \displaystyle\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}$ jelölést

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z-x)^k$$

adódik. Mivel $p(x) \neq 0$, ezért $b_0 \neq 0$, valamint $b_n = a_n \neq 0$. Tekintsük a $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ polinomot. Ha van olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen az $y = y' + x$ számra

$$|p(y)| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k (y')^k\right| = |q(y')| < |b_0| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k (x-x)^k\right| = |p(x)|$$

teljesül.
Tehát azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$. Ehhez legyen

$$m = \min\{k \in \{1,\dots,n\} \mid b_k \neq 0\}.$$

Mivel $b_n = a_n \neq 0$, ezért $1 \le m \le n$. Ekkor

$$|q(z)| = \left| b_0 + b_m z^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k z^k \right| = |b_0| \cdot \left| 1 + \frac{b_m}{b_0} z^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} z^k \right|.$$

Olyan $y' \in \mathbb{C}$ számot kell találnunk, melyre

$$\left| 1 + \frac{b_m}{b_0}(y')^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}(y')^k \right| < 1.$$

Legyen $\omega \in \mathbb{C}$ egy olyan komplex szám, melyre $\omega^m = -\dfrac{b_0}{b_m}$ teljesül és keressük az y' értékét $t\omega$ alakban, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor olyan $t \in \mathbb{R}$ számot keresünk, melyre

$$\left| 1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m} \right| < 1.$$

Mivel $\lim\limits_{t\to 0} \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m} = 0$, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_1$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m} \right| < \frac{1}{2}.$$

Legyen $t \in \,]0, \min\{1, r\}[$ tetszőleges. Mivel ekkor $1 - t^m, t^m \in \mathbb{R}^+$, ezért

$$\left| 1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0}\omega^k t^{k-m} \right| \le 1 - t^m + t^m \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}t^m < 1.$$

Tehát például $y' = \dfrac{\min\{1, r\}}{2}\omega$ olyan, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül.

10.130. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

Bizonyítás. Minden $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőkú polinom folytonos függvény, valamint a 10.128 és a 10.129 tétel miatt teljesülnek rá a 10.127 tétel feltételei, ezért a 10.127 tétel alapján létezik gyöke.

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

11.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

11.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A: \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

11.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in M : \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a $\|\cdot\|$ folytonossága miatt

$$\forall t \in M : \ \lim_{m\to\infty} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \left\|f_n(t) - \lim_{m\to\infty} f_m(t)\right\| = \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$$

adódik.

11.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t\in M} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \quad \Rightarrow \quad \|f(t) - f(x)\| \leq \|f(t) - f_{N+1}(t)\| + \|f_{N+1}(t) - f_{N+1}(x)\| + \|f_{N+1}(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

11.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.4 tételt adódik az állítás.

11.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \dots, x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z\in B_{r(x_k)}(x_k)} \|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k |\ k \in \{0, \dots, n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0, \dots, n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \le N < l$ miatt

$$\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $\|f(z) - f_l(z)\| < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

11.2. A korlátos folytonos függvények tere

11.7. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^m$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^m$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^n$, akkor az $M \to \mathbb{K}^m$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ jelöli.

11.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^b(M, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|f\|_{\sup} = 0 \ \leftrightarrow\ f = 0;$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall f \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup};$
3. $\forall f, g \in C^b(M, \mathbb{K}^m) :\ \|f + g\|_{\sup} \le \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}.$

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

11.9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \Big(N < n \ \rightarrow\ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}})$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ (N < n \ \rightarrow\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)\,,$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x\in M} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{n}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ \big(N < n \ \rightarrow\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\big),$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

11.10. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \rightarrow\ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \big(N < n \ \rightarrow\ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \rightarrow\ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\sup} = \sup_{t\in M} \|f_n(t) - f_m(t)\| \geq \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x \in M$ pont esetén az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos függvény, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\| < K$ teljesül. Ezek alapján minden $N < n$ természetes számra és $x \in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1,$$

vagyis

$$\|f_n(x)\| < 1 + \|f_{N+1}(x)\| < 1 + K$$

adódik, ebből pedig $\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| < 1 + K$. Tehát az f függvény korlátos.
A 11.3 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
A 11.9 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergenciája éppen a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ térbeli $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ konvergenciát jelenti.

11.11. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in M$ esetén a $\sum_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénysor minden pontban konvergens.

11.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor a $\sum_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó olyan függvénysorozat, melyre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty.$$

Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Definiáljuk az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad n \mapsto \sup_{t\in T} \|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az 5.5 tétel miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

11.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása

11.13. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y |\ t \in [0,1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

11.14. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : B_r(a) \to \mathbb{R}$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f_n'(y) - f_m'(y)| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x \rfloor$ szakaszra alkamazva a 7.17 véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| \leq \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a|$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(a) - f_m(a)| + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ valós Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - f_n'(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x-t)}{|x-t|}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 11.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$f'(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} |f'_n(y) - f'_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - (f'_n(t) - f'_m(t))u$$

függvényre és az $\lfloor t, x \rfloor$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - (f'_n(t)(x-t) - f'_m(t))(x-t)| \leq$$
$$\left(\sup_{y\in]t,x[} |(f_n - f_m)'(y) - (f'_n(t) - f'_m(t))| \right) \cdot |t - a|$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_n(t) - f'_n(t)(x-t) - (f_m(x) - f_m(t) - f'_m(t))(x-t))| \leq \\ &\leq \left(\sup_{y\in]t,x[} (|(f_n - f_m)'(y)| + |f'_n(t) - f'_m(t)|) \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} |(f_n - f_m)'(y)| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x-t| = \varepsilon\, |x-t|\,. \end{aligned}$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot |x-t|}{|x-t|} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \ (N < n, m \ \to \ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

11.15. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;

2. az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;

3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{x \in \Omega \middle|\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 11.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0,1] \mid \lfloor a, a + t(x-a) \rfloor \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 11.14 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\,|x-a|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x - a) \in \Omega'$ elemre

$$|p - q| = |a + c(x-a) - a - t_0(x-a)| = |c - t_0| \cdot |x - a| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 11.14 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 11.14, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

11.16. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;

2. az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor;

3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Legyen $a \in \Omega$ olyan pont, ahol konvergens a $\sum\limits_{n\in\infty} f_n(a)$ sor, és tegyük fel, hogy az

$\sum_n f'_n$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.15 állítást adódik a tétel.

11.17. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat, mely egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor a 11.4 tétel miatt f folytonos függvény, tehát Riemann-integrálható. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon'$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \int_a^b \varepsilon' = (b-a)\varepsilon'$$

teljesül. Vagyis minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

határértéket jelenti.

11.18. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 11.17 tételt adódik az állítás.

11.4. Hatványsorok

11.19. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

11.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

teljesül.

4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.
3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in B_r(0)} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az 5.31 tételt használtuk.
1. Ha $x \in \mathbb{K}$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.
2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n} a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 10.92 tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $|a_k x^k| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq n \right\} \leq \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \;\middle|\; k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.
4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 11.12 Weierstrass-tétel, ezért ezen a halmazon egyenletesen konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.
5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 11.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

11.21. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad k \mapsto (k+1)a_{k+1}$$

sorozatot és az általa meghatározott P_b hatványsort. A P_b hatványsor konvergenciasugarára $R_b = R_a$ teljesül. Ekkor a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_b hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $I =]-R_a, R_a[$ intervallumon, valamint $x_0 = 0$ olyan pont az I intervallumban, ahol a P_a hatványsor konvergens. Ezért a 11.16 tétel alapján a P_a hatványsort lehet tagonként deriválani az I intervallum minden pontjában.

11.22. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\, x.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Legyen továbbá $[\alpha, \beta]$ olyan korlátos intervallum, melyre $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ teljesül. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_a hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ kompakt halmazon, azonban a 11.6 tétel miatt egyenletesen is itt. Figyelembe véve, hogy a hatványsor minden részletösszeg függvénye folytonos és egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ véges intervallumon, a 11.18 tétel alapján a hatványsor tagonként intergrálható.

11.5. Abel-tétel

11.23. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_n a_n$ sor konvergens. Vezessük be az $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jelölést valamint, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum\limits_{k=n}^{n+m} a_k \right|$ és $\alpha_n = A - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} C_n &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| (A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1}) \right| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \alpha_{n-1} - \alpha_{n+m} \right|. \end{aligned}$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\alpha_n| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \le |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \le K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \le C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}|$$

teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}| \le |\alpha_{n-1}| + \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{n+m}| \le \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \le C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \le \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

11.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0,x_0 \rfloor}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $R_a = 1$ teljesül és a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Ha $x \in [0, 1[$, akkor a P_a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k = \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) \left(\sum_{j=n}^{k} a_j \right) + x^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ezért a 11.23 tétel alapján ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right|,$$

akkor $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. Mivel $x \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| x^k - x^{k+1} \right| \left| \sum_{j=n}^{k} a_j \right| + |x|^{n+m} \left| \sum_{j=n}^{n+m} a_j \right| \le \\
&\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| x^k - x^{k+1} \right| C_n + |x|^{n+m} C_n = \\
&= C_n \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} \left(x^k - x^{k+1}\right) + x^{n+m} \right) = \\
&= C_n \left(x^n - x^{n+m} + x^{n+m}\right) C_n = C_n x^n
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right| \le \lim_{m\to\infty} C_n x^n = C_n x^n \le C_n.$$

Az $P_a(1)$ értékre

$$\left| P_a(1) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0,1]$ esetén

$$\left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \le C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \le C_n.$$

Mivel a 11.23 tétel alapján a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens az R_a pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = a_n R_a^n$ sorzatot. Ekkor $R_b = 1$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergens. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon. Amiből az

$$\sup_{x\in[0,R_a]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \sup_{t\in[0,1]} \left| P_a(tR_a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(tR_a\right)^k \right| = \sup_{t\in[0,1]} \left| P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens az $[0,R_a]$ halmazon.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül és a P_a hatványsor konvergens a $-R_a$ pontban. Definiáljuk a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b_n = (-1)^n a_n$ sorzatot. Ekkor $R_b = R_a$ és a P_b hatványsor konvergens az R_b pontban. Az előzőek alapján a P_b hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,R_b]$ halmazon. Amiből a

$$\sup_{x\in[-R_a,0]} \left| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \sup_{t\in[0,R_a]} \left| P_b(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^k \right|$$

azonosságok alapján következik, hogy a P_a hatványsor egyenletesen konvergens a $[-R_a,0]$ szakaszon.
A P_a hatványsor folytonossága a folytonos részletösszeg függvények egyenletes konvergenciájából következik.

11.6. Approximáció polinomokkal

11.25. Definíció. Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

11.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a,b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a,b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a,b]$, $|t-t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a,b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left| B_n^f(t) - f(t) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right) \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \right|. \qquad (11.1)$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta \right\}$$
$$J_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta \right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (11.1) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
\left|B_n^f(t) - f(t)\right| &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
&+ \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
&= \varepsilon' + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}$$

ahol $x = \dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$ny(y+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k z^{n-k}$$
$$n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) y^k z^{n-k}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k y^k (1-y)^{n-k}$$

$$n(n-1)y^2 + ny = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 y^k (1-y)^{n-k}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \frac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a, b]$ esetén

$$\left| B_n^f(t) - f(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t \in [a,b]} \left| B_n^f(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon.$$

11.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. A 11.26 Bernstein-polinomokkal való approximációs tétel közvetlen következménye.

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban

12.1. Differenciálhatóság

12.1. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény és* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$*. Tegyük fel, hogy* $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$*, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$*.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olyan, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x\to a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\,\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

12.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\}$$

függvényt.

– Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.

– Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény, valamint* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$*. Az* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n : \Big(\|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

12.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ tereken választott normától.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Legyen $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ norma az $\mathbb{R}^n$ téren és $\|\cdot\|_{(a)}$, $\|\cdot\|_{(b)}$ norma az $\mathbb{R}^m$ téren. A 10.78 tétel alapján léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $c\,\|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)}$ és minden $y \in \mathbb{R}^m$ esetén $\|y\|_{(b)} \leq d\,\|y\|_{(a)}$.
Ha f differenciálható az a pontban a $\|\cdot\|_{(1)}$ és az $\|\cdot\|_{(a)}$ norma szerint, akkor az

$$\frac{\frac{1}{d}\,\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(b)}}{\frac{1}{c}\,\|x-a\|_{(2)}} \leq \frac{\|f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)\|_{(a)}}{\|x-a\|_{(1)}}$$

egyenlőtlenség alapján a $\|\cdot\|_{(2)}$ és a $\|\cdot\|_{(b)}$ norma szerint is differenciálható, ugyanazzal a deriválttal.

12.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x - a|} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x - a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{|x-a|}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

12.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 12.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x)-f(a)-(\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \le \|x-a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x)-f(a)\| \le \|x-a\| \cdot (1+\|(\mathrm{D}f)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

12.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \dots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban és jelölje $A = (\mathrm{D}f)(a)$ a deriváltat. A 12.4 tétel alapján megtehetjük, hogy a végtelen normát tekintjük a $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ téren. Legyen $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f függvény differenciálható az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ elemre $0 < \|x-a\| < \delta$ esetén

$$\frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|} < \delta$$

teljesül. A

$$\frac{|f_i(x)-f_i(a)-(A(x-a))_i|}{\|x-a\|} \le \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|_\infty}{\|x-a\|}$$

egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban és $(Df_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ A$ teljesül.

Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban, és legyen $B_i = (\mathrm{D}f_i)(a)$. Tekintsük a

$$B : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto (B_1 x, \ldots, B_{\mathfrak{m}} x)$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy $(Df)(a) = B$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén f_i differenciálható az a pontban, ezért

$$\exists \delta_i \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} : \Big(\|x - a\| < \delta_i \ \to \ \|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{\mathfrak{m}}\}$. Ha $x \in B_\delta(a)$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - f(a) - B(x-a)\|_\infty = \\
&\quad = \|(f_1(x) - f_1(a) - B_1(x-a), \ldots, (f_n(x) - f_n(a) - B_n(x-a))\|_\infty = \\
&\quad = \max\{|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)| \mid i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}\} \leq \varepsilon \cdot \|x - a\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis az f függvény differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}f)(a) = B$ teljesül.

12.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

12.8. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $\varphi : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, \varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \cap \mathrm{Dom}\, \varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x - a\|} = 0 \\
&\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x - a\|} = 0.
\end{aligned}$$

1. Az

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - (F+G)(x-a)}{\|x - a\|} = \\
&\quad = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x - a\|} = 0
\end{aligned}$$

egyenlőség igazolja, hogy $f + g$ is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F + G$.
2. Az

$$\lim_{x \to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a) - (cF)(x-a)}{\|x - a\|} = c \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \\
&= \Big\| \Big(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\Big) f(x) + \varphi(a) \Big(f(x) - f(a) - F(x-a)\Big) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a) \Big\| \leq \\
&\leq \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \\
&\quad + \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x - a\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \le \\
&\le \lim_{x\to a}\left\|\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\|\cdot\|f(x)\|+|\varphi(a)|\cdot\lim_{x\to a}\left\|\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|}\right\|+ \\
&\quad+\lim_{x\to a}\|f(x)-f(a)\|\cdot\|\Phi\| = \\
&= 0\cdot\|f(a)\|+|\varphi(a)|\cdot 0+0\cdot\|\Phi\|=0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a}\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(a)-f(a)\Phi(x-a)-\varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $\mathrm{D}(\varphi f)=f(a)\Phi+\varphi(a)F$.

12.9. Tétel. *Minden $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ vektortér.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a\in\Omega$ pontra alkalmazni.

12.10. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^{n_2}$, $f:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{n_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f\circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f\circ g))(a)=(\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a).$$

Bizonyítás. Legyen $g:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^{n_2}$, $f:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{n_3}$ és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\circ g$. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, tehát

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+\exists\delta_1\in\mathbb{R}^+\forall y\in\mathbb{R}^{n_2}: \\
&\qquad \|y-g(a)\|<\delta_1 \;\to\; \|f(y)-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(y-g(a))\|\le\varepsilon_1\cdot\|y-g(a)\|\,.
\end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$, tehát

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon_2\in\mathbb{R}^+\exists\delta_2\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{n_1}: \\
&\qquad \|x-a\|<\delta_2 \;\to\; \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|\le\varepsilon_2\cdot\|x-a\|\,.
\end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall\varepsilon_3\in\mathbb{R}^+\exists\delta_3\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}^{n_1}: \qquad \|x-a\|<\delta_3 \;\to\; \|g(x)-g(a)\|<\varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{n_1}$ esetén

$$\|x-a\|<\delta_3 \;\to\; \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\|\le\varepsilon_1\cdot\|g(x)-g(a)\|\,.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{n_1}$ esetén

$$\|x-a\|<\delta_2 \;\to\; \|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|\,.$$

Legyen $\delta'=\min\{\delta_2,\delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x\in\mathbb{R}^{n_1}$ vektorra, ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
\|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\|&\le\varepsilon_1\cdot\|g(x)-g(a)\| \\
\|g(x)-g(a)-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\|&\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|
\end{aligned}$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\|g(x)-g(a)\|\le\varepsilon_1\cdot\|x-a\|+\|(\mathrm{D}g)(a)\|\cdot\|x-a\|\,.$$

Ezek alapján, ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| = \\
&\quad= \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))+ \\
&\qquad\qquad +(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| \le \\
&\quad\le \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| + \\
&\qquad + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\cdot\|(g(x)-g(a))-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \le \\
&\quad\le \varepsilon_1\|g(x)-g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\,\varepsilon_1\|x-a\| \le \\
&\quad\le \varepsilon_1(\varepsilon_1\|x-a\|+\|(\mathrm{D}g)(a)\|\,\|x-a\|)+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\,\varepsilon_1\|x-a\| = \\
&\quad= \varepsilon_1(\varepsilon_1+\|(\mathrm{D}g)(a)\|+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|)\,\|x-a\|
\end{aligned}$$

Mivel bármely $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1(\varepsilon_1+\|(\mathrm{D}g)(a)\|+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|)<\varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta'\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x-a\|<\delta'$ esetén

$$\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(g(x)-g(a))\|\le\varepsilon\cdot\|x-a\|\,,$$

ezért a $f\circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a)$.

12.3. Iránymenti derivált

12.11. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ függvény, $a\in\operatorname{Dom} f$ és $e\in\mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}}\frac{f(a+te)-f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

12.12. Tétel. *Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e\in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a)=((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, valamint legyen $A=(\mathrm{D}f)(a)$ és $e\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Az $e=0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e\neq 0$. A

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te)-f(a)}{t}=Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta'\in\mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x\in B_{\delta'}(a):\ \|f(x)-f(a)-A(x-a)\|\le\frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot\|x-a\|$$

teljesül. Ha $\delta=\dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t\in\mathbb{R}$, $|t|<\delta$, akkor $a+te\in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te)-f(a)-A(te)\|\le\frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot|t|\,\|e\|=\varepsilon\,|t|\,.$$

Amiből $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+te)-f(a)-tA(e)}{t}\right\|=0$ következik.

12.4. Néhány speciális függvény deriváltja

12.13. Tétel. *Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tetszőleges pont. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$ linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x-a) = 0$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

12.14. Tétel. *Ha $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i}$, és $j \in \{1, \ldots, k\}$, akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j}$ pontban

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{j.\ hely}, 0, \ldots, 0).$$

Bizonyítás. Az állítás jelölései mellett az

$$\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) = \mathrm{in}_{0,j}(x-a)$$

egyenlőség miatt

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{in}_{u,j}(x) - \mathrm{in}_{u,j}(a) - \mathrm{in}_{0,j}(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

12.15. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^{+}$ és $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $f(a) = a^k$. Ekkor minden $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^{+}$, $f : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $f(a) = a^k$, $a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ és tekintsük a

$$\tau : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

leképezést. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. A minden $h \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| = \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| (a+h)^n - a^n - \sum_{i=0}^{k-1} a^i h a^{k-1-i} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\|h\|^{i}\cdot\|a\|^{k-i} \leq \|h\|\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\|h\|^{i-2}\cdot\|a\|^{k-i} \leq$$
$$\leq \|h\|\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\cdot\|a\|^{k-i} \leq \|h\|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\|a\|^{k-i} = \|h\|\cdot(1+\|a\|)^{k}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a) = \tau$.

12.16. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R}) = \left\{a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \mid \exists a^{-1}\right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ *függvényére minden* $a \in \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a) : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \qquad b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ tetszőleges pont és tekintsük a $\tau \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $\tau(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ leképezést. A jelölések egyszerűsítése végett most jelölje 1 az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}$ leképezést. Ha $0 \neq h \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ és $\|h\| \leq \dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\left\|\frac{i(a+h)-i(a)-\tau(h)}{\|h\|}\right\| = \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|(a+h)^{-1}-a^{-1}+a^{1}ha^{-1}\right\| =$$
$$= \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|((1+a^{-1}h)^{-1}-1+a^{-1}h)a^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-a^{-1}h)^{k}\right\|\cdot\left\|a^{-1}\right\| \leq$$
$$\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^{k} \leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left\|a^{-1}\right\|\cdot\|h\|\right)^{k} =$$
$$= \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|a^{-1}\|^{2}\cdot\|h\|^{2}}{1-\|a^{-1}\|\cdot\|h\|} \leq \|h\|\cdot 2\left\|a^{-1}\right\|^{3}$$

becslés, amiből következik az állítás.

12.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

12.17. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^{+}$, $f : \prod_{i=1}^{k}\mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, $a = (a_1,\dots,a_k) \in \mathrm{Dom}\, f$, valamint $i \in \{1,\dots,k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az

  $$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad x \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_k)$$

  függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a

  $$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$

  jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

  $$\partial_i f = \left\{(a,A) \in (\mathrm{Dom}\, f)\times\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}_i},\mathbb{R}^{\mathrm{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f\circ\mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f\circ\mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array}\right\}$$

  függvényt.
- Az f *függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\mathrm{Dom}\,\partial_i f = \mathrm{Dom}\, f$.

– Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

12.18. Tétel. *Ha az* $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *függvény differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban, akkor minden* $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban és legyen $j \in \{1, \ldots, k\}$. Mivel f és az $\mathrm{in}_{a,j}$ függvény differenciálható, ezért a közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$(\partial_j f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,j}))(a_j) = ((\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,j}(a_j))) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,j})(a_j) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,j}\,.$$

Legyen $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ tetszőleges vektor. Mivel

$$x = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i)$$

és $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés, ezért

$$(\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)) \sum_{i=1}^{k} \mathrm{in}_{0,i}(x_i) = \sum_{i=1}^{k} ((\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,i})(x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

12.19. Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban, akkor minden* $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_i f)(a))x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \ldots & (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Az előző állítás következménye.

12.20. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban. Ekkor a* $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ *lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A 12.7 és a 12.19 tétel egyszerű következménye.

12.21. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^\mathfrak{n}, \mathbb{R}^\mathfrak{m})$ lineáris leképezés mátrixát az *f függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_\mathfrak{m})(a) & (\partial_2 f_\mathfrak{m})(a) & \cdots & (\partial_\mathfrak{n} f_\mathfrak{m})(a) \end{pmatrix}$$

Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak*.

12.22. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ és legyen $k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ tetszőleges index. Ekkor az f függvénynek pontosan akkor létezik a k-adik változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, ha létezik az e_k iránymenti deriváltja az a pontban és ebben az esetben $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $a \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f$ és legyen $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index. Válasszunk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, melyre $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.
Az alábbi ekvivalens átalakítások igazolják az állítást.

$$\begin{aligned} \exists(\partial_k f)(a) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \frac{(f \circ \mathrm{in}_{a,k})(x) - (f \circ \mathrm{in}_{a,k})(a_k) - (\partial_k f)(a)(x - a_k)}{|x - a_k|} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a_k} \left| \frac{f(a + (x - a_k)e_k) - f(a)}{x - a_k} - (\partial_k f)(a) \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = (\partial_k f)(a) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\mathrm{D}_{e_k} f)(a) \end{aligned}$$

12.6. Gradiens, divergencia és rotáció

12.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_\mathfrak{n} f)(a)) \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\mathrm{grad}\, f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

$$\mathrm{grad}\, f : \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^\mathfrak{n} \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_\mathfrak{n} f)(a))$$

függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{grad}\, f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

12.24. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle (\mathrm{grad}\, f)(a), x \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójának közvetlen következménye.

12.25. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor létezik az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle (\mathrm{grad}\, f)(a), e \rangle \,.$$

Bizonyítás. A 12.12 és a 12.24 tétel közvetlen következménye.

12.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ pontban, akkor a $\mathrm{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\mathrm{div}\, f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \triangleq \operatorname{div} f$ jelölést.

12.27. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor*

$$(\operatorname{div} f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

Bizonyítás. A 12.20 tételből és a nyom értelmezéséből rögtön adódik.

12.28. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

12.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $a \in \operatorname{Dom}(\Delta f)$ elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. A gradiens definíciójából és a 12.27 tételből adódik.

12.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az f *függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^3 \\ &\qquad a \mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \triangleq \operatorname{rot} f$ jelölést.

12.7. Folytonosan differenciálható függvények

12.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in \,]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ha $f(a) = f(b)$, akkor nyilván teljesül az állítás, ezért tegyük fel, hogy $f(b) - f(a) \neq 0$. Tekintsük a

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \langle f(b) - f(a), f(a + t(b - a)) - f(a)\rangle$$

függvényt. A φ függvényre alkalmalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, kapjuk, hogy létezik olyan $t_0 \in]0, 1[$, hogy

$$\varphi'(t_0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$

vagyis

$$\langle f(b) - f(a), (\mathrm{D}f)(a + t_0(b - a))(b - a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|_2^2 .$$

Legyen $c = a + t_0(b - a)$. Ekkor a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\|f(b) - f(a)\|_2^2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)(b - a)\|_2 \leq \|f(b) - f(a)\|_2 \cdot \|(\mathrm{D}f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2 .$$

Amit elosztva a $\|f(b) - f(a)\|_2$ számmal kiadja a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

12.32. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \left(\sup_{c\in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\|\right) \cdot \|b - a\|_2 ,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2\leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 .$$

Bizonyítás. Az előző állítás nyilvánvaló következménye.

12.33. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

Bizonyítás. A véges növekmények formulájának következménye.

12.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
Legyen $a \in \Omega$ és $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \Omega$ teljesül, valamint definiáljuk az

$$A : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i),$$

lineáris leképezést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített szám és az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használjuk a végtelen normát. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|f(x) - f(a) - A(x - a)| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty$$

teljesül, melyből következik, hogy f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül.
Legyen $x \in B_\delta(a)$ tetszőleges pont. Definiáljuk a $z_0, z_1, \ldots, z_{\mathfrak{n}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorokat az alábbi módon.

$$z_0 = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{\mathfrak{n}})$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= (a_1, x_2, x_3 \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
z_2 &= (a_1, a_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_i &= (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
z_\mathfrak{n} &= (a_1, a_2, \ldots, a_\mathfrak{n})
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) - A(a)(x-a) &= f(z_0) - f(z_n) - A(z_0 - z_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - A(z_{i-1} - z_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i)
\end{aligned}$$

adódik. Minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén legyen

$$\gamma_i : [x_i, a_i] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (f \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t) - (A \circ \mathrm{in}_{z_i,i})(t),$$

vagy másképp írva

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= f(t, x_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(t, x_2, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
\gamma_2(t) &= f(a_1, t, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, t, x_3, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_i(t) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) - A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) \\
&\vdots \\
\gamma_\mathfrak{n}(t) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathfrak{n}-1}, t) - A(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathfrak{n}-1}, t).
\end{aligned}$$

teljesül. Ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - a_i) = \gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i).$$

A parciális deriválás definíciójából, a közvetett függvény deriválási szabályából, a lineáris leképezés (12.13 tétel) és az inklúzió deriválási szabályából (12.14 tétel) adódik, hogy minden $w \in [x_i, a_i]$ esetén

$$(\mathrm{D}\gamma_i)(w) = (\partial_i f)(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, w, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}) - (\partial_i f)(a).$$

A γ_i függvényre és az $[x_i, a_i]$ szakaszra alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt, azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, a_i[$, hogy

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\gamma_i')(c_i)| \cdot |x_i - a_i|.$$

Minden $c_i \in [x_i, a_i]$ esetén legyen $w_i = \mathrm{in}_{z_i,i}(c_i)$, azaz

$$w_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_\mathfrak{n}).$$

Ekkor $w_i \in B_\delta(a)$ miatt

$$|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| = |(\partial_i f)(w_i) - (\partial_i f)(a)| \cdot |x_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} \cdot |x_i - a_i|.$$

Összerakva ezeket az eredményeket

$$|f(x) - f(a) - A(a)(x-a)| \leq \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |\gamma_i(x_i) - \gamma_i(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}} |x_i - a_i| \leq \varepsilon \|x - a\|_\infty$$

adódik. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in B_\delta(a): \quad |f(x) - f(a) - A(x-a)| \leq \varepsilon \|x-a\|_\infty .$$

Tehát f differenciálható az Ω halmazon és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}f)(a) = A$.
Legyen $a \in \Omega$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül. Ezekből $x \in B_\delta(a)$ esetén az $(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)$ lineáris leképezés normájára

$$\|(\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x)\| = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} |(\partial_i f)(a) - (\partial_i f)(x)| < \varepsilon$$

adódik, amivel igazoltuk a $\mathrm{D}f$ függvény folytonosságát.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az Ω halmazon. A parciális derivált értelmezése, a közvetett függvény deriválási szabálya és az inklúziófüggvény deriváltja alapján minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ és $a \in \Omega$ esetén

$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = (\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k)) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül. Ezért a minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_k f$ függvény értelmezett az Ω halmazon, továbbá az $\mathrm{in}_{0,k}$ függvény és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonossága miatt a $\partial_k f$ függvény is folytonos.

12.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz.
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor a 12.34 tétel alapján minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ mellett az f_j függvény folytonosan differenciálható. A 12.7 tétel alapján ebből $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ differenciálhatósága következik és a 10.90 tételből pedig $\mathrm{D}f$ folytonossága.
Most tegyük fel, hogy f folytonosan differenciálható az Ω halmazon. Ekkor a projekciófüggvény folytonos differenciálhatósága miatt minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre f_j függvény folytonosan differenciálható, a 12.34 tétel miatt pedig minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\partial_i f_j$ folytonos.

12.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

12.36. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^\mathfrak{n}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x).$$

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^\mathfrak{n}$ és az $\mathbb{R}^\mathfrak{m}$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^\mathfrak{n}$ és az $\mathbb{R}^\mathfrak{m}$ téren tekintsük a $\|\cdot\|_2$ (euklidészi) normát.
Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $g : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^\mathfrak{n}, \mathbb{R}^\mathfrak{m})$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f_n(a) - f_m(a)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $\lfloor a, x\rfloor$ szakaszra alkalmazva a 7.17 véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\|_2 \leq \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)\|\right) \cdot \|x - a\|_2$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \leq \|f_n(a) - f_m(a)\|_2 + \left(\sup_{y\in]a,x[} |(\mathrm{D}(f_n - f_m))(y)|\right) \cdot \|x - a\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.
Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t) - (\mathrm{D}f_n)(t)(x - t)}{\|x - t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t) - g(t)(x - t)}{\|x - t\|_2}, & \text{ha} \quad x \neq t; \\ 0, & \text{ha} \quad x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 11.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$(\mathrm{D}f)(t) = g(t)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 11.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - ((\mathrm{D}f_n)(t) - (\mathrm{D}f_m)(t))u$$

függvényre és az $[t,x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(t)-f_m(t))-((\mathrm{D}f_n)(t)(x-t)-(\mathrm{D}f_m)(t))(x-t)\|_2 \leq \left(\sup_{y\in]t,x[}\|(D(f_n-f_m))(y)-((\mathrm{D}f_n)(t)-(\mathrm{D}f_m)(t))\|\right)\cdot\|t-a\|_2$$

adódik, vagyis ha $N<m,n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}&\|f_n(x)-f_n(t)-(\mathrm{D}f_n)(t)(x-t)-(f_m(x)-f_m(t)-(\mathrm{D}f_m)(t))(x-t))\|_2 \leq\\ &\leq\left(\sup_{y\in]t,x[}(\|(D(f_n-f_m))(y)\|+\|(\mathrm{D}f_n)(t)-(\mathrm{D}f_m)(t)\|)\right)\cdot\|x-t\|_2\leq\\ &\leq\left(\left(\sup_{y\in B_r(a)}\|(D(f_n-f_m))(y)\|\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\|x-t\|_2\leq\\ &\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\|x-t\|_2=\varepsilon\,\|x-t\|_2\,.\end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenség alapján minden $N<n,m$ természetes számra $x\neq t$ esetén

$$\|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)\|\leq\frac{\varepsilon\cdot\|x-t\|_2}{\|x-t\|_2}=\varepsilon,$$

valamint $x=t$ esetén is $\|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)\|_2=0<\varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}\forall x\in B_r(a):\ (N<n,m\ \rightarrow\ \|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)\|_2\leq\varepsilon)$$

teljesül, amiből a 11.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

12.37. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n:\Omega\to\mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a\in\Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x\in\Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x\in\Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a\in\Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)$ határérték.
Definiáljuk az

$$\Omega'=\left\{x\in\Omega|\ \exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x\in\Omega'$. Mivel az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r\in\mathbb{R}$, hogy $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 12.36, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x)\subseteq\Omega'$.
Tegyük fel, hogy $\Omega'\neq\Omega$. Vegyünk egy $x\in\Omega\setminus\Omega'$ elemet. Legyen

$$H=\{t\in[0,1]\,|\ [a,a+t(x-a)]\subseteq\Omega'\}\,,$$

$c=\sup H$ és $p=a+c(x-a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 12.36 tételt, ahol az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c>0$. Az Ω' halmaz nyíltsága

miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat.
A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \dfrac{r}{4\|x-a\|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x-a) \in \Omega'$ elemre

$$\|p-q\| = \|a + c(x-a) - a - t_0(x-a)\| = |c - t_0| \cdot \|x-a\| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 12.36 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.
Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 12.36, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

12.38. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 12.37 tételt adódik az állítás.

12.9. Inverzfüggvény tétel

12.39. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \mathbb{R}^n$. Ha $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő fogalmak függetlenek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ téren választott normától, valamint a bizonyítás során használni szeretnénk a véges növekmények formuláját, ezért az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ teret az euklidészi (kettes) normával látjuk el. (Azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ és hasonlóan az $\mathbb{R}^m$ térben lévő vektorokra.)
Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ olyan pont, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban.
A bizonyítást több lépésben végezzük.
1. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést és legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül. A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli $\mathrm{D}f$ folytonossága miatt létezik olyan $r \in\,]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_r(a)$ esetén

$$\|(\mathrm{D}f)(x) - A\| < \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}.$$

Definiáljuk az $\Omega = B_r(a)$ halmazt. Lépésenként megmutatjuk, hogy erre az Ω halmazra teljesülnek a tételben felsorolt tulajdonságok. Előbb azonban megjegyezzük, hogy a 10.107 tétel miatt minden $x \in \Omega$ pont esetén a $(\mathrm{D}f)(x)$ leképezés invertálható.
2. A bizonyítás folyamán szükségünk lesz az alábbi függvényre. Minden $y \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x + A^{-1}(y - f(x)).$$

Vegyük észre, hogy egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont pontosan akkor fixpontja a φ_y függvénynek, ha $y = f(x)$ teljesül. A φ_y függvénynek pontosan akkor létezik fixpontja, ha $y \in \operatorname{Ran} f$, valamint pontosan akkor van egy darab fixpontja, ha az f függvény csak egyszer veszi fel az y értéket.
Mivel minden $y \in \mathbb{R}^n$ estén

$$\varphi_y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + (A^{-1}y) - A^{-1} \circ f,$$

ezért minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}\varphi_y)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - A^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(x) = A^{-1}(A - (\mathrm{D}f)(x))$$

teljesül, amiből

$$\|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|(A - (\mathrm{D}f)(x))\| < \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2}$$

következik. Vagyis minden $y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $x_1, x_2 \in \Omega$ pont esetén a véges növekmények formuláját felírva az $[x_1, x_2]$ szakaszra és a φ_y függvényre

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| &\le \left(\sup_{x \in]x_1, x_2[} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le \\ &\le \left(\sup_{x \in \Omega} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}\end{aligned}$$

adódik. Tehát φ_y kontrakció és

$$\forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{12.1}$$

teljesül.
3. Most megmutatjuk, hogy az $f|_\Omega$ függvény injektív. Ehhez tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \Omega$ olyan, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $y = f(x_1)$, akkor $\varphi_y(x_1) = x_1$ és $\varphi_y(x_2) = x_2$, amiből a (12.1) egyenlet segítségével

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.
4. Most igazoljuk, hogy minden $X \subseteq \Omega$ nyílt halmaz esetén $f(X)$ nyílt halmaz. Legyen $y_0 \in f(X)$ tetszőleges pont. Ekkor $f|_\Omega$ injektivitása miatt létezik egyetlen olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $f(x_0) = y_0$.

Mivel X nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{2r}(x_0) \subseteq X$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $x \in \overline{B_r(x_0)}$, $y \in B_\rho(y_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x) - x_0\| &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \left\|A^{-1}(y - f(x_0))\right\| \leq \\ &\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \leq \\ &\leq \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho = r$, azaz $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$, akkor minden $x \in \overline{B_r(x_0)}$ esetén

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r.$$

Mostantól legyen $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\varphi_y\left(\overline{B_r(x_0)}\right) \subseteq \overline{B_r(x_0)}.$$

Mivel $\mathbb{R}^n$ teljes és $\overline{B_r(x_0)}$ zárt részhalmaza, ezért a 10.43 tétel alapján a $\overline{B_r(x_0)}$ halmaz is teljes. Ekkor az $M = \overline{B_r(x_0)}$ halmazra és a $\varphi_y|_M$ függvényre alkalmazva a 10.119 Banach-féle fixponttételt, az adódik, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \overline{B_r(x_0)}$ pont, melyre

$$\varphi_y(x) = x$$

teljesül, ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = y$. Tehát azt kaptuk, hogy minden $y \in B_\rho(y_0)$ ponthoz létezik olyan $x \in X$, melyre $f(x) = y$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $B_\rho(y_0) \subseteq f(X)$. Ezzel igazoltuk, hogy $f(X)$ nyílt halmaz.

5. Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük a $g = f|_\Omega$ és az $\Omega' = f(\Omega)$ jelöléseket. Most megmutatjuk, hogy g homeomorfizmus Ω és Ω' között. Mivel f differenciálható az Ω halmazon, ezért ott folytonos is, vagyis g folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése alapján a g^{-1} függvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{\left(g^{-1}\right)}(X) = X' \cap \operatorname{Dom} g^{-1}$ teljesül. Mivel g injektív, ezért azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz létezik olyan $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre

$$g(X) = X' \cap \Omega'.$$

Ha $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor $g(X) = g(\Omega \cap X)$ és mivel $\Omega \cap X$ nyílt halmaz, ezért a 4. pont alapján $g(\Omega \cap X)$ nyílt halmaz. A nyilvánvaló $g(\Omega \cap X) \subseteq \Omega'$ tartalmazás miatt

$$g(X) = g(\Omega \cap X) \cap \Omega',$$

vagyis az $X' = g(\Omega \cap X)$ nyílt halmazra teljesül a kívánt tartalmazás.

6. Most igazoljuk, hogy g^{-1} differenciálható és minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens, hogy minden minden $y \in \Omega'$ pontban g^{-1} differenciálható és

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(y) = ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y)))^{-1}$$

teljesül. Ennek igazolásához legyen $y_0 \in \Omega'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Azt kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}&\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^n : \\ &\qquad \left(\|y - y_0\| < \delta \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| \leq \varepsilon \|y - y_0\|\right)\end{aligned}$$

teljesül. Mivel Ω' nyílt halmaz a 4. pont alapján, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, melyre $B_{r_1}(y_0) \subseteq \Omega'$. Legyen $x_0 = g^{-1}(y_0)$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezésen végezzük el a következő átalakításokat, ahol $y \in B_{r_1}(y_0)$ tetszőleges és $x = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}
&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\
&\quad = \left\|x - x_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\left(((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\right)\right\| \leq \\
&\quad \leq \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| = \\
&\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\|
\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ egy paraméter, melynek majd később rögzítjük az értékét. Mivel $x_0 \in \Omega$, Ω nyílt halmaz és a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért létezik olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{r_2}(x_0) \subseteq \Omega$ és

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad (\|x - x_0\| < r_2 \quad \rightarrow \quad \|g(x) - g(x_0) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| \leq \varepsilon' \|x - x_0\|) \,.$$

Mivel a g^{-1} függvény folytonos az y_0 pontban, ezért létezik olyan $r_3 \in \,]0, r_1[$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \qquad \left(\|y - y_0\| < r_3 \quad \rightarrow \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| < r_2\right) .$$

Ezekből

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \leq \varepsilon' \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|$$

következik. Tetszőleges $y \in B_{r_3}(y_0)$ pont esetén

$$\begin{aligned}
\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| &= \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}(y - y_0)\right\| \leq \\
&\leq \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\right\| + \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| \leq \\
&\leq \left\|\varphi_{y_0}(g^{-1}(y)) - \varphi_{y_0}(g^{-1}(y_0))\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \leq \\
&\leq \frac{\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|
\end{aligned}$$

adódik, ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk a (12.1) becslést és ennek az egyenlőtlenségnek az átrendezéséből

$$\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| \leq 2\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|$$

következik. Tehát az eddigiek alapján

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \leq 2\varepsilon' \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \,.$$

Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\|}$, akkor minden $y \in B_{r_3}(y_0)$ pontra teljesül a bizonyítandó

$$\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \leq \varepsilon \|y - y_0\|$$

egyenlőtlenség. Tehát a fent definiált ε' paraméterhez kell r_2 és r_3 számokat választani, és r_3 lesz a keresett δ.

7. Végül igazoljuk, hogy a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban. Már megmutattuk, hogy

$$\mathrm{D}(g^{-1}) = i \circ (\mathrm{D}g) \circ g^{-1},$$

ahol i jelöli az invertálást. A g^{-1} függvény folytonosságát igazoltuk, a $(\mathrm{D}g)$ függvény folytonosságát feltettük az a pontban és a 10.107 tétel alapján tudjuk, hogy i folytonos. Ezek alapján a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény is folytonos az $f(a)$ pontban.

12.10. Implicitfüggvény tétel

12.40. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ differenciálható függvény, melyre $\varphi(a_1) = a_2$, minden $x \in \Omega_1$ esetén*

$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$, $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(Df)$ olyan pont, melyben $\mathrm{D}f$ folytonos és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$.
A $\operatorname{Dom} f$ halmazon értelmezzük az

$$\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, f(x_1, x_2))$$

függvényt. Ekkor ha $(b_1, b_2) \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, akkor

$$((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \qquad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (\partial_1 f)(b_1, b_2) & (\partial_2 f)(b_1, b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

teljesül. Ebből adódik, hogy $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}\eta)$, továbbá a $\mathrm{D}f$ függvény (a_1, a_2) pontbeli folytonossága miatt a $\mathrm{D}\eta$ függvény is folytonos az (a_1, a_2) pontban. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) = \det(\partial_2 f)(b_1, b_2),$$

vagyis $\det((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) \neq 0$, ezért alkalmazható az η függvényre az inverzfüggvény tétel. Az η függvényre és az (a_1, a_2) pontra alkalmazva a 12.39 inverzfüggvény tételt az adódik, hogy létezik olyan Ω_1', Ω_2' nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre

1. $\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'}$ injektív;
2. az $\Omega = \eta\left(\Omega_1' \times \Omega_2'\right) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ halmaz nyílt;
3. az $(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény differenciálható;
4. minden $x \in \Omega_1' \times \Omega_2'$ pontra

$$(\mathrm{D}((\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}))(\eta(x)) = ((\mathrm{D}\eta)(x))^{-1}$$

   teljesül;
5. a $\mathrm{D}(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény folytonos az $\eta(a_1, a_2)$ pontban.

Vezessük be a $\rho = (\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ jelölést, tehát $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény, melynek komponensei legyenek

$$\begin{aligned} \rho_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad & (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1(\rho(x, y)) \\ \rho_2 : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad & (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, y)). \end{aligned}$$

Ha $(x_1, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, akkor

$$(x_1, y) = \eta(\rho(x_1, y)) = \eta(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y)) = (\rho_1(x_1, y), f(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y))),$$

vagyis minden $(x_1, y) \in \Omega$ pont esetén

$$x_1 = \rho_1(x_1, y) \qquad \text{és} \qquad y = f(x_1, \rho_2(x_1, y)). \tag{12.2}$$

Legyen $c = f(a_1, a_2)$. Ekkor $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} f$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} \eta$ is teljesül és $\eta(a_1, a_2) = (a_1, c)$ miatt $(a_1, c) \in \Omega$, mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre

$\Omega_1 \times \{c\} \subseteq \Omega$.
Tekintsük a

$$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2 \qquad x \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x,c))$$

függvényt, ahol $\Omega_2 = \Omega_2'$. Mivel ρ differenciálható és pr_2 lineáris leképezés, ezért φ is differenciálható függvény. A (12.2) egyenlet alapján minden $x \in \Omega_1$ pontra

$$c = f(x, \rho_2(x,c)) = f(x, \varphi(x))$$

teljesül, melyből a közvetett függvény deriválási szabálya alapján az adódik, hogy minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$0 = (\partial_1 f)(x, \varphi(x)) + (\partial_2 f)(x, \varphi(x)) \circ (D\varphi)(x)$$

teljesül, aminek átrendezéséből

$$(D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

adódik.
Az implicitfüggvény egyértelműségének igazolásához tegyük fel, hogy $\varphi_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ olyan függvény, hogy minden $x \in \Omega_1$ pontra $c = f(x, \varphi_2(x))$ teljesül. Ekkor minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$\eta(x, \varphi(x)) = (x, f(x, \varphi(x))) = (x, c) = (x, f(x, \varphi_2(x))) = \eta(x, \varphi_2(x))$$

teljesül, amiből η injektivitása miatt $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ következik.

12.11. Többszörös deriváltak

12.41. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m))$, ennek a kompozícióját a

$$\begin{aligned}\rho_{k-1} : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^n)^{k-1}, \mathbb{R}^m)) &\to \mathrm{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m)) \\ A &\mapsto \Big((x_1, \dots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_n)\Big)\end{aligned}$$

  izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(k)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f) \to \mathrm{Lin}^k((\mathbb{R}^n)^k, \mathbb{R}^m) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)} f))(a)$$

  függvényt.
- Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)} f$.
- Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

12.42. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. Ekkor minden $a \in \Omega$ és $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)}.$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. A $k = 1$ esetben az állítás a 12.19 tételből adódik. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^+$, $p < k$ számra teljesül az állítás és legyen $g = \mathrm{D}^{(p)} f$. Megmutatjuk, hogy ekkor a $p + 1$ számra is igaz az állítás. Ekkor

$$g : \Omega \to \mathrm{Lin}^p\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^p, \mathbb{R}\right)$$

és minden $a \in \Omega$, valamint $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(g(a))(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(p)}_{i_p}.$$

A

$$\eta : \mathrm{Lin}^p\left((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^p, \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^p)} \qquad A \mapsto \left(A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})\right)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

lineáris izomorfizmus segítségével elkészíthetjük a

$$\eta \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^{(\mathfrak{n}^p)} \qquad a \mapsto \left((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

függvényt, erre alkalmazva a 12.18 tételt azt kapjuk, hogy minden $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}_{i_0})$$

teljesül, ebből pedig

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a))(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \left(x^{(0)}_{i_0} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

adódik. Mivel

$$((\mathrm{D}(\eta \circ g))(a)) = (\mathrm{D}\eta)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a) = \eta \circ (\mathrm{D}g)(a),$$

ezért

$$\eta \circ (\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \left(x^{(0)}_{i_0} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\right)_{i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$(\mathrm{D}g)(a)(x^{(0)})(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_0=1}^{\mathfrak{n}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} \left(x^{(0)}_{i_0} (\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)\right) x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(p)}_{i_p}.$$

Ebből a $\mathrm{D}^{(p+1)} f = \rho_p \circ \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{(p)} f\right)$ definíció figyelembe vételével adódik, hogy minden $a \in \Omega$ és $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén

$$((\mathrm{D}^{(p+1)} f)(a))(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_p=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_0} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_p} f)(a)) \cdot x^{(0)}_{i_0} x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(p)}_{i_p}.$$

12.43. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ teljesül az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren tekintsük a végtelen normát. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_{\mathfrak{n}}) \in \Omega$ és ehhez $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \Omega$ teljesül. Továbbá legyen $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, $i < j$ tetszőleges index. Minden $c \in]0, r[$ esetén definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_i + ce_j) - f(a + xe_i)$$

$$\beta : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(a + xe_j + ce_i) - f(a + xe_j)$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az α függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_1 \in]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = ((\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 e_i))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + te_j)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_2 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + ce_j) - (\partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c,$$

tehát

$$\alpha(c) - \alpha(0) = (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j)c^2.$$

A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazva az β függvényre az $[0, c]$ szakaszon az adódik, hogy létezik olyen $\vartheta_3 \in]0, 1[$ paraméter, hogy

$$\beta(c) - \beta(0) = ((\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j))\, c.$$

A

$$B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + te_i)$$

függvényre alkalmazva a Lagrange-féle középérték tételt a $[0, c]$ szakaszon, azt kapjuk, hogy létezik olyan $\vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + ce_i) - (\partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_3 ce_j + \vartheta_4 ce_i)c,$$

tehát

$$\beta(c) - \beta(0) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j)c^2.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\alpha(c) - \alpha(0) = \beta(c) - \beta(0)$$

azt kapjuk, hogy minden $c \in]0, r[$ esetén létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $(\partial_j \partial_i f)$ és a $(\partial_i \partial_j f)$ függvény folytonos az a pontban ezért létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén

$$|(\partial_j \partial_i f)(x) - (\partial_j \partial_i f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |(\partial_i \partial_j f)(x) - (\partial_i \partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezek alapján, ha $c \in]0, \delta[$ tetszőleges paraméter, akkor létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \in]0, 1[$, hogy

$$(\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) = (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j),$$

továbbá

$$\|(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) - a\| < \delta, \|(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j) - a\| < \delta$$

miatt

$$\begin{aligned} &|(\partial_j \partial_i f)(a) - (\partial_i \partial_j f)(a)| = \\ &\quad = |(\partial_j \partial_i f)(a) - (\partial_j \partial_i f)(a + \vartheta_1 ce_i + \vartheta_2 ce_j) + (\partial_i \partial_j f)(a + \vartheta_4 ce_i + \vartheta_3 ce_j) - (\partial_i \partial_j f)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Amiből az $\varepsilon \to 0$ határértékkel a bizonyítandó

$$(\partial_j \partial_i f)(a) = (\partial_i \partial_j f)(a)$$

egyenlőséget kapjuk.

12.44. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor f k-szor folytonosan differenciálható és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ szimmetrikus k-lineáris leképezés.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon.
A 12.42 tétel értelmében minden $a \in \Omega$ pontban a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés szimmetrikussága azon múlik, hogy a $((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(a))_{i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}}$ parciális deriválatak sorrendje invariáns a permutációkra.
Legyen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $p \in \{1, \ldots, k-1\}$. Ekkor a

$$\partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f : \Omega \to \mathbb{R}$$

függvényre teljesülnek a 12.43 Schwarz-tétel feltételei, ezért

$$\partial_{i_{p+1}} \partial_{i_p} \partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f = \partial_{i_p} \partial_{i_{p+1}} \partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f$$

teljesül, amiből pedig

$$\partial_{i_k} \ldots \partial_{i_{p+2}} \partial_{i_{p+1}} \partial_{i_p} \partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f = \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_{p+1}} \partial_{i_p} \partial_{i_{p+1}} \partial_{i_{p-1}} \ldots \partial_{i_1} f$$

következik. Tehát a parciális deriváltak invariánsak az egymás melletti elemek cseréjére. Mivel minden permutáció felírható véges sok egymás utáni elem cseréjének kompozíciójaként, ezért a parciális deriváltak invariánsak a permutációkra.

12.12. Taylor-sorfejtés

12.45. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(k)} f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} ((\mathrm{D}^{(l)} f)(a))(x-a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f)(a))\, (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

12.46. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in \,]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} ((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

Bizonyítás. $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon.
Tekintsük a

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto a + t(b-a)$$

függvényt és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Mivel a γ függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, U) \qquad t \mapsto (b-a)$$

teljesül, vagyis $\mathrm{D}\gamma$ konstans függvény, ezért minden $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ esetén $\mathrm{D}^{(p)}\gamma = 0$, vagyis γ végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon. Ezért az $\tilde{f}$ függvény k-szer folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ szakaszon, illetve $(k+1)$-szer differenciálható a $]0, 1[$ szakaszon. A 7.30 Taylor sorfejtést alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre a $[0, 1]$ szakaszra a $p = 1$ választással az adódik, hogy létezik olyan $\tilde{\xi} \in]0, 1[$ paraméter, melyre

$$\tilde{f}(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(0) \cdot (1-0)^i + \frac{1}{(k+1)!} \tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}) \cdot (1-0)^{k+1},$$

vagyis

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} \tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{\xi}). \tag{12.3}$$

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))\gamma'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(a + \tilde{z}(b-a))(b-a) = (\mathrm{D}f)(z)(b-a),$$

ahol $z = \gamma(\tilde{z})$. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{N}^+$ számra minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}^{(p)}(\tilde{z}) = ((\mathrm{D}^{(p)}f)(z))(b-a)^{[p]}$$

teljesül. Ha az f függvény $(p+1)$-szer differenciálható a $z_0 \in [a, b]$ pontban, akkor a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to z_0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(x) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0) - (\mathrm{D}^{(p+1)}f)(z_0)(x - z_0)}{\|x - z_0\|} = 0,$$

ezért ha $x = z_0 + h(b-a)$, ahol $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0 + h(b-a)) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(z_0) - h(\mathrm{D}^{(p+1)}f)(z_0)(b-a)}{|h|} = 0.$$

A $\tilde{z}_0 = \gamma^{-1}(z_0)$ jelöléssel a fenti egyenletből

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(p)}f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h)) - (\mathrm{D}^{(p)}f)(\gamma(\tilde{z}_0)) - h(\mathrm{D}^{(p+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)}{h} = 0$$

következik. Ezért

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)}f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h))(b-a)^{[k]} - (\mathrm{D}^{(k)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k]} - h(\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}}{h} = 0,$$

vagyis

$$\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{z}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0 + h) - \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0)}{h} = (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}.$$

Ezen eredményt beírva a (12.3) képletbe a $\xi = \gamma^{-1}(\tilde{\xi})$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\mathrm{D}^{(k)}f)(a)(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{D}^{(k+1)}f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}$$

formula adódik.

12.47. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon és $(k+1)$-szer differenciálható az $]a,b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left|f(b) - T^f_{k,a}(b)\right| \le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Bizonyítás. A 12.46 tétel közvetlen következménye.

12.48. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban.
Ha $x \in B_r(a)$, akkor a 12.46 tétel alapján létezik olyan $\xi \in [a,x]$, melyre

$$f(x) - T^f_{k-1,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi)(x-a)^{[k]},$$

amiből

$$f(x) - T^f_{k,a}(x) = \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi)(x-a)^{[k]} - \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)(x-a)^{[k]}$$

következik. Tehát

$$\left|f(x) - T^f_{k,a}(x)\right| \le \frac{1}{k!}\left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(\xi) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| \cdot \|x-a\|^k.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A k-adik derivált a pontbeli folytonossága alapján létezik olyan $\delta \in]0,r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a)$ esetén

$$\left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\frac{\left|f(x) - T^f_{k,a}(x)\right|}{\|x-a\|^k} \le \frac{1}{k!} \sup_{z\in B_\delta(a)} \left\|(\mathrm{D}^{(k)} f)(z) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(a)\right\| \le \varepsilon.$$

Ez pedig éppen bizonyítandó határértéket jelenti.

12.13. Lokális szélsőérték jellemzése

12.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) < f(x)$.

– Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
– Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

12.50. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ és minden $x \in B_r(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $Av \neq 0$ teljesül, és legyen $q = Av$.
A 12.12 tétel alapján ekkor

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = q.$$

Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|t| \cdot \|v\| < r$, akkor az $a + tv \in B_r(a)$ tartalmazás miatt

$$f(a + tv) - f(a) \leq 0.$$

Tehát $t \in \left]0, \frac{r}{\|v\|}\right[$ esetén

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \leq 0,$$

illetve $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, 0\right[$ esetén

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Vagyis az

$$0 \leq \lim_{t \to 0-} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \leq 0$$

egyenlőtlenségekből a $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = q = 0$ ellentmondást kaptuk. Tehát nem létezik olyan v vektor, amire $Av \neq 0$ teljesülne, tehát $A = 0$.
Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek ott lokális maximuma van, vagyis az előző gondolatmenet alapján $(\mathrm{D}(-f))(a) = 0$, amiből $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ adódik.

12.51. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha k páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a) \neq 0$. Vezessük be a $Q = (\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ jelölést és az

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x-a\|^k}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvényt. Az infinitezimális Taylor-formula alapján $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, vagyis a φ függvény folytonos az a pontban, az a ponton kívül pedig nyilvánvalóan folytonos. A deriváltakra vonatkozó feltételezés alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \tag{12.4}$$

teljesül.

1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $\delta \in \,]0, r[$ olyan szám, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \le f(a)$ teljesül. Ekkor a (12.4) egyenlet alapján minden $x \in B_\delta(a)$ pontra

$$\varphi(x)\,\|x-a\|^k + \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \le 0.$$

Legyen $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Ekkor minden $t \in \left[0, \dfrac{\delta}{\|v\|}\right[$ esetén az $x = a + tv$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, vagyis az előző egyenlet alapján

$$\varphi(a+tv)\,\|v\|^k t^k + \frac{t^k}{k!}Q(v)^{[k]} \le 0,$$

azaz

$$k!\varphi(a+tv)\,\|v\|^k + Q(v)^{[k]} \le 0.$$

Végrehajtva a $t \to 0$ határátmenetet

$$Q(v)^{[k]} \le 0$$

adódik, vagyis Q negatív. A Young-tétel alapján Q szimmetrikus, ezért a $-v$ vektorra felírva a fenti egyenlőtlenséget

$$0 \ge Q(-v)^{[k]} = (-1)^k Q(v)^{[k]}$$

adódik, amiből pedig következik, hogy k páros.

2. Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek lokális maximuma van ott és az 1. pontban igazolt eredmény alapján ekkor Q pozitív leképezés lesz.

3. Tegyük fel, hogy a Q leképezés pozitív definit. A 10.116 tétel alapján ekkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $Q(v)^{[k]} \ge K\,\|v\|^k$ teljesül. Ekkor a (12.4) egyenlet alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) - \varphi(x)\,\|x-a\|^k = \frac{1}{k!}Q(x-a)^{[k]} \ge \frac{K}{k!}\,\|x-a\|^k,$$

vagyis

$$f(x) - f(a) \ge \|x-a\|^k \left(\varphi(x) + \frac{K}{k!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta \in \,]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{K}{2k!}$. Ekkor minden ilyen x vektorra

$$f(x) - f(a) \ge \|x-a\|^k \left(\varphi(x) + \frac{K}{k!}\right) > \|x-a\|^k \left(-\frac{K}{2k!} + \frac{K}{k!}\right) \ge 0$$

teljesül, vagyis az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.

4. Ha $(\mathrm{D}^k f)(a)$ negatív definit, akkor $(\mathrm{D}^k(-f))(a)$ pozitív definit és a 3. pontban igazolt eredmény alapján ekkor a $-f$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, tehát az f függvénynek

szigorú lokális maximuma van ott.
5. Tegyük fel, hogy a Q leképezés indefinit. Legyen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, melyre $Q(v_1)^{[k]} > 0$ és $Q(v_2)^{[k]} < 0$. Ha $u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ $(i = 1, 2)$, akkor a multilinearitás miatt $Q(u_1)^{[k]} > 0$ és $Q(u_2)^{[k]} < 0$ teljesül. Legyen $\alpha_1 = Q(u_1)^{[k]}$ és $\alpha_2 = -Q(u_2)^{[k]}$. Ekkor minden $t \in [0, r[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$, akkor $x_1, x_2 \in B_r(a)$, vagyis a (12.4) egyenlet alapján

$$f(x_1) - f(a) = t^k \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{k!}\right)$$
$$f(x_2) - f(a) = t^k \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{k!}\right).$$

Mivel $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1, \delta_2 \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_1}{2k!}$ és minden $x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_2}{2k!}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor minden $t \in]0, \delta[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$

$$f(x_1) - f(a) = t^k \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{k!}\right) > \frac{t^k \alpha_1}{2k!} > 0$$
$$f(x_2) - f(a) = t^k \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{k!}\right) < -\frac{t^k \alpha_2}{2k!} < 0.$$

Tehát az a pont bármely kis sugarú környezetében található olyan x_1 és x_2 vektor melyre $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$ teljesül, ezért az f függvénynek nem lehet lokális szélsőértéke az a pontban.
6. Az 1. és a 2. pontból adódik.

12.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy *a nyeregpontja az f függvénynek.*

12.14. Feltételes szélsőérték

12.53. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H \cap \operatorname{Dom} f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Definiáljuk a

$$G : \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Dom} g_i \to \mathbb{R}^k \qquad x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_k(x))$$

függvényt és a $H = \overset{-1}{G}(0) \cap \operatorname{Dom} f$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független és az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban. Ekkor a

$$(\mathrm{D}G)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(a) & (\partial_2 g_1)(a) & \ldots & (\partial_n g_1)(a) \\ (\partial_1 g_2)(a) & (\partial_2 g_2)(a) & \ldots & (\partial_n g_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 g_k)(a) & (\partial_2 g_k)(a) & \ldots & (\partial_n g_k)(a) \end{pmatrix}$$

mátrixnak k lineárisan független sora van, vagyis a sorrangja k. Mivel a mátrix oszloprangja megegyezik a sorranggal, azért a fenti mátrixnak k darab lineárisan független oszlopa van. Az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ téren használt koordináták átszámozásával elérhető, hogy a $(\mathrm{D}G)(a)$ mátrix utolsó k oszlopa legyen lineárisan független. Legyen $d = \mathfrak{n} - k$ és tekintsük az

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k \qquad (x_1, x_2) \mapsto G(x_1, x_2)$$

függvényt és az $a = (a_1, a_2)$ pontot. Ebben az esetben alkalmazható az implicitfüggvény tétel, tehát létezik az a_1, a_2 pontnak olyan nyílt Ω_1, Ω_2 környezete, hogy $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom} G \cap \operatorname{Dom} f$, valamint létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ függvény, hogy minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$\mathcal{G}(x_1, \varphi(x_1)) = \mathcal{G}(a_1, a_2) = 0.$$

Ez alapján minden $x_1 \in \Omega_1$ esetén

$$(\partial_1 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) + (\partial_2 \mathcal{G})(x_1, \varphi(x_1)) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(x_1) = 0. \tag{12.5}$$

Továbbá ha $x_1 \in \Omega_1$ és $x_2 \in \Omega_2$ olyan pont, hogy $G(x_1, x_2) = 0$, akkor $x_2 = \varphi(x_1)$. Tekintsük az

$$\mathfrak{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$$

függvényt. Hogy az $f|_H$ függvénynek feltételes szélsőértéke van az (a_1, a_2) pontban, pontosan azt jelenti, hogy az $\mathfrak{f}$ függvénynek szélsőértéke van az a_1 pontban. Ez utóbbiból

$$(\mathrm{D}\mathfrak{f})(a_1) = (\partial_1 f)(a) + (\partial_2 f)(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a_1) = 0 \tag{12.6}$$

következik. A 12.5 egyenletet alkalmazva az a_1 pontra

$$(\mathrm{D}\varphi)(a_1) = ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

adódik ami a 12.6 egyenlet felhasználásával az alábbi egyenletre vezet.

$$(\partial_1 f)(a) = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_1 \mathcal{G})(a)$$

Bevezetve a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_k \end{pmatrix} = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1}$$

jelölést $(\partial_1 f)(a) = \Lambda (\partial_1 \mathcal{G})(a)$ adódik. Továbbá

$$(\partial_2 f)(a) = (\partial_2 f)(a) ((\partial_2 \mathcal{G})(a))^{-1} (\partial_2 \mathcal{G})(a) = \Lambda (\partial_2 \mathcal{G})(a)$$

miatt

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(\partial_1 \mathcal{G})(a) & \Lambda(\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} (\partial_1 \mathcal{G})(a) & (\partial_2 \mathcal{G})(a) \end{pmatrix} = \Lambda (\mathrm{D}\mathcal{G})(a).$$

Tehát tetszőleges $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ index esetén

$$((\mathrm{D}f)(a))_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, ((\mathrm{D}g_j)(a))_i$$

teljesül.

13. Metrikus terek

13.1. Metrikus terek topológiája

13.1. Definíció. Az M halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x, y \in M : \; d(x, y) = 0 \; \leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : \; d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : \; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d metrika az M halmazon.

13.2. Tétel. *Tetszőleges M nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq y, \\ 0 & ha \quad x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

Bizonyítás. A metrika definíciójából rögtön adódik az állítás.

13.3. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M | \; d(x, y) < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

13.4. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in \,]0, r - d(x, y)[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in \,]0, r - d(x, y)[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $d(y, z) < \rho$, amiből

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho < r$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

13.5. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

– *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
– *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
– *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

13.6. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük az (M, d) metrikus tér $A_1, \ldots, A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1,\ldots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen $R_i = r_i + d(x_i, x_1)$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

13.7. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - d(x,y)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $d(z,y) < R = r - d(x,y)$, vagyis $d(x,y) + d(y,z) < r$, amiből pedig $d(x,z) < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

13.8. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i = 1,\dots,n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1,\dots,n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

13.9. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i = \bigcap_{i=1}^{n} (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.
3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (M \setminus Z_i)$$

De Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

13.10. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Az (M,d) metrikus térben legyen $Z \subseteq M$ zárt halmaz és $U \subseteq M$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

13.11. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

13.12. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

13.13. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in M | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M | \ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

13.14. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in M \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq M \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - d(y, z) > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

13.15. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

13.16. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq M$ zárt halmaz és legyen $x \in M$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq M$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

13.17. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = M \setminus \overline{M \setminus X},$$
$$\overline{X} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X).$$

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{M \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{M \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X) = M \setminus \Big(M \setminus \overline{M \setminus (M \setminus X)}\Big) = \overline{M \setminus (M \setminus X)} = \overline{X}.$$

13.18. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = M$.

13.2. Metrikus alterek

13.19. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A\times A})$ is metrikus tér.*

Bizonyítás. A metrika tulajdonságai öröklődnek az M halmazról az A részhalmazára.

13.20. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A\times A})$ párt az (M, d) *metrikus tér alterének* nevezzük.

13.21. Tétel. *(Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A\times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*
1. *A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.*
2. *A B halmaz pontosan akkor zárt az (A, d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A\times A}$ és legyen $B \subseteq A$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$B_r^d(x) = \{y \in M|\ d(x, y) < r\}$$

$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A |\ d(x,y) < r\}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
1. Tegyük fel, hogy B nyílt az (A,d) térben. Ekkor minden $x \in B$ esetén létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r(x)}^{d'}(x) \subseteq B$ teljesül. Legyen

$$U = \bigcup_{x \in B} B_{r(x)}^d(x).$$

Az U halmaz nyílt az (M,d) térben, hiszen nyílt halmazok uniója. Megmutatjuk, hogy $B = A \cap U$ teljesül. Az U definíciója és $B \subseteq A$ alapján a $B \subseteq A \cap U$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $z \in A \cap U$. Ekkor $z \in A$ és $z \in \bigcup_{x \in B} B_{r(x)}^d(x)$. Vagyis létezik olyan $y \in B$, melyre $z \in B_{r(y)}^d(y)$ teljesül. Mivel $z \in A$, ezért

$$z \in B_{r(y)}^d(y) \cap A = B_{r(y)}^{d'}(y) \subseteq B.$$

Tehát $A \cap U \subseteq B$ is teljesül.
Most tegyük fel, hogy létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül és legyen $x \in B$ tetszőleges. Ha $x \in U$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^d(x) \subseteq U$ teljesül. Ekkor

$$B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A \subseteq U \cap A = B$$

teljesül, vagyis x belső pontja a B halmaznak az (A, d') térben.
2. Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{aligned}
&B \text{ zárt az } (A,d') \text{ térben } \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ A \setminus B \text{ nyílt az } (A,d') \text{ térben } \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } A \setminus B = (A \setminus B) \cap U \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \setminus ((A \setminus B) \cap U) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \cap (M \setminus U) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \exists Z \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } B = A \cap Z
\end{aligned}$$

13.22. Tétel. *(Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M,d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A,d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra*

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M,d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A,d') metrikus térben. Továbbá minden $x \in A$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$B_r^d(x) = \{y \in M |\ d(x,y) < r\}$$
$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A |\ d(x,y) < r\}.$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
Ha $x \in \tilde{B}$, akkor $x \in A$, valamint minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{d'}(x) \cap B \neq \emptyset$, amiből $B_r^{d'}(x) \subseteq B_r^d(x)$ miatt $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$ következik, vagyis $x \in \overline{B}$. Vagyis igazoltuk a $\tilde{B} \subseteq \overline{B} \cap A$ tartalmazást.
Fordítva, legyen $x \in \overline{B} \cap A$. Ekkor $x \in A$ és minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$. Ha $x \notin \tilde{B}$ teljesülne, akkor létezne olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{d'}(x) \cap B = \emptyset$ teljesülne. Ekkor

$$\emptyset = B_R^{d'}(x) \cap B \subseteq B_R^d(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Vagyis létezne $z \in B_R^d(x) \cap B$, $z \notin B_R^{d'}(x) \cap B$ elem. Erre az elemre $z \in B \subseteq A$, $d(x,z) = d'(x,z) < R$ teljesülne, amiből a $z \in B_R^{d'}(x) \cap B$ ellentmondás adódna. Tehát $x \in \tilde{B}$, amivel igazoltuk a $\overline{B} \cap A \subseteq \tilde{B}$ tartalmazást.

13.3. Ekvivalens metrikák

13.23. Definíció. Legyen d_1 és d_2 metrika az M halmazon. Azt mondjuk, hogy *a d_1 és d_2 metrikák ekvivalensek*, ha minden d_1 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_2 metrika szerint is, valamint minden d_2 metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a d_1 metrika szerint is.

13.24. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.*

1. A

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_p(x, y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \triangleq \max\{|x_k - y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

leképezés metrika.

2. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A d_p és a d_∞ függvények nyilván szimmetrikusak, és minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$d_p(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y$$
$$d_\infty(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y.$$

Legyen $x, y, z \in \mathbb{K}^n$. Ekkor a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$d_p(x, z) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k + y_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x, y) + d_p(y, z),$$

valamint

$$\begin{aligned} d_\infty(x, z) &= \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} \le \\ &\le \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} \le \\ &\le \max\{|x_k - y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} + \max\{|y_k - z_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} = \\ &= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy bármely $p \in [1, \infty[$ esetén a d_p és a d_∞ metrikák ekvivalensek.
Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_∞ metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$. Ha $z \in B_r^{d_p}(x)$, akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ indexre

$$|z_k - x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < r$$

teljesül, vagyis $d_\infty(z, x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_\infty}(x)$ következik. Tehát a

$$B_r^{d_p}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_p metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_p metrika szerint is nyílt.
Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a d_p metrika szerint és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_p}(x) \subseteq U$. Legyen $R = \dfrac{r}{\sqrt[p]{n}}$ és $z \in B_R^{d_\infty}(x)$. Ekkor

$$d_p(x, z) = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = r$$

teljesül, vagyis $d_p(z,x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_p}(x)$ következik. Tehát a

$$B_R^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_p}(x) \subseteq U$$

tartalmazás miatt az x pont belső pontja az U halmaznak a d_∞ metrika szerint. Ezért az U halmaz a d_∞ metrika szerint is nyílt.

13.4. Sorozatok metrikus terekben

13.25. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

13.26. Tétel. *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozatnak legyen $x, y \in M$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \dfrac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \dfrac{d(x,y)}{2}$. Amiből az

$$d(x,y) \leq d(x,a_n) + d(a_n,y) < d(x,y)$$

ellentmondás adódik.

13.27. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M,d) metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

13.28. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to M$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

13.29. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

13.30. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

13.31. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.*

1. *Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra* $\lim a \in A$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.
1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.39 kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq M$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $M \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (M \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

13.32. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens a $(\mathbb{K}^n, d_p)$ térben, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_p(a_n, x) < \varepsilon$. Ekkor $|\mathrm{pr}_i(a_n) - \mathrm{pr}_i(x)| < \varepsilon$, vagyis $\lim(\mathrm{pr}_i \circ a) = \mathrm{pr}_i(\lim a)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (\lim(\mathrm{pr}_1 \circ a), \dots, \lim(\mathrm{pr}_n \circ a)) \in \mathbb{K}^n$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i| < \dfrac{\varepsilon}{n}$.
Legyen $N = \max\{N_i |\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra a $p \neq \infty$ esetben

$$d_p(a_n, x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i|^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^p} \leq \varepsilon \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^p}} \leq n,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$d_\infty(a_n, x) = \max\{|\mathrm{pr}_i(a_n) - x_i|\ |\ i \in \{1, \dots, n\}\} < \frac{\varepsilon}{n} \leq n$$

teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

13.5. Cauchy-sorozatok

13.33. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér. Az $a:\mathbb{N}\to M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}\ \big((N<n\ \wedge N<m)\ \rightarrow\ d(a_n,a_m)<\varepsilon\big).$$

13.34. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $a:\mathbb{N}\to M$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n,m\in\mathbb{N}$, $N<n,m$ számra $d(a_n,a_m)<1$ teljesül, vagyis minden $N<n$ természetes szám esetén $a_n\in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n\mid n>N\}$ halmaz korátos. Minden $0\le n\le N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

13.35. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a:\mathbb{N}\to M$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A\in M$ és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$. Ekkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d(a_n,A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N<n,m$ természetes szám esetén

$$d(a_n,a_m)\le d(a_n,A)+d(a_m,A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

13.36. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $a:\mathbb{N}\to M$ Cauchy-sorozat, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a\circ\sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A=\lim a\circ\sigma$. Ha $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+}$, akkor létezik olyan $N_1\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m\in\mathbb{N}$, $N_1<n,m$ esetén $d(a_n,a_m)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N_2<n$ esetén $d(a_{\sigma(n)},A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha $N=\max\{N_1,N_2\}$ és $n\in\mathbb{N}$, $N<n$, akkor

$$d(a_n,A)\le d(a_n,a_{\sigma(n)})+d(a_{\sigma(n)},A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n)\ge n$.

13.37. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a:\mathbb{N}\to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy az (M,d) metrikus tér *teljes*, ha M teljes halmaz.

13.38. Tétel. *Legyen (M,d) teljes metrikus tér és $X\subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X,d|_{X\times X})$ metrikus altér is teljes.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) teljes metrikus tér, $X\subseteq M$ zárt halmaz, és legyen $a:\mathbb{N}\to X$ Cauchy-sorozat. Mivel M teljes, ezért létezik $\lim a$ és mivel X zárt, ezért $\lim a\in X$. Vagyis minden $a:\mathbb{N}\to X$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke eleme az X halmaznak.

13.6. Kompakt halmazok metrikus terekben

13.39. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér.

- Az $X\subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ esetén létezik olyan véges $I'\subseteq I$ halmaz, melyre $X\subseteq\bigcup\limits_{i\in I'}A_i$ teljesül, ahol minden $i\in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az M térnek.
- Azt mondjuk, hogy az (M,d) *metrikus tér kompakt*, ha M kompakt halmaz.

13.40. Tétel. *Metrikus térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

Bizonyítás. A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

13.41. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.*
1. *Ekkor X korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy X korlátos. Legyen $p \in M$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup_{n\in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.
Most igazoljuk, hogy X zárt. Ehhez legyen $p \in M \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{r(x)}(x)$$

az X kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x) |\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left(\bigcup_{x\in H} B_{r(x)}(x)\right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x\in H} \left(B_{r(x)}(x) \cap B_r(p)\right) = \emptyset.$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq M \setminus X$. Tehát $M \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $M \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis X zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i\in I}$ az Y halmaz nyílt fedése és legyen $V = M \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i\in I}$ az X halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i\in I'} U_i$. A V halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az Y halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

13.42. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i\in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(K_i)_{i\in I}$ az M kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = M \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left(\bigcap_{i\in I} (K_i \cap K_{i_0})\right) = M,$$

vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Mivel K_{i_0} kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$. Ebből

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i = \bigcup_{i\in I'} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right)$$

adódik. A feltevés miatt véges sok K_i kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq M \setminus \left(\bigcap_{i\in I'} (K_i \cap K_{i_0})\right) \subseteq M \setminus K_j$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq M \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

13.43. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

13.44. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül.

13.45. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
Ha A relatív kompakt, akkor létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül. Mivel ekkor K zárt, ezért $\overline{A} \subseteq K$ is teljesül. Mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza is kompakt, ezért $\overline{A}$ kompakt.
Ha $\overline{A}$ kompakt, akkor $A \subseteq \overline{A}$ miatt A relatív kompakt.

13.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

13.46. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a K halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to K$ sorozat. Ekkor K korlátos és zárt halmaz. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x. Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a K halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.

13.47. Tétel. *(Lebesgue-lemma.) Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor a K halmaz bármely $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedéséhez: } \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in K \exists i \in I: \ B_r(x) \subseteq U_i.$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedés: } \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists x \in K \forall i \in I: \ B_r(x) \setminus U_i \neq \emptyset.$$

Legyen $(U_i)_{i\in I}$ a fenti tulajdonságokkal bíró nyílt befedése a K halmaznak. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{x \in K | \ \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset,$$

vagyis az 1.39 kiválasztási axióma miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in K | \ \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset.$$

Legyen a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak. Ekkor a egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall i \in I: \ B_{\frac{1}{n+1}}(a_n) \nsubseteq U_i.$$

Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Mivel $x \in K$ ezért létezik olyan $i_0 \in I$, hogy $x \in U_{i_0}$, valamint az U_{i_0} halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U_{i_0}$. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $n > N$ és $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$ teljesül, akkor a $B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_{i_0}$ ellentmodást kapjuk. Legyen ugyanis $z \in B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)})$ tetszőleges. Ekkor

$$d(z, a_{\sigma(n)}) < \frac{1}{\sigma(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{r}{2},$$

a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$d(z, x) \leq d(z, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

vagyis $z \in B_r(x) \subseteq U_{i_0}$.

13.48. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a K halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \exists H \subseteq K: \ |H| < \infty \ \wedge \ K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x).$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall H \subseteq K: \ |H| < \infty \ \to K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ egy olyan szám, melyre igaz, hogy minden $H \subseteq K$ véges részhalmaz esetén

$$K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset.$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $a : \mathbb{N} \to K$ sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(a_n, a_m) \geq r$ teljesül. A K halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in K$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz nem üres és az előző gondolatmenet alapján tudunk $a_2 \in K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatot konstruálni. Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Vagyis bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $N < n, m$, $m \neq n$ esetén az

$$r \leq d(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(n)}) \leq d(a_{\sigma(m)}, x) + d(x, a_{\sigma(n)}) < r$$

ellentmondást kapjuk.

13.49. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. A 13.46 tétel alapján ha $A \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.
Most tegyük fel, hogy A olyan halmaz, hogy minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak és legyen $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ az A halmaz egy nyílt fedése. Ekkor a 13.47 Lebesgue-lemma alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in A$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül. Az előző állítás alapján ehhez az r számhoz létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül. Ekkor minden $x \in H \subseteq A$ ponthoz van olyan $i(x) \in I$ index, amelyre $B_r(x) \subseteq U_{i(x)}$ teljesül. Tehát az eddigiek alapján

$$A \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x) \subseteq \bigcup_{x\in H} U_{i(x)},$$

ami az A halmaz véges nyílt fedése.

13.50. Tétel. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to K$ Cauchy-sorozat. A Bolzano–Weierstrass-tétel alapján ekkor létezik az a sorozatnak olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a K halmaznak. Viszont egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata ((13.36) tétel). Tehát az a Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke a K halmazban van, vagyis a K halmaz teljes.

13.8. Szeparábilis metrikus terek

13.51. Definíció. Az (M, d) metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül.

13.52. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) szeparábilis metrikus tér és legyen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül. Nyilván feltehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \neq \emptyset$. Ekkor $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$, legyen $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Ekkor $a : \mathbb{N} \to M$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in U_n$ teljesül.

Legyen $D = \operatorname{Ran} a$. A D halmaz nyilván megszámlálható, most igazoljuk, hogy sűrű, azaz $\overline{D} = M$. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$. Legyen $I \subseteq \mathbb{N}$ olyan, hogy $B_r(x) = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül. Ekkor minden $i \in I$ esetén $a_i \in U_i \subseteq B_r(x)$, valamint $a_i \in D$, tehát $a_i \in B_r(x) \cap D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$, azaz $x \in \overline{D}$.
Most tegyük fel, hogy (M,d) metrikus tér és $D \subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz. Legyen $\alpha : \mathbb{N} \to D$ szürjekció, valamint $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ és $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$U_n = B_{\beta(\gamma(n)_1)}(\alpha(\gamma(n)_2)).$$

Az $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer nyilván olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz. Legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz. Ehhez definiáljuk az $I = \{n \in \mathbb{N} |\ U_n \subseteq \Omega\}$ indexhalmazt. Megmutatjuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül. Mivel $\bigcup_{n\in I} U_n \subseteq \Omega$, ezért csak az $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in I} U_n$ tartalmazást kell igazolnunk. Ehhez legyen $x \in \Omega$ tetszőleges pont. Mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(x) \subseteq \Omega$. Legyen $r \in \left]0, \frac{\rho}{2}\right[\cap \mathbb{Q}^+$. Mivel D sűrű, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$, most legyen $z \in B_r(x) \cap D$ és tekintsük az

$$i = \beta^{-1}(r), \quad j = \min \overset{-1}{\alpha}(z) \quad \text{és} \quad n = \gamma^{-1}(i,j)$$

számokat. Ekkor $U_n = B_r(z)$. Tehát ha $y \in U_n$, akkor $y \in B_r(z)$, valamint $d(y,z) < r$ és $d(z,x) < r$ miatt $d(x,y) < 2r < \rho$, azaz $y \in B_\rho(x) \subseteq \Omega$. Ez azt jelenti, hogy $U_n \subseteq \Omega$, vagyis $n \in I$. Mivel $x \in B_r(z) = U_n$, ezért $x \in \bigcup_{n\in I} U_n$. Ezzel igazoltuk a $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in I} U_n$ tartalmazást.

13.53. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1,\infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek szeparábilisek.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $D = \mathbb{Q}^n$. Ekkor D nyilván megszámlálható halmaz, ezért ha sűrű lenne, akkor az előző tétel értelmében a tér szeparábilis volna. Megmutatjuk, hogy a D halmaz sűrű.
Legyen $p \in [1,\infty[$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ teret. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén legyen $a_i \in \left]x_i, x_i + \frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right[\cap \mathbb{Q}$ és tekintsük az $a = (a_1,\ldots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (a_i - x_i)^p} < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \frac{r^p}{n}} = \sqrt[p]{r^p} = r,$$

vagyis $a \in B_r(x)$, valamint $a \in D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n, d_p)$ térben.
Az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben legyen $x \in R^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén legyen $a_i \in]x_i, x_i + r[\cap \mathbb{Q}$ és tekintsük az $a = (a_1,\ldots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x) = \max\left\{|a_i - x_i| \,|\, i \in \{1,\ldots,n\}\right\}, < r$$

vagyis $a \in B_r(x)$, valamint $a \in D$, ezért $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy D sűrű a $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben.

13.9. Teljesen korlátos halmazok

13.54. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljesen korlátos*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.
Az (M,d) metrikus teret teljesen korlátosnak nevezzük, ha M teljesen korlátos halmaz.

13.55. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
A teljesen korlátosság definíciója miatt csak azt kell megmutatni, hogy ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül, akkor A teljesen korlátos. Ehhez tegyük fel, hogy A olyan nem üres halmaz, melyre teljesül, hogy

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists X \in M: \ X \text{ véges és } A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x).$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az A halmaz tulajdonsága alapján létezik $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in X} B_{\frac{r}{2}}(x)$. Legyen

$$X' = \left\{x \in X \middle|\, B_{\frac{r}{2}}(x) \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

Mivel X' is véges halmaz, ezért valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $X' = \{x_1,\dots,x_n\}$. Minden $i \in \{1,\dots,n\}$ indexre legyen $x'_i \in B_{\frac{r}{2}}(x_i) \cap A$ tetszőleges pont és tekintsük az $Y = \{x'_1,\dots,x'_n\} \subseteq A$ halmazt. Ha $a \in A$ tetszőleges pont, akkor létezik olyan $i \in \{1,\dots,n\}$, hogy $a \in B_{\frac{r}{2}}(x_i)$. Mivel $d(a,x_i) < \dfrac{r}{2}$ és $d(x_i,x'_i) < \dfrac{r}{2}$, ezért $a \in B_r(x'_i)$. Vagyis $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_r(x'_i)$, tehát A teljesen korlátos.

13.56. Tétel. *(Teljesen korlátos halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.*
2. *Véges sok teljesen korlátos halmaz uniója is teljesen korlátos.*
3. *Metrikus térben minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Az 1. és a 2. pont az előző tétel alapján nyilvánvaló.
3. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván korlátos. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$. Ekkor létezik olyan $X = \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq M$ halmaz, hogy $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Legyen $R = \max\{d(x_1,x_j) \mid 1 < j \leq n\}$. Tetszőleges $a \in A$ ponthoz van olyan $i \in \{1,\dots,n\}$ index, hogy $a \in B_1(x_i)$. Ekkor $d(a,x_i) < 1$ és $d(x_1,x_i) \leq R$ miatt $d(a,x_1) < R+1$, azaz $a \in B_{R+1}(x_1)$. Ezek alapján $A \subseteq B_R(x_1)$, vagyis A korlátos.

13.57. Tétel. *Minden kompakt halmaz teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $A \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} B_\varepsilon(a)$, ezért az A halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $X \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup\limits_{a\in X} B_\varepsilon(a)$ teljesül, tehát A teljesen korlátos.

13.58. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a: \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ekkor A teljesen korlátos halmaz.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a: \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván teljesen korlátos, ezért feltehető, hogy $A \neq \emptyset$. Indirekt módon tegyük fel, hogy A nem teljesen korlátos. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $H \subseteq A$ véges halmazra $A \nsubseteq \bigcup\limits_{x\in H} B_r(x)$. Mivel az A halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in A$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $A \setminus \bigcup\limits_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in A \setminus \bigcup\limits_{x\in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0,a_1\}$ halmaz véges és az előző gondolatmenet alapján tudunk egy $a_2 \in A \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatot konstruálni, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_r(a_k)$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, a_m) \geq r$.
Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to A$ olyan részsorozat, mely Cauchy-sorozat. Ekkor az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n < m$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) < r$. Ez viszont ellentmondásban van a sorozat $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \geq r$ tulajdonságával.

13.59. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$.)
Először legyen $A_0 = A$. Mivel A_0 teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_0 \subseteq A_0$ véges halmaz, hogy $A_0 \subseteq \bigcup_{x\in H_0} B_{\alpha_0}(x)$. Minden $x \in H_0$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_0}(x) \cap A_0\}.$$

Ekkor van olyan $x_0 \in H_0$, melyre az $N(x_0)$ halmaz végtelen. Legyen $N_0 = N(x_0)$ és

$$\sigma(0) = \min N_0.$$

Most legyen $A_1 = A_0 \cap B_{a_0}(x_0)$. Mivel A_1 teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_1 \subseteq A_1$ véges halmaz, hogy $A_1 \subseteq \bigcup_{x\in H_1} B_{\alpha_1}(x)$. Minden $x \in H_1$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_1}(x) \cap A_1\}.$$

Ekkor van olyan $x_1 \in H_1$, melyre az $N(x_1)$ halmaz végtelen. Legyen $N_1 = N(x_1)$ és

$$\sigma(1) = \min\left(N_1 \cap [\sigma(0) + 1, \infty[\right).$$

Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ számra már definiáltuk az A_i halmazt, az x_i pontot és a $\sigma(i)$ értéket, akkor legyen $A_{i+1} = A_i \cap B_{\alpha_i}(x_i)$. Mivel A_{i+1} teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_{i+1} \subseteq A_{i+1}$ véges halmaz, hogy $A_{i+1} \subseteq \bigcup_{x\in H_{i+1}} B_{\alpha_{i+1}}(x)$. Minden $x \in H_{i+1}$ esetén legyen

$$N(x) = \left\{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_{i+1}}(x) \cap A_{i+1}\right\}.$$

Ekkor van olyan $x_{i+1} \in H_{i+1}$, melyre az $N(x_{i+1})$ halmaz végtelen. Legyen $N_{i+1} = N(x_{i+1})$ és

$$\sigma(i+1) = \min\left(N_{i+1} \cap [\sigma(i) + 1, \infty[\right).$$

Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételével lehet olyan

$$N : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad x : \mathbb{N} \to M, \qquad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

függvények létezését igazolni, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén N_i végtelen halmaz és

$$N_{i+1} \subseteq N_i, \quad x_{i+1} \in B_{\alpha_i}(x_i), \quad \sigma(i) < \sigma(i+1), \quad a_{\sigma_{i+1}} \in B_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}).$$

Most igazoljuk, hogy $x : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\sum_n \alpha_n$ sor konvergens és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $N < n, m$. Ekkor

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-n} d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) < \sum_{k=1}^{m-n} \alpha_{n+k-1} = \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon,$$

vagyis x Cauchy-sorozat.
Végül megmutatjuk, hogy $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim \alpha = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n$ esetén $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Mivel x Cauchy-sorozat az eddigiek alapján, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_2 < n, m$ esetén $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$, valamint $N < n, m$ tetszőleges természetes szám. Ekkor $n \leq \sigma(n)$ és $m \leq \sigma(m)$ miatt

$$d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \leq d(a_{\sigma(n)}, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_{\sigma(m)}) < \alpha_n + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_m < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat.

13.60. Tétel. *(Hausdorff-tétel.) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden benne haladó sorozatnak van olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. A 13.59 és a 13.58 tétel következménye.

13.61. Tétel. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

Bizonyítás. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes a 13.50 tétel alapján és teljesen korlátos a 13.57 tétel miatt. Most legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ teljesen korlátos teljes halmaz. Továbbá legyen $a : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Mivel K teljesen korlátos, ezért a 13.59 tétel miatt az a sorozatnak van Cauchy-részsorozata. Mivel a K halmaz teljes, ezért ennek a Cauchy-részsorozatnak van határértéke a K halmazban. Tehát létezik olyan konvergens részsorozata az a sorozatnak, mely határértéke a K halmazban van. Ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel miatt K kompakt.

13.10. Függvények metrikus terek között

13.62. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f *függvény határértéke az a pontban* $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

13.63. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, $a \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in M'$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$0 < d(x, a) < \delta_A \ \to \ d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2}$$

$$0 < d(x,a) < \delta_B \ \rightarrow \ d'(f(x),B) < \frac{d'(A,B)}{2}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\operatorname{Dom} f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A,B) \leq d'(A,f(x)) + d'(f(x),B) < d'(A,B)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

13.64. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen (M,d) és (M',d') topologikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és az $a \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jelöli.

13.65. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és a $z \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in M$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in M'$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \ 0 < d(x,z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x),F) < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n),F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = F$.

Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a z ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in M'$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ d'(f(x),A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\},\ d'(f(x),A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n),A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n),A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

13.66. Definíció. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvény folytonos az* a *pontban*, ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\Big(f(B_\delta(a))\subseteq B_\varepsilon(f(a))\Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a\in\operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.
A $C(M,M')$ szimbólum jelöli az $M\to M'$ folytonos függvények halmazát.

13.67. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f: M\twoheadrightarrow M'$ és $z\in\operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f\circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f: M\twoheadrightarrow M'$, és $z\in\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a z pontban és legyen $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Az f függvény z pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x\in\operatorname{Dom} f:\ d(x,z)<\delta\ \Rightarrow\ d'(f(x),f(z))<\varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d(a_n,z)<\delta$. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d'(f(a_n),f(z))<\varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(z)$.
Tegyük fel, hogy minden olyan $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f\circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel, azonban az f függvény mégsem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\forall\delta\in\mathbb{R}^+\exists x\in\operatorname{Dom} f\cap B_\delta(z): f(x)\notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{x\in\operatorname{Dom} f|\ x\in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x),f(z))\geq\varepsilon\Big\}\neq\emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\Big\{x\in\operatorname{Dom} f|\ x\in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x),f(z))\geq\varepsilon\Big\}\neq\emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $d(a_n,z)<\dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a=z$. Ekkor $\lim f\circ a=f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d'(f(a_n),f(z))\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n\in\mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n),f(z))\geq\varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f\circ a=f(z)$.

13.68. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f: M\twoheadrightarrow M'$, és az $a\in\operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik és $\lim\limits_a f=f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f: M\twoheadrightarrow M'$, és az $a\in\operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f=f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x\in\operatorname{Dom} f: && 0<d(x,a)<\delta && \to && d'(f(x),f(a))<\varepsilon\\
&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x\in\operatorname{Dom} f: && d(x,a)<\delta && \to && d'(f(x),f(a))<\varepsilon
\end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a\in\operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

13.69. Tétel. *Legyen (M_1,d_1), (M_2,d_2) metrikus tér, $\varphi: M_1\to M_2$ folytonos függvény és $x,y\in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a,b:\mathbb{N}\to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a=x$ és $\lim b=y$ teljesül. Ekkor*

$$d_2(\varphi(x),\varphi(y))=\lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n)).$$

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra az

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

egyenletből

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)) \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

adódik, amiből az $x \leftrightarrow a_n$ és $y \leftrightarrow b_n$ szerepcserével

$$|d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| \leq d_2(\varphi(x), \varphi(a_n)) + d_2(\varphi(b_n), \varphi(y))$$

következik. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján ezért

$$\lim_{n\to\infty} |d_2(\varphi(x), \varphi(y)) - d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))| = 0,$$

vagyis

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n))$$

teljesül.

13.70. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(\lim a, \lim b)$$

teljesül.

Bizonyítás. Ehhez elég a 13.69 tételt használni az $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (M, d)$ és a $\varphi = \mathrm{id}_M$ szereposztással.

13.71. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \mathrm{Dom}\, g$;*
2. *$b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \mathrm{Dom}\, g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) = g\left(B_{\delta'}(b)\right)$ miatt

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g\left(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}\right) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g\left(B_{\delta'}(b)\right) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

13.72. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ és $K = \mathrm{Dom}\, f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to M_2$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq M_2$ zárt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (U \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = M_1 \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (Z \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus Z)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = M_1 \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

13.73. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*

2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

13.74. Tétel. *(Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül és legyen $x \in \overline{U} \setminus U$ tetszőleges pont. Ekkor x torlódási pontja az U halmaznak, tehát létezik olyan $a : \mathbb{N} \to U$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x).$$

13.75. Tétel. *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen (M_i, d_i) metrikus tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$, $g : M_2 \twoheadrightarrow M_3$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g : \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \;\Rightarrow\; d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

13.76. Definíció. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

13.77. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, vagyis amikor f nyílt.

13.11. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

13.78. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((13.72) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i,$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} f(V_i) = \bigcup_{i\in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

13.79. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 13.78 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a 3.22 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

13.80. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \to M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a *(M, d) és (M', d') metrikus terek homeomorfak*, ha létezik $f : M \to M'$ homeomorfizmus.

13.81. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a K kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z) = f(Z) = f(Z \cap K)$$

egyenlőséget, az adódik, hogy minden Z zárt halmazra a $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z)$ halmaz zárt, tehát a 13.72 tétel alapján f^{-1} folytonos függvény.

13.82. Tétel. *Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, (M_2, d_2) metrikus tér és legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció. Ekkor a 13.78 tétel alapján M_2 kompakt tér, és a 13.81 állítás alapján az f^{-1} függvény is folytonos.

13.12. Egyenletesen folytonos függvények

13.83. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \;\to\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

13.84. Tétel. *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \ \rightarrow \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

13.85. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min\left\{\dfrac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x, y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x, y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y, p) \le d_1(y, x) + d_1(x, p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \le \delta(p),$$

vagyis

$$\begin{aligned} d_1(x, p) < \delta(p) \quad &\rightarrow \quad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_1(y, p) < \delta(p) \quad &\rightarrow \quad d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

egyenlőtlenség következik.

13.86. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\operatorname{Dom} f} \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $X = \operatorname{Dom} f$.

1. Ha $g_1, g_2 : \overline{X} \to M_2$ olyan folytonos függvény, melyre $g_1|_X = g_2|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján ((13.74) tétel) $g_1|_{\overline{X}} = g_2|_{\overline{X}}$, azaz $g_1 = g_2$.

2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $f \circ a$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$

pontra $d_1(y_1, y_2) < \delta$ esetén $d_2(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $d_1(a_n, a_m) < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$. Mivel az (M_2, d_2) tér teljes, ezért az $f \circ a$ Cauchy-sorozat konvergens.
3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \to X \qquad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim f \circ c$ határérték. Mivel $f \circ a$ és $f \circ b$ részsorozata az $f \circ b$ sorozatnak, ezért $\lim f \circ c = \lim f \circ b = \lim f \circ a$ teljesül.
4. Ezek után definiálhatjuk úgy a g függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $g(x) = \lim(f \circ a)$. Vagy másképp leírva

$$g = \left\{ (x, y) \in \overline{X} \times M_2 | \ \exists a : \mathbb{N} \to X : \ \lim a = x \ \wedge \ y = \lim(f \circ a) \right\}.$$

Ekkor nyilván $f \subseteq g$.
5. Végül igazoljuk, hogy g egyenletesen folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in X$ pontra $d_1(x_1, x_2) < \delta$ esetén $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x_1, x_2 \in \overline{X}$ olyan, hogy $d_1(x_1, x_2) < \delta$. Most legyen $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x_1$ és $\lim b = x_2$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$d_1(a_n, x_1) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} \quad \text{és} \quad d_1(b_n, x_2) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén

$$d_1(a_n, b_n) \leq d_1(a_n, x_1) + d_1(x_1, x_2) + d_1(x_2, b_n) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} + d_1(x_1, x_2) + \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} = \delta.$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$, amiből az $n \to \infty$ határátmenet után a 13.69 tétel alapján

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

adódik.

13.87. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és X halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \twoheadrightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\operatorname{Dom} f} = M$.

13.88. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. A 13.86 tétel alapján nyilvánvaló.

13.89. Definíció. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér. Az $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \to M'$ izometrikus homeomorfizmus.

13.90. Tétel. *Minden izometria egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Az izometria definíciója alapján nyilvánvaló.

13.91. Tétel. *(Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \to M_2$ kiterjesztése is izometria.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. A 13.88 tétel alapján az f függvénynek létezik $g : M_1 \to M_2$ egyenletesen folytonos kiterjesztése. Legyen $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a, b : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. A 13.69 tétel alapján

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(g(a_n), g(b_n)) = \lim_{n\to\infty} d_2(f(a_n), f(b_n)).$$

Mivel f izometria, ezért

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_1(a_n, b_n),$$

amiből a 13.70 tétel akapján

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y)$$

következik.

13.13. Kontrakciók és Lipschitz-folytonos függvények

13.92. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *Lipschitz-folytonos függvény*, ha

$$\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y)\Big).$$

13.93. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[\, \forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y)\Big).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

13.94. Tétel. *Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ Lipschitz-folytonos a $C \in \mathbb{R}_0^+$ együtthatóval. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + C}$. Ha $x, y \in M_1$ olyan pontok, hogy $d_1(x, y) < \delta$, akkor

$$d_2(f(x), f(y)) \le C d_1(x, y) \le C\delta = \varepsilon \cdot \frac{C}{1 + C} < \varepsilon,$$

ami viszont éppen az f függvény egyenletes folytonosságát jelenti.

13.95. Tétel. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \to M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.*

$$\textit{kontrakció} \;\Rightarrow\; \textit{Lipschitz-folytonos} \;\Rightarrow\; \textit{egyenletesen folytonos} \;\Rightarrow\; \textit{folytonos}$$

Bizonyítás. Az első implikáció a definíció közvetlen következménye. A második következtetést a 13.94 tétel és a harmadikat pedig a 13.84 tétel garantálja.

13.96. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $f : M \to M$ kontrakció a $C \in\,]0, 1[$ kontrakciós együtthatóval és a tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha C_1 a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Vegyük azt az $x : \mathbb{N} \to M$ sorozatot, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \le C d(x_{n+1}, x_n)$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0).$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért x Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor az f folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y,$$

vagyis y fixpontja az f függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in M$ az f függvény két különböző fixpontja. Ekkor a

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq C d(y_1, y_2)$$

egyenlőtlenségből az $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

13.14. Halmazok szétválasztása

13.97. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}, & \text{ha} \quad A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha} \quad A = \emptyset. \end{cases}$$

13.98. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
Ha A korlátos, akkor létezik olyan $z \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $A \subseteq B_r(z)$ teljesül. Ekkor minden $x, y \in A$ esetén

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r,$$

vagyis

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \leq 2r < \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\operatorname{diam}(A) = R < \infty$ és legyen $z \in A$ tetszőleges pont. Ha $x \in A$, akkor az $d(x, z) \leq \operatorname{diam}(A) = R < R + 1$ egyenlőtlenség alapján $x \in B_{R+1}(z)$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \subseteq B_{R+1}(z)$ teljesül, vagyis az A halmaz korlátos.

13.99. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az A *halmaztól való távolság függvénye*

$$\operatorname{dist}_A : M \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x\in A} d(z, x).$$

13.100. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in M$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in M$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\operatorname{dist}_A(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

vagyis

$$\operatorname{dist}_A(x) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\operatorname{dist}_A(x) - d(x,y) \leq \inf_{z \in A} d(y,z) = \operatorname{dist}_A(y),$$

amiből átrendezéssel

$$\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y) \leq d(x,y)$$

adódik. Ebből az x és az y pontok cseréjével

$$\operatorname{dist}_A(y) - \operatorname{dist}_A(x) \leq d(x,y)$$

adódik, vagyis

$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y).$$

2. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ha $\delta = \varepsilon$, akkor minden $x, y \in M$ pontra $d(x,z) < \delta$ esetén

$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$$

teljesül, ami az egyenletes folytonosságot jelenti.
3. Mivel a dist_A függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M \mid \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi ősképe ($B = \overset{-1}{\operatorname{dist}_A}(\{0\})$), továbbá a dist_A definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x,z) \geq r$, ezért

$$\operatorname{dist}_A(x) = \inf_{z \in A} d(x,z) \geq r,$$

vagyis $\operatorname{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

13.101. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.*

1. *Létezik olyan $f : M \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.*
2. *Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.
1. A $\operatorname{dist}_X + \operatorname{dist}_Y : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá ha valamilyen $z \in M$ pontra

$$(\operatorname{dist}_X + \operatorname{dist}_Y)(z) = 0$$

teljesülne, akkor abból $\operatorname{dist}_X(z) = \operatorname{dist}_Y(z) = 0$ következne, amiből a 13.100 tétel alapján $z \in \overline{X}$ és $z \in \overline{Y}$ adódna; az X és Y halmaz zártsága miatt ez azt jelentené, hogy $z \in X \cap Y$, vagyis az $X \cap Y \neq \emptyset$ ellentmondás adódna. Ezért $\operatorname{dist}_X + \operatorname{dist}_Y : M \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen $f = \dfrac{\operatorname{dist}_X}{\operatorname{dist}_X + \operatorname{dist}_Y}$. Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy az f függvény eleget tesz a feltételeknek.
2. Legyen f olyan függvény melynek létezését bizonyítottuk az 1. pontban, továbbá legyen

$$U = \overset{-1}{f}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) \quad \text{és} \quad V = \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{1}{2}, \infty, \right[\right).$$

Az f függvény folytonossága és a folytonosság topologikus jellemzése miatt U és V nyílt halmaz, valamint a konstrukció folytán nyilvánvaló, hogy eleget tesz az $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ követelményeknek.

13.15. Metrikus tér teljessé tétele

13.102. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér.*

1. *Létezik olyan (M', d') teljes metrikus tér és $j : M \to M'$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül.*
2. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \to M_1$ és $j_2 : M \to M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.
1. Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{M} = \left\{a : \mathbb{N} \to M |\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (N < n, m \ \to \ d(a_n, a_m) < \varepsilon)\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a, b \in \mathcal{M}$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$ határérték. Válaszunk $a, b \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet és tekintsük az

$$\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto d(a_n, b_n)$$

sorozatot, melyről elég megmutatni, hogy Cauchy-sorozat, hiszen a valós számok halmazában minden Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < m, n$ esetén

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad d(b_n, b_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $N < m, n$, akkor

$$d(a_n, b_n) \le d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n),$$

aminek átrendezéséből

$$d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m) \le d(a_n, a_m) + d(b_m, b_n) < \varepsilon,$$

adódik, valamint az m és n betűk cseréje után

$$|\eta_n - \eta_m| = |d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| \le d(a_n, a_m) + d(b_m, b_n) < \varepsilon$$

következik, ami igazolja, hogy η valóban Cauchy-sorozat.
2. Definiáljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{M}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \left\{(a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} |\ \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0\right\}$$

Vagyis $a, b \in \mathcal{M}$ esetén $a \sim b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

A $\sim$ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus, a tranzitivitása pedig a minden $a, b, c \in \mathcal{M}$ elemre és a minden $n \in \mathbb{N}$ számra érvényes

$$0 \le d(a_n, c_n) \le d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$$

egyenlőtlenségből következik. Vagyis $\sim$ ekvivalenciareláció.
3. Most megmutatjuk, hogy ha $a, b, c, d \in \mathcal{M}$ olyanok, hogy $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, c_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n, d_n). \tag{13.1}$$

Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a \sim b$ és $c \sim d$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d(c_n, d_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén az

$$d(a_n, c_n) \le d(a_n, b_n) + d(b_n, d_n) + d(d_n, b_n)$$

egyenlőtlenség átrendezéséből

$$d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n) \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n)$$

adódik, amiből a, b és c, d felcserélésével

$$|d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n) < \varepsilon$$

következik. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} |d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| = 0$, amiből már adódik az (13.1) egyenlet.
. Legyen $M' = \mathcal{M}/\sim$. A 3. pont alapján értelmezhető a $d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+$ függvény úgy, hogy minden $a', b' \in M'$ esetén válasszunk $a \in a'$, $b \in b'$ elemet és legyen $d'(a', b') = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. Vagy másképp

$$d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (a', b') \mapsto \sup\left\{ \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) | a \in a', b \in b' \right\},$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen. A d' függvényről egyszerűen megmutatható, hogy metrika, tehát (M', d') metrikus tér.
5. Minden $x \in M$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x}/\sim$, valamint

$$j : M \to M' \qquad x \mapsto x'.$$

Minden $x, y \in M$ esetén $\tilde{x} \in x'$ és $\tilde{y} \in y'$, ezért

$$d'(x', y') = \lim_{n\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$$

vagyis j izometria.
6. Legyen $x \in M'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a \in x$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen y a konstans a_{N+1} sorozat ekvivalenciaosztálya, azaz $y = \widetilde{a_{N+1}}/\sim$. Ekkor nyilván $y \in \operatorname{Ran} j$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $d(a_n, a_{N+1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$d'(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{N+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Ran} j \neq \emptyset$, tehát $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$.
7. Most igazoljuk, hogy az (M', d') metrikus tér teljes. Legyen $x : \mathbb{N} \to M'$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Az előző pont alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\operatorname{Ran} j) \cap B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, ezért $\overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset$, amiből

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset$$

következik. Legyen $a \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in M$ olyan elem, melyre $d'(j(a_n), x_n) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, valamint $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_2 < n, m$ esetén $d'(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Képezzük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ esetén

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &= d'(j(a_n), j(a_m)) \leq d'(j(a_n), x_n) + d'(x_n, x_m) + d'(x_m, j(a_m)) < \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis a Cauchy-sorozat. Legyen $z = a/\sim$, vagyis z az a elem által meghatározott ekvivalenciaosztály, tehát $z \in M'$.
Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a

Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n, m$ természetes számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ számra $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tekintsük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ha $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d'(x_n, z) \leq d'(x_n, j(a_n)) + d'(j(a_n), z) < \frac{1}{n+1} + \lim_{m\to\infty} d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n, z) = 0$.
8. Most legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) olyan teljes metrikus tér, melyekhez létezik olyan $j_1 : M \to M_1$, $j_2 : M \to M_2$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$. Legyen $f : \operatorname{Ran} j_1 \to M_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria, ezért a 13.91 tétel alapján létezik egyetlen folytonos $\varphi : M_1 \to M_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $\varphi \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az (M_1, j_1) és (M_2, j_2) szerepét az adódik, hogy létezik olyan folytonos $\varphi' : M_2 \to M_1$ izometria, mely az $f' : \operatorname{Ran} j_2 \to M_1$, $f' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $\varphi' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi \circ j_1 \circ j_2^{-1} &= j_2 \circ j_2^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} j_2} \\ (\varphi \circ \varphi')|_{\operatorname{Ran} j_2} &= \mathrm{id}_{M_2}|_{\operatorname{Ran} j_2} \end{aligned}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (13.74 tétel) alapján $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{M_2}$. Szerepcserével pedig $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{M_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy φ bijekció, valamint $\varphi^{-1} = \varphi'$ miatt φ^{-1} is folytonos. Tehát olyan φ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.
9. Az előbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2 : M_1 \to M_2$ olyan izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $\varphi_1|_{\operatorname{Ran} j_1} = \varphi_2|_{\operatorname{Ran} j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $\varphi_1 = \varphi_2$ következik.

13.103. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden (M', d') teljes metrikus teret és $j : M \to M'$ izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül, az (M, d) *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

13.104. Tétel. *Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

Bizonyítás. A 13.102 tétel alapján nyilvánvaló.

13.16. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok

13.105. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.

- Az *A halmaz összefüggő*, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az *M metrikus tér összefüggő*, ha az M halmaz összefüggő.
- Az *A halmaz ívszerűen összefüggő*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0, 1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az *M metrikus tér ívszerűen összefüggő*, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő.

13.106. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.*

1. *Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér összefüggő.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.
1. Legyen $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M, d) metrikus térben és $\widetilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A, d') metrikus térben.
Legyen az A halmaz összefüggő az (M, d) térben és indirekt módon tegyük fel, hogy az (A, d') tér nem összefüggő. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq A$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \widetilde{U} \cap V = U \cap \widetilde{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor a 13.22 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, továbbá $U \subseteq A$, $V \subseteq A$ miatt $U \cap A = U$, $A \cap V = V$, vagyis

$$\overline{U} \cap V = \overline{U} \cap (A \cap V) = (\overline{U} \cap A) \cap V = \widetilde{U} \cap V = \emptyset$$
$$U \cap \overline{V} = (U \cap A) \cap \overline{V} = U \cap (A \cap \overline{V}) = U \cap \widetilde{V} = \emptyset.$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M,d) térben, vagyis az (A,d') tér összefüggő.
Legyen az (A,d') tér összefüggő és tegyük fel, hogy az A halmaz nem összefüggő az (M,d) térben. Ekkor létezik olyan $U,V \subseteq M$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset \quad U \cup V = A$$

teljesül. Ekkor ismét a 13.22 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$ és $\widetilde{V} \subseteq \overline{V}$ vagyis

$$\widetilde{U} \cap V \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset$$
$$U \cap \widetilde{V} \subseteq U \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az (A,d') tér nem összefüggő, vagyis az A halmaz összefüggő az (M,d) térben.
2. Legyen $x,y \in A$ két tetszőleges pont és legyen $\gamma : [0,1] \to A$ olyan függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Csak azt kell meggondolni, hogy γ pontosan akkor folytonos az (M,d) téren, ha folytonos az (A,d') téren. Ez azonban a folytonosság definíciójából és a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq A \subseteq M$ tartalmazásból rögtön adódik.

13.107. Tétel. *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor A összefüggő, ezért feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy A nem összefüggő és legyen $U,V \subseteq M$ olyan, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül. Legyen $x \in U$ és $y \in V$ tetszőleges és legyen $\gamma : [0,1] \to A$ egy olyan folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
Legyen

$$t_0 = \sup \{ t \in [0,1] \mid \forall x \in [0,t[\, : \gamma(x) \in U \},$$

valamint legyen $z = \gamma(t_0)$. Mivel $z \in A$, ezért $z \in U$ vagy $z \in V$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $z \in V$. Ekkor $z \notin \overline{U}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap U = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin U$. Ez viszont ellentmondásban van t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 - \dfrac{\delta}{2}\right[$ számra a $\gamma(x) \in U$ tartalmazásnak kellenne teljesülnie, ez viszont az $x = t_0 - \dfrac{3\delta}{4}$ számra biztosan nem teljesül.
Most tegyük fel, hogy $z \in U$. Ekkor $z \notin \overline{V}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap V = \emptyset$. A γ függvény t_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin V$. Ez viszont ellentmondásban van a t_0 definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 + \dfrac{\delta}{2}\right[$ számra is $\gamma(x) \in U$ teljesül.

13.108. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az M halmaz összefüggő.*
2. *Nem létezik olyan $U,V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.*
3. *Nem létezik olyan $X,Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér.
1⇒2 Legyen M összefüggő és tegyük fel, hogy létezik olyan $U,V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $\overline{U} \cap V = \emptyset$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{U} \cap V$ elem. Ekkor a V halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq V$ teljesül. Mivel $U \cap V = \emptyset$, ezért $B_r(x) \cap U = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \overline{U}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Vagyis azt az ellentmondást kaptuk, hogy M nem összefüggő. Tehát nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül.
2⇒1 Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk a $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$ következtetést. Tehát legyen M nem összefüggő halmaz. Ekkor létezik olyan $A, B \subseteq M$ halmaz, hogy $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ és $A \cup B = M$ teljesül.
Legyen $U = M \setminus \overline{A}$ és $V = M \setminus \overline{B}$. Nyilván U és V nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy $U \cup V = M$. Ha nem így lenne, akkor létezne olyan $x \in M$ elem, melyre $x \notin U$ és $x \notin V$ teljesülne. Az U és V definíciója alapján ebből $x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B}$ következik.
Mivel $x \in M = A \cup B$, ezért $x \in A$ vagy $x \in B$.
Ha $x \in A$, akkor $x \in \overline{B}$ miatt az $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Ha $x \in B$, akkor $x \in \overline{A}$ miatt az $x \in \overline{A} \cap B = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Tehát $U \cup V = M$ teljesül.
A U és V halmaz metszetére vonatkozó követelmény is teljesül az alábbiak szerint.

$$U \cap V = (M \setminus \overline{A}) \cap (M \setminus \overline{A}) = M \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \subseteq M \setminus (A \cup B) = M \setminus M = \emptyset$$

Már csak azt kell igazolni, hogy $U \neq \emptyset$ és $V \neq \emptyset$. Ha $U = \emptyset$, akkor $\overline{A} = M$, amiből az

$$\emptyset = \overline{A} \cap B = M \cap B = B = \emptyset$$

ellentmondás adódik, tehát $U \neq \emptyset$. Hasonlóan megmutatható, hogy $V \neq \emptyset$.
2⇔3 Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\begin{array}{ll} \exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre} & U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset,\ M = U \cup V \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ \exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre} & \left\{ \begin{array}{c} (M \setminus U) \neq \emptyset,\ (M \setminus V) \neq \emptyset, \\ (M \setminus U) \cap (M \setminus V) = \emptyset,\ M = (M \setminus U) \cup (M \setminus V) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ \exists X, Y \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre} & X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset,\ X \cap Y = \emptyset,\ M = X \cup Y \end{array}$$

13.17. Összefüggő és ívszerűen összefüggő metrikus alterek

13.109. Tétel. *(Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.*
2. *Az (A, d') metrikus altér összefüggő.*
3. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.*
4. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq X \cup Y$.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$.
1.⇔2. A 13.106 tétel épp ezt az ekvivalenciát mondja ki.
2.⇒3. Igazoljuk a $\neg 3. \Rightarrow \neg 2.$ következtetést. Legyen $U, V \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, melyre $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül. Ekkor a 13.21 tétel alapján az $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$ halmazok nyíltak az (A, d') metrikus térben és ezen nyílt halmazokra $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. A 13.108 tétel alapján ezért az (A, d') tér nem összefüggő.
3.⇒2. Igazoljuk a $\neg 2. \Rightarrow \neg 3.$ következtetést. Ha (A, d') nem összefüggő, akkor a 13.108 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq A$ nyílt halmaz az (A, d') metrikus térben, melyre $U' \neq \emptyset$, $V' \neq \emptyset$, $U' \cap V' = \emptyset$ és $A = U' \cup V'$ teljesül. A 13.21 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz az (M, d) metrikus térben, melyre $U' = U \cap A$ és $V' = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$.
3.⇔4. A 2.⇒3. illetve a 3.⇒2. bizonyításában a *nyílt* szót kicserélve a *zárt* szóra kapjuk a bizonyítást.

13.110. Tétel. *Legyen (M, d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A = \emptyset$ vagy $A = M$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) összefüggő metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$ és $A \neq M$. Legyen $U = A$ és $V = M \setminus A$. Ebből azt az ellentmondást kapjuk, hogy az M tér nem összefüggő. Ugyanis ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, valamint $\overline{U} = U$ és $\overline{V} = V$ miatt $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ teljesül, valamint $U \cup V = M$.

13.111. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \to M_2$ folytonos függvény.*

1. *Ha A összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.*
2. *Ha A ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint legyen $A \subseteq M_1$ és $f : A \to M_2$ folytonos függvény.
1. Tegyük fel, hogy A összefüggő és $B = f(A)$ nem összefüggő. Ekkor a 13.109 tétel alapján létezik olyan $U', V' \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $U' \cap B \neq \emptyset$, $V' \cap B \neq \emptyset$, $U' \cap V' \cap B = \emptyset$ és $B \subseteq U' \cup V'$ teljesül. A folytonosság topologikus jellemzéséről szóló 13.72 tétel alapján ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U') = U \cap A$ és $\overset{-1}{f}(V') = V \cap A$. Ekkor $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ és $A \subseteq U \cup V$ teljesül, vagyis a 13.109 tétel alapján azt az ellentmondást kaptuk, hogy A nem összefüggő.
2. Tegyük fel, hogy A ívszerűen összefüggő és legyen $x', y' \in f(A)$ két tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $x, y \in A$, melyre $f(x) = x'$ és $f(y) = y'$. Mivel A ívszerűen összefüggő, ezért létezik olyan $\gamma : [0,1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$. Legyen $\gamma' = f \circ \gamma$. Ekkor $\gamma' : [0,1] \to f(A)$ olyan folytonos függvény, melyre melyre $\gamma'(0) = x'$ és $\gamma'(1) = y'$ teljesül.

13.18. Metrikus terek szorzata

13.112. Tétel. *Ha I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér, akkor $M = \prod_{i \in I} M_i$ esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrika.

Bizonyítás. A metrika tulajdonságai egyszerűen igazolhatók.

13.113. Definíció. Legyen I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén (M_i, d_i) metrikus tér. Az $M = \prod_{i \in I} M_i$ halmazból és a

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrikából álló (M,d) párt nevezzük az $(M_i, d_i)_{i \in I}$ *metrikus terek szorzatának.*

13.114. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere és (M,d) ezek szorzata. Ekkor minden $j \in I$ esetén a*

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j \qquad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$$

projekció folytonos és nyílt.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M,d) ezek szorzata, valamint $j \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges index.
Legyen $U \subseteq M_j$ tetszőleges nyílt halmaz és $\Omega = \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(U)$. A projekció értelmezése alapján

$$\Omega = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times U \times M_{j+1} \cdots \times M_n,$$

amiről megmutatjuk, hogy nyílt halmaz. Ha $x \in \Omega$, akkor $x_j \in U$, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy $B_r(x_j) \in U$, ekkor viszont

$$B_r^d(x) = B_r^{d_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{d_n}(x_n) \tag{13.2}$$

miatt $B_r^d(x) \subseteq \Omega$. Tehát minden nyílt halmaz képe nyílt, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján pr_j folytonos.

Most legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \mathrm{pr}_j(\Omega)$. Az $\Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(x) \neq \emptyset$ miatt választhatunk $t \in \Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(x)$ elemet. Ekkor $t \in \Omega$ és $\mathrm{pr}_j(t) = x$, vagy másképp $t_j = x$. Mivel Ω nyílt, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(t) \subseteq \Omega$. Ekkor $\mathrm{pr}_j\left(B_r(t)\right) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega)$ és a (13.2) képlet alapján

$$B_r(x) = B_r(t_j) = \mathrm{pr}_j(B_r(t)) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega),$$

tehát $\mathrm{pr}_j(\Omega)$ nyílt halmaz, vagyis pr_j nyílt.

13.115. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i \in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata és $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat. Az a sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és ekkor minden $i \in I$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i\left(\lim a\right) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, valamint $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat.
Ha az a sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges index és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < \varepsilon$. A szorzatmetrika értelmezése alapján ezért $d_i(\mathrm{pr}_i(a_n), \mathrm{pr}_i(x))\varepsilon$, vagyis $\lim\left(\mathrm{pr}_i \circ a\right) = \mathrm{pr}_i\left(\lim a\right)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = \left(\lim\left(\mathrm{pr}_1 \circ a\right), \dots, \lim\left(\mathrm{pr}_n \circ a\right)\right) \in M$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $d_i(\mathrm{pr}_i\, a_n, x_i) < \varepsilon$. Legyen $N = \max\left\{N_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\right\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján minden $N < n$ természetes számra $d(a_n, x) < \varepsilon$ teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az a sorozat konvergens.

13.116. Tétel. *Legyen $(M_i, d_i)_{i \in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, (M', d') metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : M' \to M_i$ függvény folytonos az a pontban.*
2. *Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(M_i, d_i)_{i \in I}$ metrikus terek véges rendszere, (M, d) ezek szorzata, (M', d') metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy f folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $i \in I$ tetszőleges index. Ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f$ pontra $d'(x, a) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ teljesül. A szorzatmetrika értelmezése alapján ekkor

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \; d'(x, a) < \delta \; \to d((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), (\mathrm{pr}_i \circ f)(a)) < \varepsilon$$

teljesül, vagyis a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az a pontban.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, a$ pontra

$$d'(a, x) < \delta_i \quad \to \quad d_i((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), \mathrm{pr}_i(f(a))) < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \min\left\{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\right\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján $x \in \mathrm{Dom}\, a$ pontra $d'(a, x) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, tehát az f függvény folytonos az a pontban.
A 2. pont egyszerűen adódik az 1. pont minden $a \in \mathrm{Dom}\, f$ elemre való alkalmazásából.

13.117. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. Ekkor a K halmaz kompakt az M metrikus térben.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és (M, d) ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$.
Az $n = 1$ esetben nyilvánvaló az állítás.
A teljes indukció módszerét használva tegyük fel, hogy az $(n-1) \in \mathbb{N}^+$ számra igaz az állítás. Ehhez legyen (E, d_E) az $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ terek szorzata és $K_E = \prod_{i=1}^{n-1} K_i$. Ekkor $K = K_E \times K_n$.
Legyen $c : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Ekkor $\mathrm{pr}_1 \circ c : \mathbb{N} \to K_E$ sorozat az (E, d_E) metrikus térben, vagyis a teljes indukciós feltevés miatt $\mathrm{pr}_1 \circ c$ kompakt halmazban haladó sorozat, ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján létezik konvergens részsorozata, melynek a határértéke benne van a K_E halmazban; vagyis létezik olyan $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_1 \circ c) \circ \sigma_1$ konvergens és határértéke eleme a K_E halmaznak. A $\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) : \mathbb{N} \to K_n$ sorozat is kompakt halmazban halad, ezért ennek is létezik konvergens részsorozata, vagyis létezik olyan $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1)) \circ \sigma_2$ konvergens és $\lim(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) \circ \sigma_2) \in K_n$. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozat olyan, hogy a $c \circ \sigma$ sorozat első és második komponense is konvergens, ami a d metrika értelmezése alapján azt jelenti, hogy a $c \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ sorozat konvergens és a határértéke nyilvánvaló módon benne van a K halmazban.
Tehát a K halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a K halmaznak, ezért a 13.49 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján a K halmaz kompakt.

13.19. Baire-féle kategóriatétel

13.118. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz

- *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{X} = \emptyset$;
- *első kategóriájú*, ha X előállítható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

13.119. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér.*

1. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $M \setminus \overline{X}$ halmaz sűrű.*
2. *Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.*
3. *Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér.
1. Legyen $X \subseteq M$. Mivel $\operatorname{Int} \overline{X} = M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}}$, ezért ha X sehol sem sűrű, akkor $M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}} = \emptyset$, vagyis $\overline{M \setminus \overline{X}} = M$, azaz $M \setminus \overline{X}$ sűrű. Ha $M \setminus \overline{X}$ sűrű, akkor $\overline{M \setminus \overline{X}} = M$, amiből $M \setminus \overline{M \setminus \overline{X}} = \emptyset$ adódik, vagyis X sehol sem sűrű.
2. Legyen $X, Y \subseteq M$ sehol sem sűrű halmaz. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $M \setminus \overline{X}$ sűrű, ezért létezik $y \in B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big) \neq \emptyset$ elem. A $B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big)$ halmaz nyílt, hiszen két nyílt halmaz metszete, ezért létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(y) \subseteq B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big)$. Mivel $M \setminus \overline{Y}$ sűrű, ezért létezik $z \in B_\rho(y) \cap \big(M \setminus \overline{Y}\big) \neq \emptyset$ elem. Ekkor

$$z \in B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big) \cap \big(M \setminus \overline{Y}\big) \subseteq B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X} \cup \overline{Y}\big)\big) = B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big).$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big) \neq \emptyset$, ezért a $\big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big)$ halmaz sűrű, tehát $X \cup Y$ sehol sem sűrű. Mivel két sehol sem sűrű halmaz uniója is sehol sem sűrű, így teljes indukcióval adódik az állítás véges sok sehol sem sűrű halmazra.
3. Tegyük fel, hogy X első kategóriájú. Ekkor létezik olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq M$, $\operatorname{Int} \overline{F_n} = \emptyset$ és $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ekkor $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ az M sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül. Fordítva, ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az M sehol sem

sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül, akkor az $(F_n \cap X)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén sehol sem sűrű halmazok rendszere és $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap X)$.

13.120. Tétel. *(Baire-féle kategóriatétel.) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $U \subseteq M$ nem üres, nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $Z_n \subseteq M$ sehol sem sűrű zárt halmaz és tegyük fel, hogy $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ teljesül. Ekkor az alábbi iterációval definiáljunk az $a : \mathbb{N} \to M$ és $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ sorozatot.

- Az $U \setminus Z_0$ halmaz nyílt és nem üres, ugyanis ha üres lenne, akkor $U \subseteq Z_0$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} U \subseteq \operatorname{Int} Z_0 = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_0 \in U \setminus Z_0$ és ehhez létezik olyan $r_0 \in \mathbb{R}^+$, melyre
$$\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U \setminus Z_0$$
teljesül.
- Ha a_n és r_n már definiált, akkor tekintsük a
$$B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$
halmazt. Ez a halmaz nyilván nyílt és nem üres, ugyanis $\bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója, ezért sehol sem sűrű, vagyis $\operatorname{Int} \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$. Ha a fenti halmaz üres lenne, akkor $B_{r_n}(a_n) \subset \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} B_{r_n}(a_n) \subseteq \operatorname{Int} \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ és ehhez létezik olyan $r_{n+1} \in \left]0, \frac{r_n}{2}\right[$, melyre
$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$
teljesül.

Ekkor a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő $r_n \leq \frac{r_0}{2^n}$ egyenlőtlenség miatt $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Az $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n)$ tartalmazás miatt $d(a_n, a_{n+1}) < r_n$, vagyis ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor
$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} r_k \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{r_0}{2^k} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r_0}{2^k} = \frac{2r_0}{2^n},$$
amiből, következik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Az $\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ tartalmazás miatt ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor $\overline{B_{r_m}(a_m)} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$, amiből $a_m \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ következik. Tehát a $k \mapsto a_{n+k}$ sorozat részsorozata az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, tehát konvergens és mivel minden eleme a $\overline{B_{r_n}(a_n)}$ zárt halmazban van, ezért $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$.
A $\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U$ miatt $x \in U$, továbbá a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő
$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$$
tartalmazás miatt $x \notin \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$. Tehát az $x \in U \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z_k$ ellentmondást kaptuk.

14. Normált terek

14.1. Normált terek topológiája

14.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in V: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

14.2. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \, ,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm (\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \, ,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

14.3. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

Bizonyítás. A norma definíciójából rögtön adódnak a metrikára megkövetelt tulajdonságok.

14.4. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb*

$$B_r(x) = \{y \in V | \ \|x - y\| < r\} \, .$$

2. *Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.*
3. *Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.*
4. *Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. A normált téren bevezetett metrika definíciója alapján nyilvánvaló.

14.5. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \, | \ k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának, illetve sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .\end{aligned}$$

14.2. Sorok és sorozatok normált terekben

14.6. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a+b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
3. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
4. *Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, a $B = \lim b$ és a $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$|\|a_n\| - \|A\|| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

14.7. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

14.8. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat.

– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az a *sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.

– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.

– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.

– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

14.9. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük A. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

14.10. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.*

1. *Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.*
2. *Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

Bizonyítás. 1. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \right\| \le \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| ,$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

14.11. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. A $(V, \|\cdot\|)$ pár pontosan akkor Banach-tér, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. A 14.10 tétel alapján minden abszolút konvergens sor konvergens Banach-térben. Ezért csak azt kell igazolnunk, hogy ha a $(V, \|\cdot\|)$ normált térben minden abszolút konvergens sor konvergens, akkor $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér.
Ehhez legyen $(V, \|\cdot\|)$ olyan normált tér, melyben minden abszolút konvergens sor konvergens. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges Cauchy-sorozat és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$ sorozat ilyen.)
Az $n = 0$ esetben létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_0 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_0$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma_0 = N_0 + 1$.
Az $n = 1$ esetben létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_1$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma(1) = \max\{\sigma_0, N_1\} + 1$.
Ha már valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra σ_n definiált, akkor vegyük azt az $N_{n+1} \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, melyre minden $N_{n+1} < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_{n+1}$ teljesül és legyen

$$\sigma(n+1) = \max\{\sigma_n, N_{n+1}\} + 1.$$

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján így előállíthatunk egy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatot, mely a konstrukció folytán indexsorozat.
Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to V \qquad n \mapsto (a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)$$

sorozatot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n < \sigma_n, \sigma_{n+1}$, ezért

$$\|b_n\| = \|(a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)\| < \alpha_n,$$

továbbá

$$\sum_{k=0}^{n} \|b_k\| < \sum_{k=0}^{n} \alpha_k < \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

Tehát a b sorozatból képzett sor abszolút konvergens, ezért konvergens is. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ((a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \left(a_{\sigma_0} - a_{\sigma_{n+1}}\right) = a_{\sigma_0} - \lim_{n\to\infty} a_{\sigma_n}$$

egyenlőség alapján az a Cauchy-sorozatnak létezik konvergens részsorozata, ezért a 13.36 tétel alapján konvergens.

14.3. Normák ekvivalenciája

14.12. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K\,\|x\|'$.*

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.
$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.
$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in V$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in V$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \dfrac{R}{2\,\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \dfrac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \dfrac{R}{2\,\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$,

amiből $\|z\| \le \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \le \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\| \le K \|x\|'$.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq V$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \le K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

14.13. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \le K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \le \|x\|' \le \beta \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

14.4. Folytonos lineáris leképezések

14.14. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. *Az A leképezés egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés.
$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos, akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - 0\|_1 < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_2 < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V_1$ olyan vektor, melyre $\|x\|_1 \le 1$ teljesül, akkor $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\|_1 < \delta$, ezért $\left\|A\left(\frac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_2 < 1$, vagyis $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$. Tehát minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \le 1$ esetén $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$, ezért

$$\sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 \le \frac{2}{\delta} < \infty.$$

$3 \Rightarrow 4$ Legyen $K = \sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2$, valamint legyen $z \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméterek. Megmutatjuk, hogy ha $\delta = \frac{\varepsilon}{K+1}$ és a $z \in V$ vektorra $\|y - z\|_1 < \delta$ teljesül, akkor $\|Ay - Az\|_2 < \varepsilon$. Ez az alábbiakból következik $y \ne z$ esetén.

$$\|Ay - Az\|_2 = \|A(y - z)\|_2 = \|y - z\|_1 \cdot \left\|A\left(\frac{y - z}{\|y - z\|_1}\right)\right\|_2 \le \|y - z\|_1 \cdot K \le \delta \cdot K = \varepsilon \cdot \frac{K}{K+1} < \varepsilon$$

Ezek alapján az A leképezés egyenletesen folytonos.
$4 \Rightarrow 1$ Minden egyenletesen folytonos leképezés folytonos.

Jelölés. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. A $V_1 \to V_2$ folytonos lineáris leképezések halmazára a továbbiakban a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ jelölést fogjuk használni.

14.15. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \to \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \stackrel{\triangle}{=} \mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V *normált tér topologikus duálisának* nevezzük.

14.16. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 14.14 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|(A+B)x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax + Bx\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \\
&\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 + \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Bx\|_2 = \|A\| + \|B\| ; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A+B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 14.14 tétel alapján $A+B, \lambda A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$, vagyis $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ vektortér. Továbbá a fenti egyenletek igazolják az $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ és a $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ egyenleteket.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V_1$ vektorra $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|_1} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

14.17. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 .$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $\|Ax'\|_2 \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

14.18. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathscr{L}(V_1, V_3)$, továbbá*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Mivel minden $x \in V_1$ vektor esetén

$$\|BAx\|_3 \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1 ,$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|BAx\|_3 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1) = \|B\| \cdot \|A\| .$$

Mivel $\|BA\| < \infty$, ezért BA folytonos lineáris leképezés.

14.19. Tétel. *Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az*

$$\begin{aligned}
M_c &: V \to V \qquad x \mapsto cx, \\
L_z &: V \to V \qquad x \mapsto z + x
\end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált rér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $M_c : V \to V$, $M_c(x) = cx$ leképezés lineáris bijekció, melyre

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|M_c x\| \le |c| \sup_{\|x\| \le 1} \|x\| = |c|$$

és hasonlóan

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|M_{c^{-1}} x\| \le |c|^{-1}$$

teljesül, ezért a 14.14 tétel alapján M_c és M_c^{-1} is folytonos.
Tekintsük az $L_z : V \to V$, $L_z(x) = z + x$ leképezést, mely nyilván bijekció. Elég megmutatni, hogy minden $z \in V$ esetén L_z folytonos, ugyanis minden $z \in V$ elemre $L_z^{-1} = L_{-z}$ teljesül. Az L_z leképezés folytonos bármely $x_0 \in V$ pontban, hiszen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in V : \qquad \|x - x_0\| < \varepsilon \quad \to \quad \|L_z(x) - L_z(x_0)\| = \|x - x_0\| < \varepsilon$$

teljesül.

14.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai

14.20. Tétel. *Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(V_1, V_2)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\| \le \|x\| \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\| \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a V_2 teljes térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V_1$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V_1 \to V_2 \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy A lineáris leképezés. Legyen $x, y \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor az

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (a_n(x) + a_n(y)) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) + \lim_{n\to\infty} a_n(y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n(x)) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lambda \cdot Ax$$

egyenlőségek igazolják A linearitását.
Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \le 1$ vektorra

$$\|a_n x\|_2 \le \|a_n\|_1 \cdot \|x\| < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \left\| \lim_{n\to\infty} a_n(x) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \le \sup_{\|x\|_1 \le 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \le$$
$$\le \sup_{\|x\|_1 \le 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_1 \le \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \le K$$

következik, ami a 14.14 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos lineáris leképezés. Vagyis $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$.
Azt kell még igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ normált térben. Ennek igazolásához

legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a

$$\sup_{\|x\|_1 \le 1} \|a_n x - a_m x\|_2 \le \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|a_n - a_m\| \cdot \|x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségen végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet

$$\|A - a_m\| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

14.21. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint tegyük fel, hogy V_1 véges dimenziós. Legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ egy bázisa a V_1 vektortérnek és a V_1 téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1' : V_1 \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|_1' = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

normát. Legyen továbbá $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Definiáljuk a $K = \max\{\|Ae_i\|_2 \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot Ae_i \right\|_2 \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_2 \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K = K \cdot \|x\|_1',$$

vagyis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1' \le 1} \|Ax\|_2 \le \sup_{\|x\|_1' \le 1} \left(K \cdot \|x\|_1'\right) = K < \infty,$$

ezért A folytonos a $(V_1, \|\cdot\|_1')$ téren. Mivel V_1 véges dimenziós, ezért a 14.25 tétel alapján a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_1'$ normák ekvivalensek egymással ezért A a $(V_1, \|\cdot\|_1)$ téren is folytonos.

14.22. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \to V$ identitásfüggvényt.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \le \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^n A^k = \left(\sum_{k=0}^n A^k \right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) \cdot (1 - A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

14.23. Tétel. *Legyen U és V Banach-tér és legyen*

$$G(\mathscr{L}(U,V)) \stackrel{\triangle}{=} \{a \in \mathscr{L}(U,V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V,U) :\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\}.$$

(Vagyis $G(\mathscr{L}(U,V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. *minden $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathscr{L}(U,V))$;*
2. *a $G(\mathscr{L}(V,V))$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : G(\mathscr{L}(U,V)) \to G(\mathscr{L}(V,U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen U és V Banach-tér és legyen

$$G(\mathscr{L}(U,V)) \stackrel{\triangle}{=} \{a \in \mathscr{L}(U,V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V,U) :\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\}.$$

1. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\left\|\mathrm{id}_V - ba^{-1}\right\| = \left\|(a-b)a^{-1}\right\| \leq \|a - b\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $\mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in G(\mathscr{L}(V,V))$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a, balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in G(\mathscr{L}(U,V))$.
2. Mivel a $G(\mathscr{L}(U,V))$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathscr{L}(U,V)$ elemre

$$\|a - x\| < \delta \quad \to \quad x \in G(\mathscr{L}(U,V)) \ \wedge\ \left\|a^{-1} - x^{-1}\right\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\left\|a^{-1}\right\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in G(\mathscr{L}(U,V))$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\begin{aligned}
&\left((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}\right) \cdot ((x-a) + a) = \mathrm{id}_U \\
&(x^{-1} - a^{-1})(x-a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x-a) = 0 \\
&(x^{-1} - a^{-1})a = -a^{-1}(x-a) - (x^{-1} - a^{-1})(x-a) \\
&x^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}(x-a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x-a)a^{-1} \\
&\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \leq \left\|a^{-1}\right\|^2 \cdot \|x-a\| + \left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \cdot \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| \\
&\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \left(1 - \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\|\right) \leq \left\|a^{-1}\right\|^2 \cdot \|x-a\| \\
&\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1 - \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\|} \cdot \|x-a\| < \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x-a\|
\end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x - a\| < \delta_1 \quad \to \quad \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|a^{-1}\right\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| < \varepsilon$$

teljesül.

14.6. Véges dimenziós normált terek

14.24. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést.

1. *A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.*
2. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.*
3. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és legyen $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ ennek egy bázisa. Ekkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris bijekció és az inverze is lineáris.
1. Mivel

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

norma a $\mathbb{K}^n$ téren, ahol a 10.80 tétel alapján bármely két norma ekvivalens, ezért léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\|' = \|\varphi(x)\| \le \alpha \|x\|_\infty \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \le \beta \|x\|' = \beta \|\varphi(x)\| . \tag{14.1}$$

Az első egyenlőtlenségből

$$\sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|\varphi(x)\| \le \alpha < \infty$$

adódik, vagyis φ folytonos. A második egyenletbe minden $y \in V$ esetén az $x = \varphi^{-1}(y)$ elemet írva

$$\left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \le \beta \|y\|$$

adódik, vagyis

$$\sup_{\|y\| \le 1} \left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \le \beta < \infty$$

teljesül, tehát φ^{-1} is folytonos.
2. Legyen $U \subseteq V$. Ha U nyílt, akkor a φ leképezés folytonossága miatt a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ha az $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt, akkor a φ^{-1} leképezés folytonossága miatt a $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1}(U') = \varphi(U') \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ezt alkalmazva az $U' = \varphi^{-1}(U)$ halmazra azt kapjuk, hogy ha $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt, akkor $U \subseteq V$ is nyílt.
3. Ha $U \subseteq V$ korlátos halmaz, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi^{-1}(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi^{-1}(U)$, akkor $\|\varphi(x)\| < r$ és a (14.1) egyenlet alapján

$$\|x\|_\infty \le \beta \|\varphi(x)\| < \beta r,$$

vagyis az $R = \beta r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.
Ha az $U \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi(U)$, akkor $\left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < r$ és a (14.1) egyenlet alapján

$$\|x\| = \left\|\varphi(\varphi^{-1}(x))\right\| \le \alpha \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < \alpha r,$$

vagyis az $R = \alpha r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

14.25. Tétel. *Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést, mely a 14.24 tétel értelmében homeomorfizmus, a V téren értelmezett normától függetlenül.
Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$ nyílt halmaz a $\|\cdot\|$ norma szerint. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|)$ terek között, ezért $\varphi^{-1}(U)$ nyílt a $\mathbb{K}^n$ térben. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|')$ terek között is, ezért $\varphi\left(\varphi^{-1}(U)\right) = U$ nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben.
Ezután a $\|\cdot\|'$ és a $\|\cdot\|$ norma felcserélésével kapjuk az állítást.

14.26. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor*

1. *a V tér teljes;*
2. *a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést, mely a 14.24 tétel értelmében homeomorfizmus.
1. A

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

leképezés norma a $\mathbb{K}^n$ téren. A véges dimenziós $\mathbb{K}^n$ téren $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalens normák, ezért a 14.13 tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\alpha \|x\|' \leq \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|' .$$

teljesül. Tehát minden $z \in V$ esetén a fenti egyenlőtlenséget alkalmazva az $x = \varphi^{-1}(z)$ vektorra

$$\alpha \|z\| \leq \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|_\infty \leq \beta \|z\|$$

adódik. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ Cauchy-sorozat. Mivel minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\varphi^{-1}(a_n) - \varphi^{-1}(a_m)\right\|_\infty = \left\|\varphi^{-1}(a_n - a_m)\right\|_\infty \leq \beta \|a_n - a_m\| ,$$

ezért az $n \mapsto b_n = \varphi^{-1}(a_n)$ sorozat Cauchy-sorozat a teljes $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, tehát a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Legyen $A' = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ és $A = \varphi(A')$. A minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\|a_n - A\| \leq \frac{1}{\alpha} \left\|\varphi^{-1}(a_n - A)\right\|_\infty = \frac{1}{\alpha} \|b_n - A'\|_\infty$$

egyenlőtlenség alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
2. Legyen $K \subseteq V$ korlátos és zárt halmaz. Ekkor a 14.24 tétel alapján a $\varphi^{-1}(K)$ halmaz korlátos és zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, vagyis a 10.51 tétel Heine–Borel-tétel alapján $\varphi^{-1}(K)$ kompakt. Azonban a $\varphi^{-1}(K)$ kompakt halmaznak az f folytonos függvény általi képe kompakt, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$ kompakt halmaz.
Ha $K \subseteq V$ kompakt halmaz, akkor a 13.41 tétel alapján korlátos, és zárt.

14.27. Tétel. *Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $L \subseteq V$ ennek véges dimenziós altere. Ekkor $(L, \|\cdot\| |_L)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző 14.26 tétel alapján teljes.

14.28. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *A V vektortér véges dimenziós.*
2. *A V valamely nem nulla sugarú zárt gömbje kompakt.*
3. *A V lokálisan kompakt tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
$1 \Rightarrow 2$ A 14.26 tétel alapján a minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $\overline{B_r(x)}$ halmaz kompakt, hiszen korlátos és zárt.
$2 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre az $\overline{B_r(x)}$ gömb kompakt és legyen $z \in V$ tetszőleges. Mivel a 14.19 tétel alapján a

$$L_{z-x} : V \to V \qquad y \mapsto z - x + y$$

leképezés homeomorfizmus és

$$L_{z-x}\left(\overline{B_r(x)}\right) = \overline{B_r(z)}$$

teljesül, ezért a $\overline{B_r(z)}$ halmaz is kompakt. Tehát a z pontnak létezik kompakt környezete.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \subseteq V$ a nullának egy kompakt környezete, ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq K$ teljesül. Tekintsük a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r}{2}}(x)$$

nyílt befedést. Mivel K kompakt, ezért létezik olyan véges $H \subseteq K$, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{r}{2}}(x) \tag{14.2}$$

is teljesül. Legyen $W = \operatorname{Span}\{x \in H\}$, vagyis W jelöli a H halmazban lévő vektorok lineáris burkát, mely véges dimenziós altér a V vektortérben, ezért a 14.27 tétel miatt W zárt lineáris altere a V normált térnek.
A (14.2) tartalmazást a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} x + \frac{1}{2}B_r(0) \subseteq W + \frac{1}{2}B_r(0)$$

alakban is felírhatjuk, amiből a $G = B_r(0)$ jelöléssel

$$G \subseteq W + \frac{1}{2}G$$

adódik. Ebből teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ számra $G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G$ következik, hiszen az $n = 0$ esetben nyilvánvaló, az $n = 1$ esetben pedig az imént bizonyítottuk és ha az n számra igaz az állítás, akkor

$$G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \subseteq W + \frac{1}{2^n}\left(W + \frac{1}{2}G\right) = W + \frac{1}{2^{n+1}}G,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\frac{1}{2}W = W$ és $W + W = W$.
Igazoljuk, hogy $G \subseteq W$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in G \setminus W$ elem. Ekkor a W halmaz zártsága és $x \notin \overline{W}$ miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, $R < \|x\|$, hogy $B_R(x) \cap W = \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \quad \to \quad x \in \frac{1}{2^n}G,$$

amiből az $x = 0$ ellentmondás következik.
Mivel W lineáris altér, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra $nW = W$, valamint

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nG \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W = W$$

miatt $V \subseteq W$. A $W \subseteq V$ tartalmazás pedig nyilvánvaló. Tehát $V = W$, azaz V véges dimenziós.

14.7. Elpé terek

14.29. Definíció. Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\}$$

halmazt, valamint $p = \infty$ esetén az

$$l_{\mathbb{K}}^p \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n| < \infty \right\}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex* l^p (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

14.30. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l_{\mathbb{K}}^p$ vektortér, a*

$$\|\cdot\|_p : l_{\mathbb{K}}^p \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l_{\mathbb{K}}^p$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l_{\mathbb{K}}^p, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

Bizonyítás. Legyen $p \in [1, \infty[$, $x, y \in l_{\mathbb{K}}^p$ és $c \in \mathbb{K}$. Megmutatjuk, hogy $x + y \in l_{\mathbb{K}}^p$ és $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. A 7.29 Minkowski-egyenlőtlenség alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p},$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p} \right)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right)^p < \infty.$$

Tehát a $\sum_n |x_n + y_n|^p$ sor konvergens, amiből $x + y \in l_{\mathbb{K}}^p$ következik, továbbá $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ is teljesül. Minden $c \in \mathbb{K}$ és $x \in l_{\mathbb{K}}^p$ esetén $\|cx\|_p = |c| \cdot \|x\|_p$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $cx \in l_{\mathbb{K}}^p$, tehát $l_{\mathbb{K}}^p$ vektortér. A normára vonatkozó

$$\|x\|_p = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad x = 0$$

követelmény szintén a definíció közvetlen következménye.

14.8. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben

14.31. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a*

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \ldots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a*

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\} \left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]} \right)$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0,1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma \left(\frac{k+t}{n} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Legyen $x_0, x_1 \in V$ olyan, hogy $x_0 \neq x_1$ és legyen

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0).$$

Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ehhez definiáljuk a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$ paramétert. Ha $t \in [0,1]$ olyan, melyre $|t - t_0| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|\gamma_{x_0,x_1}(t) - \gamma_{x_0,x_1}(t_0)\| = \|(t-t_0)(x_1 - x_0)\| = |t - t_0| \cdot \|x_1 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \|x_1 - x_0\| = \varepsilon.$$

Vagyis γ folytonos a t_0 pontban és így minden pontban is folytonos. Ha $x_0 = x_1$, akkor a γ függvény nyilván folytonos.
2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \ldots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right)$$

függvényt. Legyen $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t \in [0,1[$ tetszőleges. Ekkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+t]} + \{k+t\}\left(x_{[k+t]+1} - x_{[k+t]}\right) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) = \gamma_{x_k,x_{k+1}}(t).$$

Ha $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t = 1$, akkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+1]} + \{k+1\}\left(x_{[k+1]+1} - x_{[k+1]}\right) = x_{k+1} = \gamma_{x_k,x_{k+1}}(1).$$

Tehát minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t \in [0,1]$ számra

$$\gamma_{x_k,x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.
Megmutatjuk, hogy a γ függvény folytonos. Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és ehhez definiáljuk a

$$\delta_1 = \frac{1}{n} \cdot \min\left\{\frac{\varepsilon}{\|x_{k+1} - x_k\|} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$$

számot.
Ha $nt_0 \notin \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\delta_2 = \min\left\{\left|t_0 - \frac{k}{n}\right| \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$$

és legyen $\delta = \dfrac{1}{2} \cdot \min\{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = [nt_0]$ és $k_2 = k_1 + 1$. Ekkor nyilván $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n\}$
Ha $t \in [0,1]$ olyan, hogy $|t - t_0| < \delta$, akkor az

$$\frac{k_1}{n} = t_0 - \left|t_0 - \frac{k_1}{n}\right| \leq t_0 - \frac{\delta_2}{2} < t < t_0 + \frac{\delta_2}{2} \leq t_0 + \left|t_0 - \frac{k_2}{n}\right| = \frac{k_2}{n}$$

egyenlőtlenség alapján

$$k_1 < nt < k_2,$$

vagyis $[nt] = [nt_0] = k_1$, továbbá az

$$nt = [nt] + \{nt\}$$
$$nt_0 = [nt_0] + \{nt_0\}$$

egyenlőségekből

$$\{nt\} - \{nt_0\} = n(t - t_0)$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|\{nt\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)-\{nt_0\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)\| = \\ &= |\{nt\}-\{nt_0\}|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = n\cdot|t-t_0|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\delta_1\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| \le n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_2}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \varepsilon,\end{aligned}$$

ami mutatja a γ függvény t_0 pontbeli folytonosságát.
Ha $nt_0 \in \mathbb{N}$, akkor legyen $\delta_2 = \frac{1}{n}$ és $\delta = \frac{1}{2}\cdot\min\{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = nt_0$, $k_2 = k_1+1$ és $k_0 = k_1-1$.
Ha $t \in]t_0, t_0+\delta[\cap[0,1]$, akkor

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|x_{k_1}+\{nt\}\left(x_{k_2}-x_{k_1}\right)-x_{k_1}\| = \\ &= |\{nt\}|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_2}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_2}-x_{k_1}\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha $t \in]t_0-\delta, t_0[\cap[0,1]$, akkor az $nt = [nt]+\{nt\} = k_1-1+\{nt\}$ egyenletből

$$1-\{nt\} = k_1-nt = nt_0-nt$$

adódik, amit alapján

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| &= \left\|x_{[nt]}+\{nt\}\left(x_{[nt]+1}-x_{[nt]}\right)-x_{[nt_0]}-\{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1}-x_{[nt_0]}\right)\right\| = \\ &= \|x_{k_0}+\{nt\}\left(x_{k_1}-x_{k_0}\right)-x_{k_1}\| = \\ &= |1-\{nt\}|\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| = \\ &= |n(t-t_0)|\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| < \\ &< n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{\|x_{k_0}-x_{k_1}\|}\cdot\|x_{k_0}-x_{k_1}\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tehát minden $t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[\cap[0,1]$ esetén

$$\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis a γ függvény folytonos a t_0 pontban.

14.32. Tétel. *Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq V$ konvex halmaz és legyen $x, y \in A$ tetszőleges két pont. Ha $x = y$, akkor a $\gamma : [0,1] \to V$, $\gamma(t) = x$ függvény nyilván folytonos. Ha $x \neq y$, akkor az előző 14.31 tétel alapján a

$$\gamma : [0,1] \to A \qquad t \mapsto x + t(y-x)$$

függvény folytonos és nyilvánvaló módon teljesül rá $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$, vagyis γ összeköti az x és az y pontot.

14.33. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A V halmaz ívszerűen összefüggő.*
2. *A V halmaz összefüggő.*
3. *Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Mivel V konvex halmaz, ezért a 14.32 tétel alapján ívszerűen összefüggő.
2. Mivel V ívszerűen összefüggő, ezért a 13.107 tétel alapján összefüggő.
3. A 13.110 tétel következménye.

14.34. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Legyen $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül. Tegyük fel, hogy $A \setminus B \neq \emptyset$. Definiáljuk az $U = B$ és $V = A \setminus B$ halmazokat. Ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ és

$$\overline{U} \cap V = \overline{B} \cap (A \setminus B) = \overline{B} \cap (A \setminus (\overline{B} \cap A)) = \overline{B} \cap (A \setminus \overline{B}) = \emptyset$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$, legyen $z \in U \cap \overline{V}$. Ekkor $z \in U = B$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq B$. Továbbá $z \in \overline{V} = \overline{A \setminus B}$ miatt létezik olyan $x \in A \setminus B$, melyre $\|x - z\| < r$ teljesül. Ebben az esetben $x \in A$, $x \notin B$, azonban $x \in B_r(z)$ miatt $x \in B$. Tehát téves volt az $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$ feltételezés, vagyis $U \cap \overline{V} = \emptyset$.
Ebből az az ellentmondás adódik, hogy az A halmaz nem összefüggő, vagyis az $A \setminus B \neq \emptyset$ feltételezés nem tartható, így $A \setminus B = \emptyset$, amiből $B \subseteq A$ miatt $B = A$ adódik.

14.35. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő.*
2. *Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.*
3. *Az A halmaz ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz.
1⇒2 Legyen $c \in A$ egy rögzített pont. Legyen

$$A_c = \left\{ y \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}^+, \exists z_0, \ldots, z_n \in A : \; z_0 = c, \; z_n = y, \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \end{array} \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A_c halmaz nyílt. Ha $x \in A_c$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A : \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A.$$

Továbbá $x \in A$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$. Ha $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, akkor $[x, y] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, vagyis ha $z_{n+1} = y$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$

teljesül, vagyis $y \in A_c$. Tehát $B_r(x) \subseteq A_c$ is teljesül, vagyis A_c nyílt halmaz.
Most igazoljuk, hogy $\overline{A_c} \cap A = A_c$. Mivel $A_c \subseteq \overline{A_c} \cap A$ nyilvánvalóan teljesül, ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{A_c} \cap A \subseteq A_c$. Legyen $x \in \overline{A_c} \cap A$. Ekkor $x \in A$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$ teljesül. Mivel $x \in \overline{A_c}$, ezért létezik olyan $y \in A_c$, melyre $\|x - y\| < \frac{r}{2}$ teljesül. Ekkor $y \in B_r(x)$, vagyis $[y, x] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, valamint $y \in A_c$, miatt létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A : \; z_0 = c, \; z_n = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A.$$

Ha $z_{n+1} = x$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$

teljesül, vagyis $x \in A_c$.
Ezek alapján $A_c \subseteq A$ olyan nyílt részhalmaza az A összefüggő halmaznak, melyre $\overline{A_c} \cap A = A_c$ teljesül, vagyis az előző 14.34 tétel alapján $A_c = A$.
Most legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ekkor $x, y \in A_c$, vagyis

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \exists z_0, \ldots, z_n \in A : \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} : \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A$$
$$\exists m \in \mathbb{N}^+ \exists v_0, \ldots, v_m \in A : \; v_0 = c, \; v_m = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, m-1\} : \; v_k \neq v_{k+1}, \; [v_k, v_{k+1}] \in A.$$

Legyen $l = n + m$ és minden $k \in \{0, \ldots, l\}$ esetén legyen

$$u_k = \begin{cases} z_{n-k}, & \text{ha} \quad k \leq n; \\ v_{k-n}, & \text{ha} \quad k > n. \end{cases}$$

Ekkor

$$u_0 = x, \; u_l = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, l-1\} : \; u_k \neq u_{k+1}, \; [u_k, u_{k+1}] \in A.$$

2⇒3 Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ehhez létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $z_k \neq z_{k+1}$ és $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. A 14.31 tétel alapján ekkor létezik olyan folytonos $\gamma : [0, 1] \to A$ görbe, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
3⇒1 Ha A ívszerűen összefüggő, akkor a 13.107 tétel alapján összefüggő.

14.9. Normált terek szorzata

14.36. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^{n} V_k$ halmazon értelmezzük a*

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\left\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\right\}$$

$$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. *A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.*
2. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.*
3. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.*

Bizonyítás. A bizonyítása teljesen analóg a 14.30 tétel bizonyításával.

14.37. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\left\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

A $\left(\prod_{k=1}^{n} V_k, \|\cdot\|\right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1,\ldots,n}$ *normált terek szorzatának.*

14.10. Normált terek teljes burka

14.38. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \to V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathcal{V}$ az $\mathbb{N} \to V$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{V} = \left\{a : \mathbb{N} \to V \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (N < n, m \;\to\; \|a_n - a_m\| < \varepsilon)\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $a \in \mathcal{V}$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|$ határérték. Válaszunk $a \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemet. Mivel minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\|a_n\| - \|a_m\|| \leq \|a_n - a_m\|$$

teljesül, ezért az $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Definiáljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{V}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim = \left\{(a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \lim_{n\to\infty} \|b_n\|\right\}$$

A $\sim$ reláció nyilván ekvivalenciareláció.
Legyen $V' = \mathcal{V}/\sim$ és

$$\|\cdot\|' : V' \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (a') \mapsto \sup_{a\in a'} \lim_{n\to\infty} \|a_n\|$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen.
Ha $a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$ és $b^{(1)} \sim b^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\left(a_n^{(1)} + b_n^{(1)}\right) - \left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)}\right)\right\| \le \left\|a_n^{(1)} - a_n^{(2)}\right\| + \left\|b_n^{(1)} - b_n^{(2)}\right\|$$

teljesül, ezért $a^{(1)} + b^{(1)} \sim a^{(2)} + b^{(2)}$. Vagyis értelmezhető az összeadás művelet az ekvivalencia osztályokon is, melyet szintén a $+$ szimbólummal fogunk jelölni.
Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathcal{V}$ olyan elemek, hogy $a^{(1)} \sim a^{(2)}$, akkor mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\lambda a_n^{(1)} - \lambda a^{(2)}\right\| \le |\lambda| \cdot \left\|a_n^{(1)} - a_n^{(2)}\right\|$$

teljesül, ezért $\lambda a^{(1)} \sim \lambda a^{(2)}$. Vagyis értelmezhető a számmal való szorzás művelet az ekvivalencia osztályokon, melyet szintén nem írunk ki. Ezek alapján egyszerűen megmutatható, hogy $(V', \|\cdot\|')$ normált tér.
Minden $x \in V$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans x sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x}/\sim$, valamint

$$j : V \to V' \qquad x \mapsto x'.$$

Ekkor j lineáris izometria. A $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ egyenlőség és a $(V', \|\cdot\|')$ normált tér teljessége a metrikus tér teljes burkának konstrukciójából (13.102 tétel) adódik.

14.39. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $(V', \|\cdot\|')$ Banach-teret és $j : V \to V'$ lineáris izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül, az $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér teljes burkának* nevezzük.

14.40. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|\,|_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\operatorname{Dom} A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\|\,|_X)$ normált téren.
1. Ha $A_1', A_2' : U \to V$ olyan folytonos függvény, melyre $A_1'|_X = A_2'|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján (13.74 tétel) $A_1' = A_2'$. Tehát, ha létezik folytonos kiterjesztése az A operátornak, akkor az egyértelmű.
2. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel A egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$ pontra $\|y_1 - y_2\| < \delta$ esetén $\|Ay_1 - Ay_2\|_V < \varepsilon$ teljesül. Mivel az a sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $\|Aa_n - Aa_m\|_V < \varepsilon$. Mivel a $(V, \|\cdot\|_V)$ tér teljes, ezért az $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergens.
3. Legyen $x \in \overline{X}$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Fésüljük össze az a és b sorozatot az alábbi módon.

$$c : \mathbb{N} \to X \qquad n \mapsto \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\lim c = x$, továbbá az előző pont miatt létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} Ac_n$ határérték. Mivel $(Aa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(Ab_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata az $(Ac_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, ezért

$$\lim_{n\to\infty} Ac_n = \lim_{n\to\infty} Ab_n = \lim_{n\to\infty} Aa_n.$$

4. Ezek után definiálhatjuk úgy az A' függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül és legyen $A'x = \lim_{n\to\infty} Aa_n$. Vagy másképp leírva

$$A' = \left\{(x, y) \in \overline{X} \times V | \ \exists a : \mathbb{N} \to X : \ \lim a = x \ \wedge \ y = \lim_{n\to\infty} Aa_n\right\}.$$

Ekkor nyilván $A \subseteq A'$. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in \overline{X}$, valamint $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor az

$$\begin{aligned} A'(x + y) &= \lim_{n\to\infty} (A(a_n + b_n)) = \lim_{n\to\infty} (Aa_n) + \lim_{n\to\infty} (Ab_n) = A'x + A'y \\ A'(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} A(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} Aa_n = \lambda A'x \end{aligned}$$

egyenletek alapján A' lineáris.
5. Legyen $x \in \overline{X}$, $\|x\| \le 1$ tetszőleges vektor és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Ekkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\|a_n - x\| < \varepsilon$, vagyis $\|a_n\| < \|x\| + \varepsilon \le 1 + \varepsilon$. Valamit $A'x = \lim_{n\to\infty} Aa_n$ miatt létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $\|A'x - Aa_n\| < \varepsilon$, vagyis $\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\max\{N_1, N_2\} < n$, akkor

$$\|A'x\| < \|Aa_n\| + \varepsilon \le \|A\| \cdot \|a_n\| + \varepsilon \le (1 + \varepsilon) \|A\| + \varepsilon$$

adódik. Mivel ez minden pozitív ε paraméterre teljesül, ezért $\|A'x\| \le \|A\|$, amiből pedig

$$\|A'\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A'x\| \le \|A\|$$

következik. A nyilvánvaló

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\le 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\le 1}} \|A'x\| \le \sup_{\substack{x\in \overline{X} \\ \|x\|\le 1}} \|A'x\| = \|A'\|$$

egyenlőtlenség miatt $\|A\| = \|A'\|$.

14.41. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j). Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j), $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Vezessük be az $X = \operatorname{Ran} j$ jelölést. Ekkor X sűrű lineáris altér az U' Banach-térben. Legyen $\tilde{A} : X \to V$, $\tilde{A}x = A(j^{-1}(x))$. Az $\tilde{A}$ leképezés nyilván lineáris, továbbá

$$\left\|\tilde{A}\right\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\le 1}} \left\|\tilde{A}x\right\|_V = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\le 1}} \|A(j^{-1}x)\|_V = \sup_{\substack{y\in U \\ \|y\|\le 1}} \|Ay\|_V = \|A\|.$$

A 14.40 tétel alapján létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az $\tilde{A}$ kiterjesztése és amelyre $\|A'\| = \left\|\tilde{A}\right\| = \|A\|$ teljesül. Továbbá, minden $y \in U$ esetén

$$(A' \circ j)(x) = A'(j(x)) = \tilde{A}(j(x)) = A(j^{-1}(j(x))) = Ax,$$

vagyis $A' \circ j = A$.

14.42. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \to V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka.
Legyen $f : \operatorname{Ran} j_1 \to V_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : V_1 \twoheadrightarrow V_2$ sűrűn értelmezett lineáris izometria, ezért a 14.41 tétel alapján létezik egyetlen folytonos lineáris $A : V_1 \to V_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $A \circ j_1 = j_2$. Megcserélve a (V_1, j_1) és (V_2, j_2) szerepét az adódik,

hogy létezik olyan folytonos lineáris $A' : V_2 \to V_1$ izometria, mely az $f' : \operatorname{Ran} j_2 \to V_1$, $A' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $A' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$A \circ j_1 \circ j_2^{-1} = j_2 \circ j_2^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} j_2}$$
$$(A \circ A')|_{\operatorname{Ran} j_2} = \mathrm{id}_{V_2}|_{\operatorname{Ran} j_2}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve (13.74 tétel) alapján $A \circ A' = \mathrm{id}_{V_2}$. Szerepcserével pedig $A' \circ A = \mathrm{id}_{V_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy A izometrikus bijekció, tehát A^{-1} is folytonos. Vagyis A izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.
Az eőbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $A_1, A_2 : V_1 \to V_2$ olyan folytonos lineáris leképezések, melyekre $j_2 = A_1 \circ j_1 = A_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $A_1|_{\operatorname{Ran} j_1} = A_2|_{\operatorname{Ran} j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $A_1 = A_2$ következik.

14.43. Tétel. *Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

Bizonyítás. A 14.38 és a 14.42 tétel alapján nyilvánvaló.

14.11. Folytonos multilineáris leképezések

14.44. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ vektorterek rendszere, valamint legyen W is vektortér. Az

$$A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto A(x_1, \ldots, x_n)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *n-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre, minden $(x_i)_{i=1,\ldots,n}, (y_i)_{i=1,\ldots,n} \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorrendszere és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

teljesül. A $: \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezések halmazára a $\operatorname{Lin}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ jelölést használjuk.

14.45. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen V és W vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : V^n \to W$ függvény *szimmetrikus multilineáris leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_n \in V$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

teljesül. A $V^n \to W$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\operatorname{Lin}^n_{\mathrm{s}}(V^n, W)$ jelöli a továbbiakban.

14.46. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ multilineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. *A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett $\sup_{x \in B} \|A(x)\|_W < \infty$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek szorzata.
$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in V$ vektorra

$\|x-0\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_W < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V$ olyan vektor, melyre $\|x\|_V \leq 1$ teljesül, akkor $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\|_V < \delta$, ezért

$$\left\|A\left(\frac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_W = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \cdot \|Ax\|_W < 1,$$

vagyis $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$. Tehát minden $x \in V$, $\|x\|_V \leq 1$ esetén $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$, ezért

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_W \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n < \infty.$$

$3 \Rightarrow 2$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i |\ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett a szorzat téren értelmezett norma definíciója alapján $B = \{x \in V |\ \|x\|_V \leq 1\}$ teljesül. Vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{K}}$. Ekkor minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $\|x\|_V < \delta$ esetén

$$\|Ax - A0\|_W = \|A(x_1, \ldots, x_n)\|_W = \|x\|_V^n \cdot \left\|A\left\{\frac{x_1}{\|x\|_V}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_V}\right\}\right\|_W \leq \|x\|_V^n \cdot K < \varepsilon$$

teljesül, vagyis A folytonos a 0 pontban.

$3 \Rightarrow 1$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i |\ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V \setminus \{0\}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta' \in]0,1[$ olyan paraméter, melyre $\delta' < \|a\|$ teljesül. Legyen $x \in V$ olyan, melyre $\|a - x\|_V < \delta'$. Definiáljuk a $z_1, \ldots, z_n \in V$ vektorokat a komponensenként: a z_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ vektor j-edik $(j \in \{1, \ldots, n\})$ komponense legyen

$$(z_i)_j = \begin{cases} a_j, & \text{ha } \ j < i; \\ x_j - a_j, & \text{ha } \ j = i; \\ x_j, & \text{ha } \ j > i. \end{cases}$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén $z_1 = (x_1 - a_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (a_1, x_2 - a_2, x_3)$, $z_3 = (a_1, a_2, x_3 - a_3)$.) Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$A(x) = A(a) + \sum_{k=1}^{n} A(z_k),$$

vagyis

$$\|Ax - Aa\|_W \leq \sum_{k=1}^{n} \|Az_k\|_W.$$

Mivel $\|x\|_V \leq \|x - a\|_V + \|a\| < 1 + \|a\|$, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Az_k\|_W &= \|A(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k - a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\|_W = \\ &= \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k} \cdot \left\|A\left(\frac{a_1}{\|a\|_V}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{\|a\|_V}, x_k - a_k, \frac{x_{k+1}}{\|x\|_V}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_V}\right)\right\|_W \leq \\ &\leq \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k} \delta' K < \delta' K \|a\|_V^{k-1} (1 + \|a\|)^{n-k}, \end{aligned}$$

amiből pedig

$$\|Ax - Aa\|_W \leq \delta' \cdot K \sum_{k=1}^{n} \|a\|_V^{k-1} (1 + \|a\|)^{n-k}$$

következik. Tehát a

$$\delta = \min \left\{ 1, \|a\|, \frac{\varepsilon}{K \sum_{k=1}^{n} \|a\|_V^{k-1} (1 + \|a\|)^{n-k}} \right\}$$

olyan paraméter, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|a - x\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - Aa\|_W < \varepsilon$ teljesül.

Jelölés. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$,$(V_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, W normált tér. A továbbiakban jelölje $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ az $\prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ folytonos multilineáris leképezések halmazát, és $\mathscr{L}_s^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ a folytonos szimmetrikus leképezések halmazát.

14.47. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Az $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup \left\{ \|Ax\|_W \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \;\|x_i\|_i \le 1\} \right\}$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek szorzatát.
Legyen $A, B \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 14.46 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{\|x\|_V \le 1} \|(A+B)x\|_W = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax + Bx\|_W \le \sup_{\|x\|_V \le 1} (\|Ax\|_W + \|Bx\|_W) \le \\
&\le \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W + \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Bx\|_W = \|A\| + \|B\|; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_V \le 1} \|\lambda Ax\|_W = |\lambda| \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W = |\lambda| \cdot \|A\|
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A + B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 14.46 tétel alapján $A + B, \lambda A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$, vagyis $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ vektortér.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}^n(V, W)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektorra $\|x\|_V \le 1$ esetén $\|Ax\|_W = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_V}$ vektorra $\|x'\|_V \le 1$, ezért $Ax' = \left(\dfrac{1}{\|x\|_V}\right)^n Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

14.48. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ és $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$. Ekkor*

$$\|Ax\|_W \le \|A\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i .$$

Bizonyítás. Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát, legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.
Legyen $v = (x_1, \dots, x_n) \in V$ tetszőleges vektor. Ha valamelyik $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i = 0$, akkor az A leképezés multilinearitása miatt $Av = 0$, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül.
Tegyük fel, hogy a v vektor egyetlen komponense sem a nullvektor. A

$$v' = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|_1}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_n}\right)$$

vektorra $\|v'\|_V \le 1$ teljesül, tehát $\|Av'\|_W \le \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

14.49. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér. Ekkor $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát és legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér, valamint $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\|_W \le \|x\|_V \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\|_V \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a W teljes térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V \to W \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy A multilineáris leképezés. Legyen $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ekkor az

$$\begin{aligned}
&A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\
&A(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\lambda a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\right) = \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \lambda \cdot A(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

egyenlőségek igazolják A linearitását a k-adik változóban. Tehát A n-lineáris.
Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ vektorra $\|x\|_V \le 1$ esetén a 14.48 tétel alapján

$$\|a_n x\|_W \le \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \le \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^{n} 1 < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W = \sup_{\|x\|_V \le 1} \left\|\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right\|_W = \sup_{\|x\|_V \le 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \le$$

$$\leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_V \leq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \leq K$$

következik, ami a 14.46 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos multilineáris leképezés, vagyis $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.

Azt kell még igazolni, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a 14.48 tétel alapján

$$\sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_W \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^{n} 1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Ebből az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

14.50. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Ekkor $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $(e_{k,i})_{i=1,\ldots,m_k}$ a V_k normált tér egy bázisa.
Minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|\cdot\|_k' : V_k \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{m_k} a_i e_{k,i} \mapsto \sum_{i=1}^{m_k} |a_i|$$

norma a V_k véges dimenziós téren. A véges dimneziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 14.25 tétel szerint, ezért létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V_k$ vektorra $\|x\|_k' \leq C_k \|x\|_k$ teljesül. Legyen $C = \max\{C_k | \; k \in \{1, \ldots, n\}\}$ és

$$K = \max\left\{\|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \ldots, e_{n,i_n})\|_W \mid \forall k \in \{1, \ldots, n\} : i_k \in \{1, \ldots, m_k\}\right\}.$$

Legyen minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k \in V_k$ tetszőleges vektor, melyet írjunk fel a V_k tér bázisában

$$x_k = \sum_{i_k=1}^{m_k} a_{k,i_k} e_{k,i_k}.$$

Az A multilinearitásának a felhasználásával az

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \ldots, x_n)\|_W &= \left\| A\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} a_{1,i_1} e_{1,i_1}, \sum_{i_2=1}^{m_2} a_{2,i_2} e_{2,i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{m_n} a_{n,i_n} e_{n,i_n}\right)\right\|_W \leq \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \ldots |a_{n,i_n}| \, \|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \ldots, e_{n,i_n})\|_W \leq \\
&\leq K \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}| \, |a_{2,i_2}| \ldots |a_{n,i_n}| =
\end{aligned}$$

$$= K\left(\sum_{i_1=1}^{m_1}|a_{1,i_1}|\right)\left(\sum_{i_2=1}^{m_2}|a_{2,i_2}|\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i_n=1}^{m_n}|a_{n,i_n}|\right) =$$
$$= K\,\|x_1\|_1'\,\|x_2\|_2'\cdot\ldots\cdot\|x_n\|_n' \le$$
$$\le KC_1C_2\cdot\ldots\cdot C_n\,\|x_1\|_1\,\|x_2\|_2\cdot\ldots\cdot\|x_n\|_n \le$$
$$\le KC^n\prod_{k=1}^{n}\|x_k\|_k$$

egyenlőtlenség adódik. A $B = \prod_{k=1}^{n}\{x_k \in V_k |\ \|x_k\|_k \le 1\}$ jelöléssel élve a fenti egyenlőtlenség szerint

$$\sup_{x\in B}\|A(x)\|_W \le KC^n < \infty.$$

Ez pedig a 14.46 tétel alapján garantálja A folytonosságát.

14.51. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Ekkor ${\mathscr{L}_s}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)$ térnek.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Vezessük be a

$$\mathrm{Perm}(n) = \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \sigma \text{ bijekció}\}$$

jelölést. Minden $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n}V_i$ vektorra és $\sigma \in \mathrm{Perm}(n)$ permutációra legyen

$$J_{x,\sigma} : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right) \to W \qquad A \mapsto A(x_1,\ldots,x_n) - A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

A $J_{x,\sigma}$ leképezés nyilván lineáris és a 14.48 tétel segítségével származtatott

$$\|J_{x,\sigma}A\|_W \le 2\,\|A\|\cdot\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|_i$$

egyenlőtlenség alapján folytonos is, ezért a $\overset{-1}{J_{x,\sigma}}(0)$ halmaz zárt. Mivel zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt és

$$\mathscr{L}_s\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)\right) = \bigcap_{x\in\prod_{i=1}^{n}V_i}\ \bigcap_{\sigma\in\mathrm{Perm}(n)}\overset{-1}{J_{x,\sigma}}(0),$$

ezért a $\mathscr{L}_s\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)$ halmaz zárt.

14.52. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. A*

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^{n}V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n}V_i, W\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V', \|\cdot\|')$ a $\prod_{i=1}^n V_i$ a normált terek szorzatát, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és tekintsük a

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big)$$

$$\eta : \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \to \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)\right) \qquad B \mapsto \Big(x_1 \mapsto (x_2 \mapsto B(x_1, x_2))\Big)$$

leképezéseket. Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor a 14.46 tétel alapján $\|A\| < \infty$ továbbá

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y \in V',\ \|y\|' \leq 1 \\ x \in V,\ \|x\| \leq 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} \sup_{\substack{y \in V' \\ \|y\|' \leq 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} \|A(x)\| = \|A\|$$

teljesül, vagyis $\|\rho(A)\| < \infty$, amiből a 14.46 tétel alapján $\rho(A) \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ következik, továbbá $\|\rho(A)\| = \|A\|$ miatt ρ izometria.

Megmutatjuk, hogy ρ lineáris. Ehhez legyen $A, B \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$\begin{aligned} \rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x)+B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) = \\ &= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) \\ \rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) = \\ &= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$, tehát ρ lineáris.

Most igazoljuk, hogy ρ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in V'$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in V$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.

Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$((\eta(\rho(A)))(x))(y) = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y),$$

vagyis $\eta \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathscr{L}(V, \mathscr{L}^n(\prod_i^n V_i, W)))}$.

Ha $A \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$(\rho(\eta(A)))(x,y) = (\eta(A)x)(y) = A(x,y),$$

vagyis $\rho \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathscr{L}^{n+1}(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W)}$.
Tehát ρ és η egymás inverzei, ezért ρ és η bijekció. Továbbá η lineáris leképezés inverze, ezért lineáris, továbbá ρ izometrikussága miatt η is izometria.

14.53. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.

- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \le 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x,\dots,x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \ge K\|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés szigorúan negatív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x,\dots,x) \le -K\|x\|^n$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in V$ melyre $A(x,\dots,x) > 0$ és $A(y,\dots,y) < 0$.

14.54. Tétel. *(Polarizációs formula.) Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \operatorname{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $x_1,\dots,x_n \in V$ vektorra*

$$A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_n \cdot A\left(t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n]}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ és $A \in \operatorname{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $z \in V$ vektor esetén definiáljuk az

$$A_z : V^{n-1} \to W \qquad (x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto A(z, x_1,\dots,x_{n-1})$$

$(n-1)$-lineáris leképezést és legyen $x_0, x_1,\dots,x_n \in V$ tetszőleges vektor.
Az $n = 1$ esetben

$$\frac{1}{2} \sum_{t_1 \in \{-1,1\}} t_1 A(t_1x_1) = \frac{1}{2}\left(-A(-x_1) + A(x_1)\right) = A(x_1),$$

és az $n = 2$ esetben

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \sum_{t_1,t_2 \in \{0,1\}} & t_1t_2 A\left(t_1x_1 + t_2x_2, t_1x_1 + t_2x_2\right) = \\ &= \frac{1}{8}\Big(A(x_1+x_2, x_1+x_2) - A(x_1-x_2, x_1-x_2) - \\ &\quad - A(-x_1+x_2, -x_1+x_2) + A(-x_1-x_2, -x_1-x_2)\Big) = \\ &= \frac{1}{8}\left(4A(x_1,x_2) + 4A(-x_1,-x_2)\right) = A(x_1,x_2)\end{aligned}$$

teljesül, tehát az $n = 1, 2$ számokra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ számra igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned}A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_2,\dots,t_n \in \{-1,1\}} & t_2 \dots t_n \cdot A\left(x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]} - \\ & - t_2 \dots t_n \cdot A\left(-x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]}.\end{aligned} \tag{14.3}$$

Megmutatjuk, hogy az $n+1$ számra is igaz az állítás. Jelölje α az $n+1$ esetben a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát, vagyis

$$\begin{aligned}2^{n+1}(n+1)!\alpha &= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1 \dots t_n A\left(t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n+1]} = \\ &= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1 \dots t_n A_{t_0x_0+t_1x_1+\dots+t_nx_n}\left(t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n]} = \\ &= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1 \dots t_n \sum_{i=0}^{n} A_{t_ix_i}(t_0x_0 + \dots + t_nx_n)^{[n]} =\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0 t_1 \dots t_n A_{t_i x_i}(t_0 x_0 + \dots + t_n x_n)^{[n]}.$$

Legyen minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén

$$\beta_i = \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0 t_1 \dots t_n A_{t_i x_i}(t_0 x_0 + \dots + t_n x_n)^{[n]}.$$

Ha $i \in \{1, \dots, n\}$, akkor a t_0 és a t_i indexre történő összegzést fejtsük ki.

$$\begin{aligned}
\beta_i = & \sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n \cdot \\
& \cdot \Big(A_{x_i}(x_0 + x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} - \\
& - A_{x_i}(-x_0 + x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} - \\
& - A_{-x_i}(x_0 - x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} + \\
& + A_{-x_i}(-x_0 - x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} \Big).
\end{aligned}$$

Ha az első és a negyedik összeadandót nézzük, akkor az $A_{-z} = -A_z$ formula és a (14.3) képlet felhasználásával

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n \cdot \\
& \cdot \Big(A_{x_i}(x_0 + x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} - \\
& - A_{x_i}(-x_0 - x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} \Big) = \\
& = 2^n n! A_{x_i}(x_0 + x_i, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

adódik. Hasonlóan, ha a második és harmadik összeadandót nézzük, akkor

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n \cdot \\
& \cdot \Big(-A_{x_i}(-x_0 + x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} + \\
& + A_{x_i}(x_0 - x_i + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n)^{[n]} \Big) = \\
& = 2^n n! A_{x_i}(x_0 - x_i, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

adódik. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
\beta_i &= 2^n n! A_{x_i}(2x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\
&= 2^{n+1} n! A_{x_i}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\
&= 2^{n+1} n! A(x_i, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\
&= 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Tehát minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\beta_i = 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $\beta_0 = 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Ezek alapján a

$$2^{n+1}(n+1)!\alpha = \sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=0}^{n} 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n) = 2^{n+1}(n+1)! A(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

egyenletből

$$\alpha = A(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

14.55. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.

1. *Ha* A *szimmetrikus pozitív vagy negatív multilineáris leképezés, akkor* n *páros szám.*
2. *Ha* A *szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.*
3. *Ha* A *szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.*
4. *Ha* $\dim V < \infty$ *és* A *pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.*
5. *Ha* $\dim V < \infty$ *és* A *negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.
1. Tegyük fel, hogy A szimmetrikus, pozitív és n páratlan. Az A szimmetrikussága miatt a 14.54 tétel alapján létezik olyan $z \in V$, melyre $A(z^{[n]}) = \alpha \neq 0$, valamint A pozitivitása miatt $\alpha \geq 0$. Felhasználva A multilinearitását és n páratlanságát $A((-z)^{[n]}) = -A(z^{[n]}) = -\alpha < 0$ adódik, ami ellentmond A pozitivitásának.
Ha A szimmetrikus és negatív, akkor n páratlanságát feltételezve hasonló gondolatmenettel kaphatunk ellentmondást.
2–3. A definíció alapján nyilvánvaló.
4. Legyen $n = \dim V$. Mivel V véges dimenziós, ezért a 14.50 tétel alapján A folytonos multilineáris leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ halmazt. Az S halmaz korlátos, zárt, tehát a 14.26 tétel alapján kompakt. Vagyis az A folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon és felveszi a minimumát is. Az A függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \leq A(v^{[n]})$. Ez a K szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos A függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana A szigorú pozitivitásának.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in V$ esetén $A(x^{[n]}) \geq K \|x\|^n$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \neq 0$, akkor $\frac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \dots, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

teljesül, amiből az A operátor multilinearitása miatt

$$A(x, \dots, x) \geq K \cdot \|x\|^n$$

adódik.
5. A 4. ponthoz hasonlóan igazolható.

14.12. Konvex zárt elnyelő halmazok Banach-terekben

14.56. Definíció. Legyen V vektortér és $K \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy a K halmaz

- *elnyelő*, ha minden $x \in V$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda K$;
- *konvex*, ha minden $x, y \in K$ és $c \in [0, 1]$ elemre $cx + (1 - c)y \in K$ teljesül;
- *szimmetrikus*, ha $K = -K$ teljesül.

14.57. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *Banach-tér és legyen* $Z \subseteq V$ *zárt, konvex és elnyelő halmaz. Ekkor létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$ *melyre* $B_r(0) \subseteq Z$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy $K = Z \cap (-Z)$ zárt, konvex, elnyelő és szimmetrikus halmaz. A K halmaz nyilván zárt, hiszen két zárt halmaz metszete; konvex is, hiszen két konvex halmaz metszete és nyilván szimmetrikus is. Megutatjuk, hogy K elnyelő. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel Z elnyelő, ezért létezik olyan $c_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in c_1 Z$, valamint létezik olyan $c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy $-x \in c_2 Z$. Ekkor bármely $c \in \mathbb{R}^+$, $c > \max\{c_1, c_2\}$ számra $x, -x \in cK$, vagyis $x \in (cK) \cap (-cK) = cZ$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (nK)$ teljesül. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel K elnyelő, létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, melyre $x \in cK$. Mivel K konvex és elnyelő, ezért ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq c$, akkor $x \in nK$,

tehát $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} (nK)$.
3. A Baire-féle kategóriatétel alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int} \overline{nK} \neq \emptyset$. Mivel a

$$\varphi : V \to V \qquad x \mapsto nx$$

leképezés a 14.19 tétel alapján homeomorfizmus, ezért $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$. Legyen $z \in \operatorname{Int} K$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(z) \subseteq \operatorname{Int} K$.
4. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(0) \subseteq K$. Legyen $x \in B_r(0)$. A K halmaz szimmetrikussága miatt $B_r(-z) \subseteq K$. Tehát az $x - z \in B_r(-z) \subseteq K$ és az $x + z \in B_r(z) \subseteq K$ tartalmazás miatt $x - z, x + z \in K$, amiből K konvexitása miatt

$$x = \frac{1}{2}(x-z) + \frac{1}{2}(x+z) \in K$$

adódik. Mivel $B_r(0) \subseteq K = Z \cap (-Z)$ teljesül, ezért $B_r(0) \subseteq Z$.

14.13. Hahn–Banach-tétel

14.58. Definíció. Legyen V vektortér és $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés. Azt mondjuk, hogy
- φ ***szubadditív***, ha minden $x, y \in V$ esetén $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
- φ ***pozitív homogén***, ha minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;
- φ ***szublineáris***, ha szubadditív és pozitív homogén.

14.59. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto p(x)$$

függvényt ***félnormának*** nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $p(0) = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $\forall x, y \in V :\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Az (V, p) párt ***félnormált térnek*** nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér, és p félnorma a V vektortéren.

14.60. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq \tilde{f}$ és $\tilde{f} \leq \varphi|_{M\oplus\mathbb{R}x}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ekkor minden $u, v \in M$ esetén

$$f(u) + f(v) = f(u+v) \leq \varphi(u+v) = \varphi(u - x + x + v) \leq \varphi(u-x) + \varphi(v+x),$$

ezért

$$f(u) - \varphi(u-x) \leq \varphi(v+x) - f(v).$$

Vagyis az $\{f(u) - \varphi(u-x) |\ u \in M\}$ halmaz korlátos felülről és a $\{\varphi(v+x) - f(v) |\ v \in M\}$ halmaz korlátos alulról. Az

$$\alpha = \sup\{f(u) - \varphi(u-x) |\ u \in M\} \quad \text{és} \quad \beta = \inf\{\varphi(v+x) - f(v) |\ v \in M\}.$$

számokra $\alpha \leq \beta$ teljesül. Legyen $c \in [\alpha, \beta]$ tetszőleges és

$$\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R} \qquad u + \lambda x \mapsto f(u) + \lambda c.$$

Ekkor $f \subseteq \tilde{f}$ nyilván teljesül.
Minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \leq \beta \leq \varphi\left(\frac{1}{\lambda}u + x\right) - f\left(\frac{1}{\lambda}u\right) = \frac{1}{\lambda}\varphi(u + \lambda x) - \frac{1}{\lambda}f(u)$$

vagyis ez alapján

$$f(u+\lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u+\lambda x).$$

Minden $u \in M$ és $-\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \geq \alpha \geq f\left(-\frac{1}{\lambda}u\right) - \varphi\left(-\frac{1}{\lambda}u - x\right) = -\frac{1}{\lambda}f(u) + \frac{1}{\lambda}\varphi(u+\lambda x)$$

vagyis ez alapján

$$f(u+\lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u+\lambda x).$$

Tehát minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(u+\lambda x) \leq \varphi(u+\lambda x)$$

teljesül.

14.61. Tétel. *Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $F \leq \varphi$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$.
Legyen

$$\mathcal{A} = \{g : V \twoheadrightarrow \mathbb{R} | \ \mathrm{Dom}\, g \text{ lineáris altér},\ M \subseteq \mathrm{Dom}\, g,\ g \text{ lineáris},\ g|_M = f,\ g \leq \varphi|_{\mathrm{Dom}\, g}\}$$

és az $\mathcal{A}$ halmazon jelölje $\leq$ a $\subseteq$ tartalmazás relációt. Ekkor $(\mathcal{A}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz, ezért a Kuratowski–Zorn-lemma alapján létezik maximális eleme, ezt jelöljük a F szimbólummal. Mivel $F \in \mathcal{A}$, ezért F az f kiterjesztése és $F \leq \varphi|_{\mathrm{Dom}\, F}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Dom}\, F = V$. Ha $\mathrm{Dom}\, F \neq V$, akkor a 14.60 tétel alapján létezik egy g valódi kiterjesztése a F funkcionálnak az $\mathcal{A}$ halmazban, melyre $F \lneqq g$ teljesül, ami viszont ellentmond F maximalitásának.

14.62. Tétel. *Komplex vektortér feletti lineáris funkcionált egyértelműen meghatároz a valós része. Legyen V komplex vektortér és jelölje $V_\mathbb{R}$ a V vektorteret az összeadással és a $\mathbb{C} \times V \to V$ szorzás $\mathbb{R} \times V \to V$ megszorításával.*

1. *Ha $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés akkor az $f_\mathbb{R} = \mathrm{Re} \circ f$ leképezés olyan $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in V$ esetén $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ teljesül.*
2. *Ha $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor az $f : V \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ olyan lineáris leképezés, melyre $f_\mathbb{R} = \mathrm{Re} \circ f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V komplex vektortér.
1. Legyen $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés és $f_\mathbb{R} = \mathrm{Re} \circ f$. Ekkor $f_\mathbb{R}$ nyilván additív, valamint minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_\mathbb{R}(\lambda x) = \mathrm{Re}(f(\lambda x)) = \mathrm{Re}(\lambda f(x)) = \lambda\, \mathrm{Re}(f(x)) = \lambda f_\mathbb{R}(x)$$

teljesül, vagyis $f_\mathbb{R}$ lineáris. Továbbá minden $x \in V$ esetén

$$f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix) = \mathrm{Re}(f(x)) - i\, \mathrm{Re}(f(ix)) = \mathrm{Re}(f(x)) - i\, \mathrm{Re}(i f(x)) = \mathrm{Re}(f(x)) + i\, \mathrm{Im}(f(x)) = f(x).$$

2. Legyen $f_\mathbb{R} : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés és minden $x \in V$ esetén legyen $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$. Ekkor f nyilván additív, valamint minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f((\alpha + i\beta)x) &= f_\mathbb{R}(\alpha x + i\beta x) - i f_\mathbb{R}(i\alpha x - \beta x) = f_\mathbb{R}(\alpha x) + f_\mathbb{R}(i\beta x) - i f_\mathbb{R}(i\alpha x) + i f_\mathbb{R}(\beta x) = \\ &= \alpha f_\mathbb{R}(x) + \beta f_\mathbb{R}(ix) - i\alpha f_\mathbb{R}(ix) + i\beta f_\mathbb{R}(x) = (\alpha + i\beta)(f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)) = \\ &= (\alpha + i\beta) f(x) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis f lineáris. Az $f_\mathbb{R} = \mathrm{Re} \circ f$ egyenlőség pedig f definiálása alapján nyilvánvaóan igaz.

14.63. Tétel. *(Hahn–Banach-tétel.) Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$. Ekkor létezik olyan $F : M \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $|F| \leq p$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben 14.61 a tételt alkalmazva a p szublineáris leképezésre azt kapjuk, hogy létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ kiterjesztése az f funkcionálnak, melyre $F \leq p$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektor esetén

$$F(-x) \leq p(-x)$$

miatt

$$-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x)$$

teljesül, azaz $|F(x)| \leq p(x)$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben tekintsük a $V_\mathbb{R}$ valós vektorteret és az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ lineáris leképezést. Az 1. pont alapján létezik olyan $F_\mathbb{R} : V \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése az $f_\mathbb{R}$ funkcionálnak, melyre $|F_\mathbb{R}| \leq p$ teljesül. A 14.62 tétel alapján

$$F : V \to \mathbb{C} \qquad x \mapsto F_\mathbb{R}(x) - iF_\mathbb{R}(ix).$$

olyan lineáris leképezés, melyre $F_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ F$ teljesül.
Ha $x \in M$, akkor

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} f(x) = f_\mathbb{R}(x) = F_\mathbb{R}(x) = \operatorname{Re} F(x) \\
&\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}(if(x)) = -\operatorname{Re} f(ix) = -f_\mathbb{R}(ix) = -F_\mathbb{R}(ix) = -\operatorname{Re} F(ix) = -\operatorname{Re}(iF(x)) = \operatorname{Im} F(x),
\end{aligned}$$

vagyis $f(x) = F(x)$, tehát F az f kiterjesztése.
Végül megmutatjuk, hogy $|F| \leq p$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ha $F(x) = 0$, akkor nyilván $|F(x)| \leq p(x)$; ezért feltesszük a továbbiakban, hogy $F(x) \neq 0$. Ekkor viszont a $z = \dfrac{F(x)}{|F(x)|}$ komplex szám egységnyi abszolútértékű és

$$|F(x)| = \overline{z} \cdot F(x) = F(\overline{z}x) = \operatorname{Re} F(\overline{z}x) = F_\mathbb{R}(\overline{z}x) \leq p(\overline{z}x) = p(x)$$

teljesül, vagyis $|F| \leq p$.

14.64. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, mely f kiterjesztése és $\|f\| = \|F\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. A

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$$

félnormára és az f leképezésre alkalmazva a 14.63 Hahn–Banach-tételt kapjuk olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezésnek a létezését, mely f kiterjesztése, melyre $|F| \leq p$ teljesül. Vagyis minden $x \in V$ esetén

$$|F(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\|$$

miatt $\|F\| \leq \|f\|$, azonban a kiterjesztés miatt $\|F\| \geq \|f\|$, tehát $\|F\| = \|f\|$.

14.65. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $F(x_k) = a_k$.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Jelölje M az $x_1, \ldots, x_n$ vektorrendszer által generált lineáris alteret. Ekkor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to M \qquad (c_1, \ldots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

lineáris bijekció, továbbá

$$\eta : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k a_k$$

lineáris leképezés. Az $f = \eta \circ \varphi^{-1} : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $f(x_k) = a_k$ teljesül. Mivel M véges dimenziós és f lineáris, ezért a 14.21 tétel alapján folytonos, továbbá a 14.64 tétel alapján létezik folytonos kiterjesztése.

14.66. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor V' szétválasztó.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$, $x \neq y$ vektor. A 14.65 tétel alapján létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, melyre $\varphi(x-y) = 1$ teljesül. Ekkor $\varphi \in V'$ és $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

14.67. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Minden $x \in V$ esetén legyen*

$$j_x : V' \to \mathbb{K} \qquad \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Ekkor j_x folytonos lineáris leképezés.

2. *A*

$$j : V \to V'' \qquad x \mapsto j_x$$

leképezés lineáris és injektív.

3. *A $j : V \to V''$ leképezés izometria, azaz minden $x \in V$ esetén*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \, .$$

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Ha $x \in V$, $\varphi_1, \varphi_2 \in V'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor a

$$\begin{aligned} j_x(\varphi_1 + \varphi_2) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = j_x(\varphi_1) + j_x(\varphi_2) \\ j_x(\lambda\varphi_1) &= (\lambda\varphi_1)(x) = \lambda\varphi_1(x) = \lambda j_x(\varphi_1) \end{aligned}$$

egyenletek alapján j_x lineáris. A folytonosság a

$$\sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\| < \infty$$

egyenlőtlenségekből következik. Sőt ebben a pontban még azt is igazoltuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$.
2. Legyen $x, y \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor a minden $\varphi \in V'$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} j_{x+y}(\varphi) &= \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = j_x(\varphi) + j_y(\varphi) = (j_x + j_y)(\varphi) \\ j_{\lambda x}(\varphi) &= \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda j_x(\varphi) = (\lambda j_x)(\varphi) \end{aligned}$$

egyenlőségek miatt j lineáris.
Tegyük fel, hogy valamely $x, y \in V$ esetén $j_x = j_y$. Ekkor minden $\varphi \in V'$ funkcionálra $\varphi(x) = \varphi(y)$ teljesül és mivel a 14.66 tétel miatt V' szétválasztó, ez csak úgy lehet, ha $x = y$.
3. Legyen $x \in V$. Ha $x = 0$, akkor az 1. pont alapján $\|j_x\| \leq \|x\| = 0$ miatt $\|j_x\| = 0 = \|x\|$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$ és tekintsük az $M = \mathbb{K}x_0$ alteret és az

$$f : M \to \mathbb{K} \qquad ax_0 \mapsto a$$

lineáris leképezést. Ekkor

$$\|f\| = \sup_{y \in M,\ \|y\| \leq 1} |f(y)| = \sup_{a \in \mathbb{K},\ |a| \cdot \|x_0\| \leq 1} |f(ax)| = \sup_{a \in \mathbb{K},\ |a| \leq 1} |a| = 1$$

továbbá a 14.64 tétel alapján létezik olyan $F : V \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $f \subseteq F$ és $\|F\| = \|f\| = 1$ teljesül. Ekkor

$$\|j_x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| = 1} |\varphi(x)| \geq |F(x)| = |f(x)| = |f(\|x\| \cdot x_0)| = \|x\| \, .$$

Az 1. pontban pedig láttuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$, ezért $\|j_x\| = \|x\|$.

14.68. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *reflexív*, ha a $j : V \to V''$ leképezés szürjektív.

14.14. Banach egyenletes korlátosság tétele

14.69. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. $\overline{B_1(0)} = \{x \in V|\ \|x\| \le 1\}$
2. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, W vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor $A(\Omega)$ is konvex.*
3. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, akkor $\overline{\Omega}$ is konvex halmaz.*
4. *A $B_1(0)$ és a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvex.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. egyen $x \in V$, $\|x\| = 1$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor az $R = \min\{r, 1\}$ számra és az $y = (1 - R/2)x$ vektorra $y \in B_1(0)$ és $y \in B_r(x)$ teljesül, vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_1(0) \cap B_r(x) \ne \emptyset$, tehát

$$\{x \in V|\ \|x\| \le 1\} \subseteq \overline{B_1(0)}.$$

Ha $x \in V$, $\|x\| > 1$, akkor az $r = \|x\| - 1 \in \mathbb{R}^+$ számra $B_1(0) \cap B_r(x) = \emptyset$ teljesül, ugyanis, ha $y \in B_1(0) \cap B_r(x)$, akkor $\|y\| < 1$ és $\|x - y\| < r$, amiből az

$$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\| < \|x\| - 1 + 1 = \|x\|$$

ellentmondás adódik. Ez azt jelenti, hogy $x \notin \overline{B_1(0)}$. Tehát

$$V \setminus \{x \in V|\ \|x\| \le 1\} \subseteq V \setminus \overline{B_1(0)},$$

amiből

$$\overline{B_1(0)} \subseteq \{x \in V|\ \|x\| \le 1\}$$

következik.
2. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, W vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, valamint $x, y \in A(\Omega)$ és $t \in [0, 1]$. Ekkor létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $Ax' = x$ és $Ay' = y$. Az A linearitása és Ω konvexitása miatt $tx' + (1 - t)y' \in \Omega$ és $A(tx' + (1 - t)y') = tx + (1 - t)y \in A(\Omega)$.
3. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\overline{\Omega}$ nem konvex. Ekkor létezik olyan $x, y \in \overline{\Omega}$ és $t \in]0, 1[$, melyre $z = tx + (1 - t)y \notin \overline{\Omega}$. Mivel $\overline{\Omega}$ zárt, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$.
A lezárás definíciója alapján létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $\|x - x'\| < r$ és $\|y - y'\| < r$. Legyen $z' = tx' + (1 - t)y'$. Mivel Ω konvex, ezért $z' \in \Omega$. A

$$\|z - z'\| = \|t(x - x') + (1 - t)(y - y')\| \le t\,\|x - x'\| + (1 - t)\,\|y - y'\| < tr + (1 - t)r = r$$

becslés alapján a $z' \in B_r(z) \cap \Omega \ne \emptyset$ ellentmondást kapjuk. Tehát $\overline{\Omega}$ konvex.
4. Legyen $x, y \in B_1(0)$ és $t \in [0, 1]$. Ekkor a $z = tx + (1 - t)y$ pontra

$$\|z\| \le t\,\|x\| + (1 - t)\,\|y\| < t + 1 - t = 1$$

miatt $z \in B_1(0)$ teljesül, vagyis $B_1(0)$ halmaz konvex, ekkor viszont a 3. pont alapján $\overline{B_1(0)}$ is konvex.

14.70. Tétel. *(Banach egyenletes korlátosság tétele.) Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$. A H halmaz pontosan akkor korlátos pontonként, ha korlátos az operátornormában, azaz*

$$\forall x \in U : \sup_{A \in H} \|Ax\|_V < \infty \quad \leftrightarrow \quad \sup_{A \in H} \|A\| < \infty.$$

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$. Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az $\{Ax|\ A \in H\}$ halmaz korlátos a V térben. Tekintsük a

$$T = \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy $A \in \mathscr{L}(U,V)$, akkor az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz konvex. Ehhez legyen $x, y \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$, valamint $t \in [0,1]$ és tekintsük a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor $Ax, Ay \in \overline{B_1(0)}$, valamint a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvexitása miatt

$$Az = A(tx + (1-t)y) = tAx + (1-t)Ay \in \overline{B_1(0)},$$

vagyis $z \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$. Mivel konvex halmazok metszete konvex, ezért T konvex.

Minden $A \in H$ esetén az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz zárt, hiszen zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, valamint zárt halmazok metszete zárt, ezért T zárt.

Megmutatjuk, hogy T elnyelő. Legyen $x \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges, $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $A \in H$ esetén $\|Ax\|_V < r$, valamint legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r$ tetszőleges. Ekkor minden $A \in H$ esetén

$$\left\| A\left(\frac{1}{\lambda}x\right)\right\|_V \le \frac{r}{|\lambda|} \le 1,$$

vagyis minden $A \in H$ esetén $A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \overline{B_1(0)}$, ezért

$$\frac{1}{\lambda}x \in \bigcap_{A\in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right) = T,$$

vagy másképp $x \in \lambda T$.

Mivel T konvex, zárt, elnyelő halmaz egy Banach-térben, ezért a 14.57 tétel alapján a nullvektor környezete, azaz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_R(0) \subseteq T$. Ha $r = \dfrac{R}{2}$, akkor $\overline{B_r(0)} \subseteq T$. Tehát minden $x \in U$, $\|x\|_U \le 1$ és $A \in H$ esetén

$$rx \in \overline{B_r(0)} \quad \to \quad rx \in T \quad \to \quad A(rx) \in \overline{B_1(0)} \quad \to \quad r\|Ax\| \le 1 \quad \to \quad \|Ax\| \le \frac{1}{r}.$$

Vagyis minden $A \in H$ esetén

$$\|A\| = \sup_{x\in U,\ \|x\|_U \le 1} \|Ax\| \le \frac{1}{r},$$

tehát

$$\sup_{A\in H} \|A\| = \frac{1}{r} < \infty.$$

Fordítva, legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre

$$\sup_{A\in H} \|A\| < K$$

teljesül és legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor

$$\sup_{A\in H} \|Ax\|_V \le \sup_{A\in H} \|A\| \cdot \|x\|_U < K\|x\|_U < \infty.$$

14.15. Banach–Steinhaus-tétel

14.71. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U,V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Ekkor $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, valamint az $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ határérték folytonos lineáris operátor, melyre $\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|a_n\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(U,\|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V,\|\cdot\|_V)$ normált tér és $a:\mathbb{N}\to\mathscr{L}(U,V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Tehát minden $x\in U$ esetén az $n\mapsto a_n x$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát a 14.70 Banach egyenletes korlátosság tétele alapján az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmaz korlátos az operátornormában is.
Az $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ operátorra minden $x,y\in V$ és $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén

$$A(x+y)=\lim_{n\to\infty} a_n(x+y)=\lim_{n\to\infty} a_n(x)+a_n(y)=\lim_{n\to\infty} a_n(x)+\lim_{n\to\infty} a_n(y)=Ax+Ay$$
$$A(\lambda x)=\lim_{n\to\infty} a_n(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}\lambda a_n(x)=\lambda\lim_{n\to\infty} a_n(x)=\lambda Ax$$

teljesül, ezért lineáris.
Minden $x\in U$ esetén

$$\|Ax\|_V=\left\|\lim_{n\to\infty} a_n x\right\|_V=\lim_{n\to\infty}\|a_n x\|_V\le\liminf_{n\to\infty}(\|a_n\|\cdot\|x\|)=\|x\|\liminf_{n\to\infty}\|a_n\|,$$

ezért $\|A\|\le\liminf_{n\to\infty}\|a_n\|$. Nyilván $\liminf\limits_{n\to\infty}\|a_n\|\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|a_n\|$, valamint $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|a_n\|<\infty$. Ezért $\|A\|<\infty$, vagyis A folytonos lineáris operátor.

14.16. Banach nyílt leképezések tétele és közvetlen következményei

14.72. Tétel. *Legyen $(U,\|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V,\|\cdot\|_V)$ normált tér és $A:U\to V$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik olyan $R\in\mathbb{R}^+$, melyre*

$$B_R(0)\subseteq\overline{A(B_1(0))},$$

akkor minden $r\in\,]0,R[$ esetén

$$B_r(0)\subseteq A(B_1(0)).$$

Bizonyítás. Legyen $(U,\|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V,\|\cdot\|_V)$ normált tér és $A:U\to V$ folytonos lineáris leképezés. Legyen $R\in\mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_R(0)\subseteq\overline{A(B_1(0))}$ és $c\in\,]0,1[$ tetszőleges paraméter. Ekkor felhasználva, hogy a nem nulla számmal való szorzás homeomorfizmus, valamint az A operátor linearitását és folytonosságát

$$B_{cR}(0)=cB_R(0)\subseteq c\overline{A(B_1(0))}=\overline{cA(B_1(0))}=\overline{A(B_c(0))}\tag{14.4}$$

adódik, amiből adódik, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$B_{c^nR}(0)\subseteq\overline{A(B_{c^n}(0))}.\tag{14.5}$$

Legyen $y\in B_R(0)$. A lezárás definíciója alapján ekkor létezik olyan $y_0\in A(B_1(0))$ és $x_0\in B_1(0)$, melyre

$$\|y-y_0\|<cR,\qquad Ax_0=y_0\quad\text{és}\quad\|x_0\|<1.$$

Ekkor $y-y_0\in B_{cR}(0)$, vagyis a (14.4) képlet alapján létezik olyan $y_1\in A(B_c(0))$ és $x_1\in B_c(0)$, melyre

$$\|y-y_0-y_1\|<c^2R,\qquad Ax_1=y_1\quad\text{és}\quad\|x_1\|<c.$$

Ha már valamilyen $N\in\mathbb{N}$ értékig definiáltuk az x_N és y_N vektorokat úgy, hogy azokra minden $k\in\{0,\dots,N\}$ esetén

$$\left\|y-\sum_{j=0}^{k}y_j\right\|<c^{k+1}R,\qquad Ax_k=y_k\quad\text{és}\quad\|x_k\|<c^k$$

teljesül, akkor a (14.5) képlet alapján létezik olyan $y_{N+1}\in A(B_{c^{N+1}}(0))$ és $x_{N+1}\in B_{c^{N+1}}(0)$, melyre

$$\left\|y-\sum_{j=0}^{N+1}y_j\right\|<c^{N+2}R,\qquad Ax_{N+1}=y_{N+1}\quad\text{és}\quad\|x_{N+1}\|<c^{N+1}.$$

Ekkor a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján létezik egy olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} y_k \right\| < c^{n+1}R \qquad Ax_n = y_n, \quad \text{és} \quad \|x_n\| < c^n.$$

Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} y_k = y$, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} < \infty$$

miatt a $\sum_k x_k$ sor abszolút konvergens az U Banach-térben, ezért konvergens is. Az $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ vektorra normájára a $\|x\| < \frac{1}{1-c}$ becslésünk van az a sor abszolút konvergenciájából.
Az A folytonossága miatt

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Ax_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k = y.$$

Tehát egy rögzített $c \in]0,1[$ paraméter esetén azt kaptuk, hogy minden $y \in B_R(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_{\frac{1}{1-c}}(0)$ vektor, melyre $Ax = y$.
Az A linearitását kihasználva ez azt jelenti, hogy minden $y \in B_{(1-c)R}(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_1(0)$ vektor, melyre $Ax = y$; vagy másképp

$$B_{(1-c)R}(0) \subseteq A(B_1(0)).$$

Adott $r \in]0, R[$ esetén ebből a $c = 1 - \frac{r}{R}$ választással kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

14.73. Tétel. *(Banach nyílt leképezés tétele.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, akkor az A operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés.
Tegyük fel, hogy A nyílt. Ekkor az $A(B_1(0))$ halmaz is nyílt. Mivel $A0 = 0$, ezért a 0 belső pontja az $A(B_1(0))$ halmaznak, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq A(B_1(0))$. Ekkor az A linearitása miatt

$$\operatorname{Ran} A = A \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n(0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_1(0)) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_r(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{rn}(0) = V$$

teljesül, vagyis A szürjektív.
Most tegyük fel, hogy A szürjektív. Ekkor

$$V = A \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n)(0).$$

Mivel V teljes metrikus tér, ezért a Baire-féle kategóritétel miatt nem áll elő megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int} \overline{A(B_n(0))} \neq \emptyset$. Mivel a nem nulla számmal való szorzás lineáris homeomorfizmus és A lineáris, ezért

$$\operatorname{Int} \overline{A(B_n(0))} = \operatorname{Int} \overline{A(nB_1(0))} = \operatorname{Int} \overline{nA(B_1(0))} = \operatorname{Int} \left(n\overline{A(B_1(0))} \right) = n \operatorname{Int} \overline{A(B_1(0))} \neq \emptyset.$$

Legyen $z \in \operatorname{Int} \overline{A(B_1(0))}$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$, valamint a $B_1(0)$ halmaz szimmetrikussága és A linearitása miatt $B_r(-z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$ is teljesül. A 14.69 tétel alapján

$\overline{A(B_1(0))}$ konvex halmaz. Ha $x \in U$ olyan, hogy $\|x\| < r$, akkor $x+z \in B_r(z)$ és $x-z \in B_r(-z)$ miatt $x+z, x-z \in \overline{A(B_1(0))}$, vagyis a konvexitás miatt

$$x = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(x-z) \in \overline{A(B_1(0))}.$$

Tehát $B_r(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$. Ekkor viszont a 14.72 tétel miatt az $R = \dfrac{r}{2}$ számra $B_R(0) \subseteq A(B_1(0))$ teljesül.
Ennek a segítségével megmutatjuk, hogy A nyílt leképezés. Legyen $\Omega \subseteq U$ nyílt halmaz és $y \in A(\Omega)$. Ekkor létezik olyan $x \in \Omega$, melyre $Ax = y$, továbbá létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_c(x) \subseteq \Omega$. Így

$$A(\Omega) \supseteq A(B_c(x)) = A(x + B_c(0)) = A(x + cB_1(0)) = Ax + cA(B_1(0)) \supseteq y + cB_R(0) = B_{Rc}(y)$$

miatt y belső pontja az Ω halmaznak.

14.74. Tétel. *(Banach tétele a folytonos inverz létezéséről.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció. Ekkor A szürjektív, vagyis 14.73 Banach nyílt leképezés tétele alapján nyílt is. Ami a folytonosság topologikus jellemzése alapján éppen azt jelenti, hogy A^{-1} folytonos.

14.75. Definíció. Azt mondjuk, hogy a V vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma *összehasonlítható*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül, vagy létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$ teljesül.

14.76. Tétel. *Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható, akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Tegyük fel, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \leq C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül. Tekintsük az

$$\mathrm{id}_V : (V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1) \qquad x \mapsto x$$

lineáris leképezést. Ez a

$$\sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\mathrm{id}_V(x)\|_1 = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|x\|_1 \leq \sup_{\|x\|_2 \leq 1} C \|x\|_2 = C < \infty$$

egyenlőtlenség alapján folytonos. Ezért a 14.74 folytonos inverzről szóló tétel alapján id_V inverze is folytonos, vagyis

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\|\mathrm{id}_V^{-1}(x)\right\|_2 < \infty.$$

Ha $K \in \mathbb{R}^+$ jelöli a fenti képletben szereplő szuprémumot, akkor minden $x \in V$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|x\|_2 \leq K$ teljesül. Vagyis ha $x \in V \setminus \{0\}$ tetszőleges, akkor $\left\|\dfrac{1}{\|x\|_1} x\right\|_1 \leq 1$ miatt $\left\|\dfrac{1}{\|x\|_1} x\right\|_2 \leq K$, azaz $\|x\|_2 \leq K \|x\|_1$. Amivel igazoltuk, hogy a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek.

14.17. Zárt gráf tétel

14.77. Definíció. Legyen X, Y halmaz és $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az f *függvény gráfjának* nevezzük a $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in \mathrm{Dom}\, f\}$ halmazt.

14.78. Definíció. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy A *zárt*, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $U \times V$ szorzattérben.

14.79. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Az A leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozatra, melyre az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$ és*

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. A $\Gamma(A)$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden benne haladó konvergens sorozat határértéke eleme a $\Gamma(A)$ halmaznak. Ha $z : \mathbb{N} \to \Gamma(A)$ konvergens sorozat, akkor létezik olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n)$ teljesül, valamint z konvergenciája miatt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens. Tehát $\Gamma(A)$ pontosan akkor zárt, ha minden ilyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Gamma(A)$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$, ami másképp $\lim\limits_{n\to\infty} x_x \in \operatorname{Dom} A$ és $A\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ teljesülését jelenti.

14.80. Tétel. *Zártgráf-tétel Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés. Ekkor az alábbi állítások közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat.*

i. $\operatorname{Dom} A$ *zárt;*

ii. $\Gamma(A)$ *zárt;*

iii. A *folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés.

Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ és $\Gamma(A)$ zárt. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt lineáris altere egy teljes térnek, ezért teljes is, vagyis $(\operatorname{Dom} A, \|\cdot\|_U |_{\operatorname{Dom} A})$ Banach-tér. Mivel $U \times V$ is Banach-tér és ennek $\Gamma(A)$ zárt altere, ezért $\Gamma(A)$ is Banach-tér a szorzatnorma megszorításával. A

$$\operatorname{pr}_U : U \times V \to U \qquad (x, y) \mapsto x$$
$$\operatorname{pr}_V : U \times V \to V \qquad (x, y) \mapsto y$$

projekciók folytonos lineáris leképezések, ezért a

$$\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)} : \Gamma(A) \to \operatorname{Dom} A \qquad (x, Ax) \mapsto x$$
$$\operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} : \Gamma(A) \to \operatorname{Ran} A \qquad (x, Ax) \mapsto Ax$$

megszorításuk is folytonos. Így $\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}$ Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció, vagyis a folytonos inverz létezéséről szóló 14.74 tétel alapján a

$$\left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1} : \operatorname{Dom} A \to \Gamma(A) \qquad x \mapsto (x, Ax)$$

leképezés folytonos. Ekkor viszont $A = \operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} \circ \left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1}$ miatt A folytonos leképezések kompozíciója, tehát folytonos.

Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ zárt és A folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ tetszőleges konvergens sorozat a $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ határértékkel. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt, ezért $z \in A$, valamit A folytonossága miatt

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Ezért a 14.79 tétel alapján $\Gamma(A)$ zárt.

Tegyük fel, hogy $\Gamma(A)$ zárt és A folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozat és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\|(x_n, Ax_n) - (x_m, Ax_m)\| = \|(x_n - x_m, A(x_n - x_m))\| &= \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A(x_n - x_m)\|_V\} \leq \\ &\leq \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_U\} < (1 + \|A\|)\|x_n - x_m\|_U,\end{aligned}$$

amiből adódik, hogy $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\Gamma(A)$ teljes térben, vagyis létezik a határértéke és a határértéke is benne van a $\Gamma(A)$ térben. Ezért $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n\right) \in \Gamma(A)$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$. Tehát $\operatorname{Dom} A$ zárt halmaz.

15. Hilbert-terek

15.1. Skaláris szorzással ellátott terek

15.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V: \ \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V: \ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V: \ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$;
- $\forall x, y \in V: \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorzatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

15.2. Tétel. *Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra*

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \qquad \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x, y, z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$
$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\overline{\lambda} \langle y, x\rangle} = \lambda \langle x, y\rangle .$$

15.3. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x, y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z\rangle = \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{t} \langle y, x\rangle - t \langle x, y\rangle + |t|^2 \langle y, y\rangle .$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle x, y\rangle + \frac{\langle y, x\rangle \langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle \langle y, y\rangle} \langle y, y\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y\rangle} \left(\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

adódik.

15.4. Tétel. *Legyen V vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

norma.

Bizonyítás. A skaláris szorzás definíciója alapján minden $x \in V$ vektorra és $c \in \mathbb{K}$ számra

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} = \sqrt{\bar{c}\,\langle x, cx\rangle} = \sqrt{\bar{c}\left(\overline{\langle cx, x\rangle}\right)} = \sqrt{\bar{c}\left(\overline{\bar{c}\,\langle x, x\rangle}\right)} = \sqrt{\bar{c}c\,\langle x, x\rangle} = |c| \cdot \|x\|$$

teljesül.
Ha $x = 0$, akkor $\|x\| = \sqrt{0} = 0$. Ha valamilyen $x \in V$ vektorra $\|x\| = 0$, akkor $\langle x, x\rangle = 0$, vagyis $x = 0$.
Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

teljesül. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért elég az egyenlőtlenség négyzetét igazolni, vagyis, hogy

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y\rangle &\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle &\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \operatorname{Re}\langle x, y\rangle &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

teljesül. Ez viszont rögtön adódik a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből és a komplex számokra vonatkozó $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$ egyenlőtlenségből.

15.5. Tétel. *(Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorzatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorzatos vektortér és $x, y \in V$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 . \end{aligned}$$

15.6. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot\rangle$ skaláris szorzás a V téren.
- Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

Jelölés. A (pre-) Hilbert-tereket a továbbiakban csak az alaphalmaz szimbólumával jelöljük és a térhez tartozó skaláris szorzást csak akkor írjuk ki, ha annak elhagyása félrevezető lenne. Továbbá adott $\mathscr{H}$ Hilbert-tér esetén a $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ térre a $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vagy a $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ jelölést fogjuk használni.

15.7. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathscr{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer
- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha

  $$\forall x \in \mathscr{H}\Big((\forall i \in I : \langle e_i, x\rangle = 0) \to x = 0\Big)$$

  teljesül;
- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

15.8. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, z\rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle x, z\rangle \\ \langle z, \cdot\rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle z, x\rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Mivel a $\langle z, \cdot\rangle$ leképezés a skaláris szorzás definíciója alapján lineáris és a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\|\langle z, \cdot\rangle\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle z, x\rangle| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|x\| \cdot \|z\| \le \|z\| < \infty,$$

ezért a lineáris leképezések folytonosságára vonatkozó 14.14 tétel alapján $\langle z, \cdot\rangle$ folytonos lineáris leképezés.
Mivel a konjugálás művelete folytonos és $\langle \cdot, z\rangle = \overline{\langle z, \cdot\rangle}$, ezért $\langle \cdot, z\rangle$ két folytonos leképezés kompozíciója, így folytonos.

15.9. Tétel. *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *(Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra*
$$\sum_{n\in J} |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 .$$
2. *Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n .$$
3. *(Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*
$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 .$$

Bizonyítás. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és legyen $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor.
1. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
0 \le \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{i=0}^{N} \langle e_i, x\rangle e_i, x - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x\rangle e_j \right\rangle = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} \overline{\langle e_i, x\rangle} \langle e_i, x\rangle - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x\rangle \langle x, e_j\rangle + \sum_{i,j=0}^{N} \overline{\langle e_i, x\rangle} \langle e_j, x\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2 + \sum_{i=0}^{N} \overline{\langle e_i, x\rangle} \langle e_i, x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2
\end{aligned}$$

teljesül, ezért minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N} |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 .$$

Tehát

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

is teljesül, valamint ha az összegzés csak egy $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra végezzük el, azzal csak csökkenteni tudjuk a bal oldalon álló kifejezés értékét, vagyis minden $J \subseteq \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n\in J} |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 .$$

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ számra

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^{m} \langle e_i, x\rangle e_i, \sum_{j=n+1}^{m} \langle e_j, x\rangle e_j \right\rangle = \tag{15.1}$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^{m} \overline{\langle e_i, x\rangle} \langle e_j, x\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 .$$

Az 1. pont alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \infty$, tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \varepsilon^2$$

teljesül, vagyis a (15.1) egyenlőtlenség alapján minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $N < n, m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens is, vagyis létezik a Hilbert-térben a $z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n$ vektor.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A skaláris szorzás folytonossága miatt

$$\begin{aligned}
\left\langle e_k, x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle &= \langle e_k, x\rangle - \left\langle e_k, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle = \\
&= \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \left\langle e_k, \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle = \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle \langle e_k, e_n\rangle = \\
&= \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, x\rangle = 0
\end{aligned}$$

teljesül. Mivel az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorrendszer teljes, ezért

$$x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n = 0.$$

3. A 2. pontban bizonyított egyenlőséget skalárisan szorozva az x vektorral

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \left\langle x, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle \\
\|x\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle \langle x, e_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2
\end{aligned}$$

adódik.

15.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre

15.10. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre*

$$\operatorname{dist}_W(x) = \inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Vezessük be a $d = \operatorname{dist}_W(x)$ jelölést. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $w_n \in W$ vektor, melyre

$$\|w_n - x\| < d + \frac{1}{n+1}$$

teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d \le \|w_n - x\|$ ezért $\lim_{n\to\infty} \|w_n - x\| = d$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a $\lim_{n\to\infty} \|w_n - x\|^2 = d^2$ határérték miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ természetes számra $\|w_n - x\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $N < n, m$, akkor W konvexitása miatt $\frac{w_n + w_m}{2} \in W$ és parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}\|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - \|(w_n - x) + (w_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4d^2 = 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) + 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tehát a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Mivel $\mathscr{H}$ teljes, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} w_n = y$ határérték, valamint W zártsága miatt $y \in W$. Erre az y vektorra

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - w_n\| = d$$

teljesül.
Az y vektor egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in W$, melyekre $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Ekkor a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 \leq \\ &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,\end{aligned}$$

tehát $\|y_1 - y_2\| = 0$ miatt $y_1 = y_2$.

15.11. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.
- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a* $W \subseteq V$ *halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$.

15.12. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, $x \in \mathscr{H}$ és $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Legyen $z \in W$ tetszőleges vektor és $t \in \mathbb{K}$ paraméter. Mivel W lineáris altér, ezért $x_W + tz \in W$. Ebben az esetben viszont

$$\|x - x_W\|^2 \leq \|x - x_W - tz\|^2 = \|x - x_W\|^2 + |t|^2 \|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(t\langle x - x_W, z\rangle)$$

alapján

$$0 \leq |t|^2 \|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(t\langle x - x_W, z\rangle).$$

Tehát minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z\rangle)$, amiből $\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z\rangle) = 0$ következik. Továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \mathrm{i}\lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2\|z\|^2 + 2t\operatorname{Im}(\langle x - x_W, z\rangle)$, amiből $\operatorname{Im}(\langle x - x_W, z\rangle) = 0$ következik. Vagyis $\langle x - x_W, z\rangle = 0$ teljesül minden $z \in W$ vektorra, tehát $x - x_W$ ortogonális a W altérre.
Tegyük fel, hogy $y \in W$ olyan vektor, hogy $x - y$ ortogonális a W altérre, tehát minden $z \in W$ esetén $\langle z, x - y\rangle = 0$. Mivel $x_W - y \in W$, ezért $\langle x_W - y, x - y\rangle = 0$, amiből pedig

$$\begin{aligned}\|x_W - y\|^2 &= \langle x_W - y, x_W - y\rangle = \langle x_W - y, (x_W - x) + (x - y)\rangle = \\ &= \langle x_W - y, x_W - x\rangle + \langle x_W - y, x - y\rangle = 0\end{aligned}$$

következik, tehát $y = x_W$.

15.13. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az x *vektor* W *altérre való ortogonális vetületének* vagy *projekciójának* nevezzük.

15.3. Zárt altér ortogonális kiegészítő altere

15.14. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor a

$$L^{\perp} \stackrel{\triangle}{=} (z \in \mathscr{H} | \ \forall x \in L : \ \langle x, z \rangle = 0)$$

halmazt L *ortogonálisának* nevezzük.

15.15. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.*
1. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L^{\perp}$ zárt lineáris altér.*
2. *Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ esetén $K^{\perp} \subseteq L^{\perp}$.*
3. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.
1. Tegyük fel, hogy $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz. Ekkor minden $x, y \in L^{\perp}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén mivel minden $z \in L$ vektorra

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \qquad \langle \lambda x, z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, z \rangle = 0$$

teljesül, ezért $x + y, \lambda x \in L^{\perp}$. Tehát $L^{\perp}$ lineáris altér. Az $L^{\perp}$ zártságának igazolásához legyen $a : \mathbb{N} \to L^{\perp}$ tetszőleges konvergens sorozat a $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határértékkel. Tetszőleges $z \in L$ esetén a skaláris szorzás folytonossága (15.8 tétel) miatt

$$\langle z, c \rangle = \left\langle z, \lim_{n\to\infty} a_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, a_n \rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

vagyis $c \in L^{\perp}$. Mivel minden $L^{\perp}$ halmazban haladó konvergens sorozat határértéke a halmazban van, ezért $L^{\perp}$ zárt halmaz.
2. Tegyük fel, hogy $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmazok és $x \in K^{\perp}$. Ekkor minden $z \in K$ esetén $\langle x, z \rangle = 0$. Mivel $L \subseteq K$, ezért minden $z \in L$ esetén is $\langle x, z \rangle = 0$, vagyis $x \in L^{\perp}$.
3. Legyen $L \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz és $x \in L$. Ekkor minden $z \in L^{\perp}$ esetén $\langle z, x \rangle = 0$, vagyis $x \in L^{\perp\perp}$.

15.16. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^{\perp}$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ és $W + W^{\perp} = \mathscr{H}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ha $z \in W \cap W^{\perp}$, akkor $\langle z, z \rangle = 0$, vagyis $z = 0$. Legyen $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor $x_W \in W$ és $x - x_W \in W^{\perp}$, tehát az

$$x = x_W + (x - x_W)$$

egyenlőség miatt $W + W^{\perp} = \mathscr{H}$.

15.17. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. A 15.16 tételt alkalmazva a $W^{\perp}$ zárt altérre $W^{\perp\perp} + W^{\perp} = \mathscr{H}$ adódik, ugyanakkor $W + W^{\perp} = \mathscr{H}$ és nyilván $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Ezek alapján $W = W^{\perp\perp}$, ugyanis ha $0 \neq x \in W^{\perp\perp}$, akkor $x \notin W^{\perp}$, tehát $W + W^{\perp} = \mathscr{H}$ miatt $x \in W$.

15.18. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér, akkor $\overline{L} = L^{\perp\perp}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér. Mivel $L \subseteq \overline{L}$, ezért a 15.15 tétel alapján $\overline{L}^{\perp} \subseteq L^{\perp}$, amiből viszont $L^{\perp\perp} \subseteq \overline{L}^{\perp\perp}$ adódik. A 15.17 tételt alkalmazva az $\overline{L}$ lineáris altérre azt kapjuk, hogy $\overline{L} = \overline{L}^{\perp\perp}$. Ezek alapján $L^{\perp\perp} \subseteq \overline{L}$. Az $\overline{L} \subseteq L^{\perp\perp}$ tartalmazás pedig a 15.15 tétel alapján nyilvánvaló.

15.4. Ortogonális projekciók

15.19. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a*

$$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \qquad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. *A P leképezés lineáris.*
2. *A P leképezésre $\operatorname{Ran} P = W$ és $\operatorname{Ker} P = W^\perp$.*
3. *$P^2 = P$*
4. *Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $Px = x_W$.
1. Legyen $x, y \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár. A 15.12 tétel alapján ekkor minden $z \in W$ esetén $\langle x - Px, z\rangle = \langle y - Py, z\rangle = 0$. Tehát minden $z \in W$ esetén

$$\langle x + y - (Px + Py), z\rangle = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle \lambda x - \lambda Px, z\rangle = 0$$

amiből megint a 15.12 tétel alapján $P(x + y) = Px + Py$ és $P(\lambda x) = \lambda Px$ adódik.
2. A P leképezés definíciója alapján $\operatorname{Ran} P \subseteq W$ és ugyancsak a definíció alapján minden $x \in W$ vektorra $Px = x$ teljesül, tehát $W \subseteq \operatorname{Ran} P$. Ha $x \in \operatorname{Ker} P$, akkor $Px = 0$, a 15.12 tétel alapján pedig ekkor $x - Px = x$ merőleges a W altérre, tehát $x \in W^\perp$. Ha $x \in W^\perp$, akkor $x - Px$ is merőleges a W altérre, ami $Px = 0$ mellett következik be, tehát $x \in \operatorname{Ker} P$.
3. Minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $Px \in W$ és minden $z \in W$ esetén definíció szerint $Pz = z$, ezért $P^2x = P(Px) = Px$.
4. Mivel $W \neq \{0\}$, ezért létezik olyan $z \in W$, hogy $\|z\| = 1$ és ekkor az operátornormára

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Px\| \ge \|Pz\| = \|z\| = 1$$

teljesül, vagyis $1 \le \|P\|$.

15.5. Riesz-féle reprezentációs tétel

15.20. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathscr{H}'$, azaz $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén*

$$\varphi(x) = \langle z, x\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ha $\varphi = 0$, akkor $z = 0$ olyan vektor, melyre

$$\forall x \in \mathscr{H} : \qquad \varphi(x) = \langle z, x\rangle .$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\varphi \neq 0$. Ekkor létezik olyan $y \in \mathscr{H}$, melyre $\varphi(y) \neq 0$. A $W = \operatorname{Ker} \varphi$ lineáris altér zárt φ folytonossága miatt, így erre az altérre lehet ortogonálisan vetíteni. Legyen P a W altérre való ortogonális vetítés operátora és tekintsük az $y' = y - Py$ vektort, melyről a 15.12 tétel alapján tudjuk, hogy ortogonális a W altérre, azaz $y' \in W^\perp$.
Ekkor $y' \neq 0$, hiszen

$$0 \neq \varphi(y) = \varphi(Py) + \varphi(y') = \varphi(y').$$

Ekkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor esetén

$$\varphi(y')x - \varphi(x)y' \in \operatorname{Ker} \varphi = W$$

amiből $y' \in W^\perp$ miatt

$$\langle y', \varphi(y')x - \varphi(x)y'\rangle = 0$$

adódik. Vagyis minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\langle y', \varphi(y')x \rangle = \langle y', \varphi(x)y' \rangle \quad \Rightarrow \quad \varphi(y') \langle y', x \rangle = \varphi(x) \|y'\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y', x \right\rangle = \varphi(x).$$

Tehát a $z = \dfrac{\overline{\varphi(y')}}{\|y'\|^2} y'$ vektorra minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $\varphi(x) = \langle z, x \rangle$ teljesül.
A z vektor egyértelműségét úgy igazoljuk, hogy tegyük fel létezik olyan $z_1, z_2 \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\varphi(x) = \langle z_1, x \rangle = \langle z_2, x \rangle .$$

Ebből az $x = z_1 - z_2$ választással $\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = 0$ adódik, vagyis $z_1 = z_2$.

16. Függvénysorozatok, függvénysorok

16.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

16.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.
Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right\} \to M \qquad t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \to \ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon\big)$$

  teljesül;
- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

  $$\sum_n f_n : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(T, V) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t) \right)$$

  képlettel definiáljuk.
- A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \right\} \to V \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

16.3. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, (M,d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T,M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T,M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N} \forall t \in T: \ (N < n,m \ \rightarrow \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, (M,d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T,M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T,M)$ függvényhez.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T: \ d(f_n(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n,m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T: \ d(f_n(t), f_m(t)) \leq d(f_n(t), f(t)) + d(f(t), f_m(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N} \forall t \in T: \ (N < n,m \ \rightarrow \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n,m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T: \ d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

teljesül, amiből a d metrika folytonossága miatt

$$\forall t \in T: \ \lim_{m\to\infty} d(f_n(t), f_m(t)) = d\left(f_n(t), \lim_{m\to\infty} f_m(t)\right) = d(f_n(t), f(t)) \leq \varepsilon$$

adódik.

16.4. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M,M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M,M')$.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t\in M} d'(f_n(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \quad \Rightarrow \quad d'(f(t), f(x)) \leq d'(f(t), f_{N+1}(t)) + d'(f_{N+1}(t), f_{N+1}(x)) + d'(f_{N+1}(x), f(x)) < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

16.5. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M,V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M,V)$.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér és $(V,\|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M,V)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 16.4 tételt adódik az állítás.

16.6. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M,M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény,* $\operatorname{Dom} f = M$ *és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M,M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.
Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0,\ldots,x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0,\ldots,n\}$ esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z\in B_{r(x_k)}(x_k)} d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k |\ k \in \{0,\ldots,n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0,\ldots,n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \le N < l$ miatt

$$d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $d'(f(z), f_l(z)) < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

16.2. Korlátos folytonos függvények tere

16.7. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M,d) metrikus tér és $f : T \to M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az *f függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \to M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(T,M)$. Ha (T,d_T) metrikus tér, akkor a $T \to M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^{\mathrm{b}}(T,M)$.

16.8. Tétel. *Legyen $(V,\|\cdot\|)$ normált tér és (M,d) metrikus tér. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M,V) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^{\mathrm{b}}(M,V)$ vektortéren, így $(C^{\mathrm{b}}(M,V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált tér.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\sup}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

16.9. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér és* (M, d) *metrikus tér. Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ *halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre* $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$ *teljesül. Ebben az esetben az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens a* $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ *normált térben.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ (N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)\,,$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x\in M} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.
Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : \ \big(N < n \ \to \ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\big),$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

16.10. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *Banach-tér, valamint* (M, d) *metrikus tér. Ekkor* $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ *Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, (M, d) metrikus tér, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térben. Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\sup} = \sup_{t\in M} \|f_n(t) - f_m(t)\| \geq \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x \in M$ pont esetén az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a V Banach-térben, ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$f : M \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Először megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos függvény, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\| < K$ teljesül. Ezek alapján minden $N < n$ természetes számra és $x \in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{N+1} - f_n\|_{\sup} < 1,$$

vagyis

$$\|f_n(x)\| < 1 + \|f_{N+1}(x)\| < 1 + K$$

adódik, ebből pedig $\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| < K + 1$. Tehát az f függvény korlátos.
A 16.3 tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$.
A 16.9 tétel alapján $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletes konvergenciája éppen a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térbeli $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ konvergenciát jelenti.

16.11. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

Bizonyítás. Legyen T halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in T$ esetén a $\sum_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a V Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénysor minden pontban konvergens.

16.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysorra

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty.$$

Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Definiáljuk az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad n \mapsto \sup_{t\in T} \|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az 5.5 tétel miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

16.13. Tétel. *(Dini-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ teljesül. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon és a $\lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ teljesül. Ha $x \in M$, akkor az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, vagyis konvergens. Tehát létezik az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatnak a pontonkénti határfüggvénye, ami legyen

$$f : M \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, akkor a 16.4 tétel értelmében az f függvény is folytonos.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonos és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor minden $x \in M$ ponthoz van olyan $N_x \in \mathbb{N}$ szám, melyre $f_{N_x}(x) > f(x) - \varepsilon$ teljesül és definiáljuk az $U_x = \{y \in M | \ f_{N_x}(y) > f(y) - \varepsilon\}$ halmazt. Ekkor minden $x \in M$ esetén U_x nyílt halmaz, hiszen $U_x = \overset{-1}{(f_{N_x} - f)}\,(]-\varepsilon, \infty[)$, valamint

$$M = \bigcup_{x\in M} U_x.$$

Mivel M kompakt, ezért az $(U_x)_{x\in M}$ lefedésnek létezik véges részlefedése, vagyis létezik véges sok $x_1, \ldots, x_n \in M$ pont, melyre

$$M = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_{x_1}, \ldots, N_{x_n}\}$. Megmutatjuk, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra és minden $x \in M$ pontra

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen $N < n \in \mathbb{N}$ és $x \in M$ rögzített. Ekkor létezik olyan $i \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $x \in U_{x_i}$, vagyis $f_{N_{x_i}}(x) > f(x) - \varepsilon$. Mivel $N_{x_i} \le N < n$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként monoton növő, ezért $f_n(x) \ge f_{N_{x_i}}(x) > f(x) - \varepsilon$, tehát

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

16.14. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : A \to V$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f : A \to V$ függvényhez, valamint legyen $a \in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_n$ határérték, akkor a $\lim\limits_a f$ határérték is létezik, valamint*

$$\lim_a f = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_a f_n\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, V)$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f : A \to V$ függvényhez, valamint legyen $a \in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_n = c_n$ határérték. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat a $(C(A, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térben, ezért Cauchy-sorozat is, vagyis létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f_n - f_m\|_{\sup} = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon.$$

Tehát minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\|c_n - c_m\| = \lim_{x\to a} \|f_n(x) - f_m(x)\| \le \varepsilon,$$

vagyis a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat a V Banach-térben, ezért konvergens is. Legyen $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Most megmutatjuk, hogy $\lim\limits_a f = c$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ teljesül a $(C(A, V), \|\cdot\|_{\sup})$ térben, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|c_n - c\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $m = \max\{N_1, N_2\} + 1$. (Ekkor $\|f_m - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$ és $\|c_m - c\| < \frac{\varepsilon}{3}$.) Mivel $c_m = \lim_{x\to a} f_m(x)$, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in A$ elemre $0 < d(a,x) < \delta$ esetén $\|f_m(x) - c_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$ teljesül. Ekkor minden $x \in A$ elemre $0 < d(a,x) < \delta$ esetén

$$\|f(x) - c\| \leq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - c_m\| + \|c_m - c\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

16.3. Hatványsorok

16.15. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

16.16. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$
4. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.
3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in B_r(0)} \|a_n x^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x\in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az 5.31 tételt használtuk.
1. Ha $x \in V$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.
2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum_n a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 14.9 tétel alapján $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\left\|a_k x^k\right\| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{\|a_k\|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \,\Big|\, k \geq n \right\} \leq \sup\left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \,\Big|\, k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.
4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in \left]|x|, R_a\right[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 16.12 Weierstrass-tétel, tehát itt egyenletesen is konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.
5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 16.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

16.4. Abel-tétel

16.17. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n < \infty$ és $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $\alpha_n = A - \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right\| =$$
$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} \|(A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1})\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\|.$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\alpha_n\| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \leq \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \leq K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \leq C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\|$$

teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $\|\alpha_n\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \leq \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

16.18. Definíció. Ha V vektortér és $a, b \in V$, akkor a

$$[a,b] \overset{\triangle}{=} \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}, \qquad]a,b[\overset{\triangle}{=} \{ta + (1-t)b \mid t \in]0,1[\}$$

halmazokat az *a és b végpontú szakasznak*, illetve *nyílt szakasznak* nevezzük.

16.19. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ szakaszon és a $P_a|_{[0,z]}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ha $x \in [0, z[$, akkor a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \left(\frac{x}{z}\right)^k = \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right) \left(\sum_{j=n}^{k} a_j z^j \right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j\end{aligned}$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sor konvergens, ezért a 16.17 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| < \infty,$$

valamint $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. Mivel $\frac{x}{z} \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right| \left\| \sum_{j=n}^{k} a_j z^j \right\| + \left|\frac{x}{z}\right|^{n+m} \left\| \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j \right\| \le \\ &\le \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right| C_n + \left|\frac{x}{z}\right|^{n+m} C_n \le \\ &\le C_n \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} C_n \le \\ &\le C_n \left(\left(\frac{x}{z}\right)^n - \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} \right) + \left(\frac{x}{z}\right)^{n+m} C_n = C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| \le \lim_{m\to\infty} C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n = C_n \left(\frac{x}{z}\right)^n \le C_n.$$

A z pontban

$$\left\| P_a(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0, z]$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \le C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x\in[0,z]} \left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \leq C_n.$$

Mivel a 16.17 tétel alapján a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ intervallumon.

16.5. Lineáris leképezés függvénye

16.20. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a*

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$ olyan elem, melyre $\|A\| < R_a$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \|A\|^k .$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k$ sor konvergens az 5.31 Cauchy–Hadamard-tétel miatt, hiszen a $k \mapsto |a_k|$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara is R_a, továbbá az $\|A\|$ számra $|\|A\|| < R_a$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|a_k A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k ,$$

vagyis a $\sum_n a_n A^n$ sor abszolút konvergens a $\mathscr{L}(V, V)$ Banach-térben, ezért konvergens is.

16.21. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

16.22. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \to \{0, 1\} \qquad (i, j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j; \\ 1, & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

függvény a *Kronecker-féle delta-függvény.*

16.23. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.*

1. *Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol*

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. *Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \tag{16.1}$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \dfrac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$\text{ha} \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & \text{ha} \quad i = j; \\ 1, & \text{ha} \quad j - i = 1, \end{cases} \qquad \text{akkor} \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j; \\ \dfrac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & \text{ha} \quad i \leq j. \end{cases}$$

3. *Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\ldots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\ldots,k}$ blokkok állnak.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan analitikus függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel. Ekkor az $m \mapsto a_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$ olyan sorozat, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

teljesül, továbbá az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara végtelen. A 16.20 tétel alapján minden $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezésre az

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$

sor konvergens.
Mivel az f függvény mindenhol konvergens hatványsorral van meghatározva, ezért az f függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor deriválható és minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \right) x^{m-k} = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

teljesül.
Legyen S invertálható mátrix és legyen $B = S^{-1}AS$. Ekkor $A = SBS^{-1}$ teljesül, valamint minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m} a_k A^k = \sum_{k=0}^{m} a_k SB^k S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) S^{-1}.$$

Mivel a mátrixszal való szorzás folytonos művelet, ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \lim_{m\to\infty} \left(S \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) S^{-1} \right) = S \left(\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k B^k \right) \right) S^{-1} =$$
$$= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \right) S^{-1} = Sf(B)S^{-1}.$$

1. Ha B diagonális mátrix, akkor hatványaira teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} B_{ii}^m, & \text{ha} \quad i = j; \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq j \end{cases}$$

teljesül, amiből adódik az állítás.
2–3. Tegyük fel, hogy B olyan mátrix, mely egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis (16.1) alakú. Ekkor teljes indukcióval igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j - i < 0; \\ \lambda^m, & \text{ha} \quad j - i = 0; \\ \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i}, & \text{ha} \quad 0 < j - i \leq m; \\ 0, & \text{ha} \quad j - i > m \end{cases}$$

teljesül. Ekkor az $f(B)$ mátrix $i, j \in \{1, \dots, n\}$ elemeire
$j < i$ esetén $f(B)_{ij} = 0$;
$j = i$ esetén $f(B)_{ii} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m = f(\lambda)$;
$j > i$ esetén

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i} = \frac{1}{(j-i)!} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-(j-i))!} \lambda^{k-(j-i)} = \frac{1}{(j-i)!} f^{(j-i)}(\lambda)$$

teljesül.

16.24. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \mathrm{Sp}(A) \to \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \stackrel{\triangle}{=} Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

16.6. Approximáció Bernstein-polinommal

16.25. Definíció. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f *függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

16.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]} \left\|B_n^f(t) - f(t)\right\|\right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\right\|. \tag{16.2}$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{k \in \{0, \dots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| < \delta\right\}$$
$$J_n = \left\{k \in \{0, \dots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \geq \delta\right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (16.2) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| &\leq \sum_{k\in I_n} \binom{n}{k}\left\|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\|\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \\
&+ \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k}\left\|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\|\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \sum_{k\in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq \\
&\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} = \\
&= \varepsilon' + 2C \sum_{k\in J_n} \binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n\right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\leq\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(k-\frac{t-a}{b-a}\cdot n\right)^2\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\leq$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k},$$

ahol $x=\dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y,z\in\mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^kz^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$ny(y+z)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ky^kz^{n-k}$$
$$n(n-1)y^2(y+z)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)y^kz^{n-k}$$

adódik. Ha $z=1-y$, akkor ezekből

$$ny=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ky^k(1-y)^{n-k}$$
$$n(n-1)y^2+ny=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2y^k(1-y)^{n-k}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|,|1-x|\leq1$

$$\left\|B_n^f(t)-f(t)\right\|\leq\varepsilon'+\frac{2C(b-a)^2}{\delta^2n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2}$ és $N\in\mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N>\dfrac{4C(b-a)^2}{\delta^2\varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n>N$ és $t\in[a,b]$ esetén

$$\left\|B_n^f(t)-f(t)\right\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2C(b-a)^2}{\delta^2n}\leq\varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t\in[a,b]}\left\|B_n^f(t)-f(t)\right\|\leq\varepsilon.$$

16.27. Tétel. *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. A $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Az előző, 16.26 tétel következménye.

16.7. Stone-féle sűrűségi tétel

16.28. Definíció. Legyen T tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz szétválasztó T felett*, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *A halmaz lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

16.29. Tétel. *Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \ldots, f_n \in A$, akkor*

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\}, \inf\{f_i, \ldots, f_n\} \in A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ lineáris függvényháló, valamint legyen $f, g \in A$. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(x, y) = \frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2} \qquad \inf(x, y) = \frac{x + y}{2} - \frac{|x - y|}{2}$$

teljesül, ezért

$$\sup(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \qquad \inf(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2},$$

vagyis $\sup(f, g), \inf(f, g) \in A$. Ebből következik, hogy véges sok A halmazban lévő függvény infimuma és szuprémuma is eleme az A halmaznak.

16.30. Tétel. *(Stone-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.

1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan szétválasztó függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Legyen továbbá $f \in C(M, \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik $u \in A$, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in M$ tetszőleges, ha $x \neq y$, akkor létezik olyan $h_{x,y} \in A$, melyre $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$, ekkor legyen $u_{x,y} : M \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = \frac{h_{x,y}(t) - h_{x,y}(x)}{h_{x,y}(y) - h_{x,y}(x)} \cdot (f(y) - f(x)) + f(x);$$

ha $x = y$, akkor legyen $u_{x,y} : M \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = f(x).$$

Mivel A lineáris altér, ezért minden $x, y \in M$ esetén $u_{x,y} \in A$, valamint $u_{x,y}(x) = f(x)$ és $u_{x,y}(y) = f(y)$. Minden $x, y \in M$ esetén legyen

$$U_{x,y} = \{t \in M |\ u_{x,y}(t) > f(t) - \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_{x,y} \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_{x,y} = \overset{-1}{(u_{x,y} - f)}(]-\varepsilon, \infty[)$ azonosság miatt $U_{x,y}$ nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az $U_{x,y}$ konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{y \in M} U_{x,y},$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $y_1, \ldots, y_n$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x,y_i}.$$

Minden $x \in M$ esetén legyen $u_x : M \to \mathbb{R}$

$$u_x = \sup\{u_{x,y_i} |\ i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló, ezért a 16.29 tétel alapján $u_x \in A$, valamint minden $t \in M$ pont esetén $u_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Most minden $x \in M$ esetén legyen

$$U_x = \{t \in M |\ u_x(t) < f(t) + \varepsilon\}.$$

Ekkor $U_x \subseteq M$ nyílt halmaz, hiszen az $U_x = \overset{-1}{(u_{x,y} - f)}(]-\infty, \varepsilon[)$ azonosság miatt U_x nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az U_x konstrukciója folytán

$$M = \bigcup_{x \in M} U_x,$$

amiből M kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $x_1, \ldots, x_m$, melyre

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}.$$

Ekkor legyen $u : M \to \mathbb{R}$

$$u = \inf \{u_{x_i} |\ i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Mivel A lineáris függvényháló ezért a 16.29 tétel alapján $u \in A$, valamint minden $t \in M$ esetén

$$f(t) - \varepsilon < u(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Tehát $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$, ezért $\overline{A} = C(M, \mathbb{R})$.

16.8. Stone–Weierstrass-féle sűrűségi tétel

16.31. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Megmutatjuk, hogy $\overline{A}$ olyan szétválasztó lineáris függvényháló, mely tartalmazza a konstans függvényeket, ekkor ugyanis a Stone-tétel miatt $\overline{\overline{A}} = C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Az nyilvánvaló, hogy $\overline{A}$ lineáris altér, szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, egyedül az szorul igazolásra, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$.
Először megmutatjuk, hogy minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel f kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért az értékkészlete is kompakt halmaz, vagyis létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $\operatorname{Ran} f \subseteq [-c, c]$. A $\sqrt{\ } : [0, c^2] \to [0, c]$ függvény kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért létezik olyan $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, melyre

$$\sup_{x \in [0, c^2]} \left|p(x) - \sqrt{x}\right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sup_{t \in M} \left||f(t)| - (p \circ f^2)(t)\right| \le \sup_{y \in [-c, c]} \left||y| - p(y^2)\right| = \sup_{x \in [0, c^2]} \left|\sqrt{x} - p(x)\right| < \varepsilon.$$

Mivel A algebra, ezért $\tilde{f} = p \circ f^2 \in A$ olyan elem, melyre $\left\||f| - \tilde{f}\right\|_{\sup} < \varepsilon$, vagyis $|f| \in \overline{A}$.
Most megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in \overline{A}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $f_A \in A$, melyre $\|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$. Ekkor $|f_A| \in \overline{A}$, valamint

$$\||f| - |f_A|\|_{\sup} \le \|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$$

miatt $|f| \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

16.32. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\overline{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(M, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és zárt a konjugálásra nézve. Megmutatjuk, hogy

$$A' = \{\mathrm{Re} \circ u |\ u \in A\}$$

olyan függvényalgebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és melyre melyre $A' \subseteq A$ teljesül. Mivel A zárt a konjugálásra, ezért ha $a \in A'$ és $u \in A$ olyan, hogy $a = \mathrm{Re}\, u$, akkor az

$$a = \frac{u + \overline{u}}{2}$$

egyenlet alapján $a \in A$. Vagyis $A' \subseteq A$. Ha $a_1, a_2 \in A'$, akkor létezik olyan $u_1, u_2 \in A$, melyre $a_1 = \mathrm{Re} \circ u_1$ és $a_2 = \mathrm{Re} \circ u_2$ teljesül. Mivel A algebra és zárt a konjugálásra, ezért az

$$a_1 a_2 = \mathrm{Re}(u_1) \cdot \mathrm{Re}(u_2) = \frac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \frac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$$

egyenlet alapján az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 a_2 = \mathrm{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 a_2 \in A'$. Az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} + \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 + a_2 = \mathrm{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 + a_2 \in A'$. Hasonlóan igazolható, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda a_1 \in A'$. Tehát A' olyan függvényalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Ha $x, y \in M$ olyan, hogy $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in A$, melyre $u(x) \neq u(y)$. Ha $\mathrm{Re}(u(x)) \neq \mathrm{Re}(u(y))$, akkor az $a = \mathrm{Re}(u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$; valamint, ha $\mathrm{Im}(u(x)) \neq \mathrm{Im}(u(y))$, akkor az $a = \mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$, tehát A' szétválasztó.
2. Legyen $f \in C(M, \mathbb{C})$ tetszőleges elem és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f_1 = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ és $f_2 = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$ függvényekre $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$ és $f_1, f_2 \in C(M, \mathbb{R})$ teljesül. Ezért a 16.31 Stone–Weierstrass-tétel értelmében létezik olyan $g_1, g_2 \in A' \subseteq A$ függvény, melyre $\|f_1 - g_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - g_2\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $g = g_1 + \mathrm{i}\, g_2$. Ekkor $g \in A$, valamint

$$\|f - g\|_{\sup} = \|(f_1 - g_1) + \mathrm{i}(f_2 - g_2)\|_{\sup} \leq \|f_1 - g_1\|_{\sup} + \|f_2 - g_2\|_{\sup} < \varepsilon$$

teljesül.

16.33. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

17. Differenciálszámítás

17.1. Differenciálhatóság

Jelölés. A jelen fejezetben követjük azt a matematika irodalomban elterjedt konvenciót, hogy normált térre pusztán az alaphalmaz kiírásával hivatkozunk és a normát nem említjük amennyiben ez nem okoz félreértést. Továbbá U, V normált terek és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés esetén $\|A\|$ az operátornormát jelenti, vagyis

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in U\\ \|x\|\le 1}} \|Ax\| .$$

Valamint a jelen fejezetben csak $\mathbb{R}$ feletti normált terekkel foglalkozunk.

17.1. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$ olyan, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in U$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x\to a} \frac{A(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x - a)}{\|x - a\|} \right\| < \varepsilon.$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\,\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x - a)}{\|x - a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon$$

ellentmondás adódik.

17.2. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : U \to V$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

  $$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U, V) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{\|x - a\|} = 0 \right\}$$

  függvényt.

- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

17.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az $A \in \mathscr{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \ \Big(\|x - a\| < \delta \ \to \ \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül.

Bizonyítás. A derivált és a határérték definíciójából következik.

17.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.
Ha f differenciálható az a pontban és létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, akkor legyen A olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a},$$

tehát

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|},$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right|$$

ezért

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c\right),$$

tehát létezik a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$

határérték és $c = f'(a)$.

17.5. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 17.3 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x) - f(a) - (\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \le \|x-a\|$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x) - f(a)\| \le \|x-a\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}f)(a)\|)$$

adódik. Ezért $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$, vagyis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az f függvény a pontbeli folytonossága.

17.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

17.6. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a)\cdot(\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$;*
4. *ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és*

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \frac{\varphi(a)(\mathrm{D}f)(a) - f(a)(\mathrm{D}\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ olyan, hogy f, g és φ differenciálható az a pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)-G(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

1. Az

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)-(F+G)(x-a)}{\|x-a\|} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)-G(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy $f+g$ is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F+G$.
2. Az

$$\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)-(cF)(x-a)}{\|x-a\|} = c\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

egyenlőség igazolja, hogy cf is differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \\
&= \Big\|\Big(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\Big)f(x) + \varphi(a)\Big(f(x) - f(a) - F(x-a)\Big) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a)\Big\| \le \\
&\le \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \\
&\quad + \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \le \\
&\le \lim_{x\to a}\left\|\frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \lim_{x\to a}\left\|\frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|}\right\| + \\
&\quad + \lim_{x\to a}\|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| = \\
&= 0 \cdot \|f(a)\| + |\varphi(a)| \cdot 0 + 0 \cdot \|\Phi\| = 0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a}\frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis a φf függvény is differenciálható az a pontban és $\mathrm{D}(\varphi f) = f(a)\Phi + \varphi(a)F$.
4. Tegyük fel, hogy $\varphi(a) \ne 0$. Mivel a φ függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is. A folytonosság miatt azonban létezik olyan $\delta \in \,]0, r[$ paraméter, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $\varphi(x) \ne 0$.
Először megmutatjuk, hogy

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$$

teljesül. A minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra teljesülő

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)\right\| = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(a) - \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a)\right\| = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a)\right\| = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a) + \left(1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right)\Phi(x-a)\right\| \le \\
&\le \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left(\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\|\right)
\end{aligned}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left\|\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \le \\
&\le \lim_{x\to a}\frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left(\frac{\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\|}{\|x-a\|} + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\|\right) = \\
&= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(a)|}\left(0 + \left|1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\|\right) = 0
\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik, vagyis az $\frac{1}{\varphi}$ függvény is differenciálható az a pontban és $\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$ teljesül.
A 3. pont alapján ekkor

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\cdot f\right)\right)(a) = f(a)\cdot\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) + \frac{1}{\varphi}(a)\cdot(\mathrm{D}f)(a) =$$
$$= -\frac{f(a)}{\varphi^2(a)}\Phi + \frac{1}{\varphi(a)}F = \frac{\varphi(a)F - f(a)\Phi}{\varphi^2(a)}$$

teljesül.

17.7. Tétel. *Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A, V)$ vektortér.*

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

17.8. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$ olyan, hogy g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, tehát

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in V :$$
$$\|y - g(a)\| < \delta_1 \;\to\; \|f(y) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(y - g(a))\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|y - g(a)\|.$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontan, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$, tehát

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U :$$
$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \leq \varepsilon_2 \cdot \|x - a\|.$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \qquad \|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\|.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\|.$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in U$ vektorra, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\|$$
$$\|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\|$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \cdot \|x - a\|.$$

Ezek alapján, ha $\|x-a\|<\delta'$, akkor

$$\begin{aligned}
&\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| = \\
&= \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))+ \\
&\qquad +(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(x-a)\| \le \\
&\le \|f(g(x))-f(g(a))-(\mathrm{D}f)(g(a))(g(x)-g(a))\| + \\
&\qquad + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\cdot\|(g(x)-g(a))-(\mathrm{D}g)(a)(x-a)\| \le \\
&\le \varepsilon_1\|g(x)-g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\,\varepsilon_1\|x-a\| \le \\
&\le \varepsilon_1(\varepsilon_1\|x-a\|+\|(\mathrm{D}g)(a)\|\,\|x-a\|)+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|\,\varepsilon_1\|x-a\| = \\
&= \varepsilon_1(\varepsilon_1+\|(\mathrm{D}g)(a)\|+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|)\,\|x-a\|
\end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1(\varepsilon_1+\|(\mathrm{D}g)(a)\|+\|(\mathrm{D}f)(g(a))\|)<\varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta'\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x-a\|<\delta'$ esetén

$$\|f(g(x))-f(g(a))-((\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a))(g(x)-g(a))\|\le\varepsilon\cdot\|x-a\|,$$

ezért a $f\circ g$ függvény deriváltja az a pontban $(\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a)$.

17.3. Iránymenti derivált

17.9. Definíció. Legyen U vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f:U\to V$ függvény, $a\in\operatorname{Dom}f$ és $e\in U$. Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}}\frac{f(a+te)-f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az *f függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

17.10. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f:U\to V$ függvény, valamint $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e\in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a)=((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f:U\to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$ pontban, valamint legyen $A=(\mathrm{D}f)(a)$ és $e\in U$ tetszőleges vektor. Az $e=0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e\neq 0$. A

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te)-f(a)}{t}=Ae$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény a pontbeli differenciálhatósága alapján az $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta'\in\mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x\in B_{\delta'}(a):\ \ \|f(x)-f(a)-A(x-a)\|\le\frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot\|x-a\|$$

teljesül. Ha $\delta=\dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t\in\mathbb{R}$, $|t|<\delta$, akkor $a+te\in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te)-f(a)-A(te)\|\le\frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot|t|\,\|e\|=\varepsilon\,|t|\,.$$

Amiből $\lim\limits_{t\to 0}\left\|\dfrac{f(a+te)-f(a)-tA(e)}{t}\right\|=0$ következik.

17.11. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha\beta : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u))$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u))$$

leképezés.

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha\beta : U \to W \qquad & u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u)) \\ \tau : U \to V \qquad & u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u)) \end{aligned}$$

függvényeket. Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}(\alpha\beta))(a) = \tau$ teljesül. Ehhez tekintsük az alábbi határértéket.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \frac{(\alpha\beta(x)) - (\alpha\beta(a)) - \tau(x-a)}{\|x-a\|} = \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a+h)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \tau(h)}{\|h\|} = \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|} + \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha(a+h)\beta(a) - \alpha(a)\beta(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))\beta(a)}{\|h\|} + \\ &\qquad\qquad + \frac{(\alpha(a+h) - \alpha(a))(\beta(a+h) - \beta(a))}{\|h\|} \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az utolsó összeg mindhárom tagjának nulla a határértéke.
Az első összeadandóban, mivel $\alpha(a)$ folytonos lineáris leképezés, ezért a derivált definíciója alapján

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a)\beta(a+h) - \alpha(a)\beta(a) - \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|} = \\ &\quad = \alpha(a)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\beta(a+h) - \beta(a) - ((\mathrm{D}\beta)(a)(h))}{\|h\|}\right) = \alpha(a)(0) = 0 \end{aligned}$$

teljesül.
A második tag esetében szintén nulla a határérték.

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(a+h)\beta(a) - \alpha(a)\beta(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))\beta(a)}{\|h\|} = \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\alpha(a+h) - \alpha(a) - ((\mathrm{D}\alpha)(a)(h))}{\|h\|}\right)\beta(a) = 0(\beta(a)) = 0 \end{aligned}$$

A harmadik összeadandónál a differenciálhatóság jellemzéséről szóló 17.3 tétel alapján létezik olyan $\delta_\alpha, \delta_\beta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $h \in U$ vektorra

$$\begin{aligned} \|h\| < \delta_\alpha \quad &\to \quad \|\alpha(a+h) - \alpha(a) - (\mathrm{D}\alpha)(a)(h)\| \leq \|h\| \\ \|h\| < \delta_\beta \quad &\to \quad \|\beta(a+h) - \alpha(a) - (\mathrm{D}\beta)(a)(h)\| \leq \|h\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\delta = \min\{\delta_\alpha, \delta_\beta\}$, akkor minden $h \in U$ vektorra $\|h\| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} \|\alpha(a+h) - \alpha(a)\| &\leq \|h\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}\alpha)(a)\|) \\ \|\beta(a+h) - \beta(a)\| &\leq \|h\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}\beta)(a)\|), \end{aligned}$$

vagyis ha $h \in B_\delta \setminus \{0\}$, akkor

$$\left\| \frac{(\alpha(a+h)-\alpha(a))(\beta(a+h)-\beta(a))}{\|h\|} \right\| \leq \|h\| \cdot (1+\|(\mathrm{D}\alpha)(a)\|)\,(1+\|(\mathrm{D}\beta)(a)\|)\,,$$

amiből már következik a

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha(a+h)-\alpha(a))(\beta(a+h)-\beta(a))}{\|h\|} = 0$$

határérték.

17.12. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v)$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))v$$

leképezés.

Bizonyítás. Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ha bevezetjük az

$$\beta : U \to V \qquad u \mapsto v$$

függvényt, akkor $\alpha\beta = \alpha v$, ahol

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v).$$

Tekintettel arra, hogy a konstans függvény deriváltja az azonosan nulla függvény; az előző 17.11 tétel a fenti α és β szereposztással egyből bizonyítja a tételt.

17.13. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\mathrm{Ran}((\mathrm{D}f)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(\mathrm{D}f)(a)$ derivált $U \to W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.*

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban és vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Ha $v \in U$, akkor az

$$Av = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

egyenlőség és a minden $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számra $a + tv \in \mathrm{Dom}\, f$ esetén teljesülő $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in W$ tartalmazás miatt $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in \overline{W} = W$.

17.4. Néhány speciális függvény deriváltja

17.14. Tétel. *Legyen U normált tér, $c \in U$ és*

$$L_c : U \to U \qquad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$\mathrm{D}L_c : U \to \mathscr{L}(U, U) \qquad a \mapsto \mathrm{id}_U$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér és $c \in U$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel minden $x \in U$ esetén
$$L_c x - L_c a = x - a$$
teljesül, ezért
$$\lim_{x \to a} \frac{L_c x - L_c a - \mathrm{id}_U(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$
amiből $(\mathrm{D}L_c)(a) = \mathrm{id}_u$ következik.

17.15. Tétel. *Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U, V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és*
$$\mathrm{D}A : U \to \mathscr{L}(U, V) \qquad a \mapsto A$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U, V)$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel az A linearitása miatt minden $x \in U$ esetén
$$Ax - Aa - A(x-a) = 0$$
teljesül, ezért
$$\lim_{x \to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$
amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

17.16. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*
$$\rho : U \to V \qquad x \mapsto A\left(x, \ldots, x\right),$$
függvény deriváltjára
$$\mathrm{D}\rho : U \to \mathscr{L}(U, V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a, \ldots, a))$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Legyen
$$B : U \to V \qquad x \mapsto nA(x, a, \ldots, a).$$
Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}\rho)(a) = B$.
Az n szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $x, y \in U$ esetén
$$\rho(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left(x^{[k]}, y^{[n-k]}\right),$$
vagyis
$$\rho(x) - \rho(a) = \rho(a + (x-a)) - \rho(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) - \rho(a) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right)$$
teljesül. Ebből az $\|x-a\| < 1$ esetben
$$\|\rho(x) - \rho(a) - B(x-a)\| = \left\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) \right\| \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|A\| \, \|x-a\|^k \, \|a\|^{n-k} \le$$
$$\le \|x-a\|^2 \, \|A\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|x-a\|^{k-2} \, \|a\|^{n-k} \le \|x-a\|^2 \, \|A\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|a\|^{n-k} =$$

$$= \|x-a\|^2 \|A\| (1+\|a\|)^n$$

adódik. Vagyis ha $0 < \|x-a\| < 1$, akkor

$$\left\| \frac{\rho(x)-\rho(a)-B(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \|x-a\| \|A\| (1+\|a\|)^n ,$$

amiből

$$\lim_{x\to a} \frac{\rho(x)-\rho(a)-B(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

következik.

17.17. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\eta : U \to V \qquad x \mapsto A(x-c, \ldots, x-c),$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\eta : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a-c, \ldots, a-c))$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Bevezetve a

$$\begin{aligned} \rho :&U \to V \qquad x \mapsto A(x, \ldots, x), \\ L_c :&U \to U \qquad x \mapsto x-c \end{aligned}$$

függvényeket $\eta = \rho \circ L_c$ adódik. A közvetett függvény deriválási szabálya és a 17.14, 17.16 tétel alapján minden $a, x \in U$ esetén

$$((\mathrm{D}\rho)(a))(x) = (\mathrm{D}\rho)(L_c(a)) \circ ((\mathrm{D}L_c)(a))(x) = (\mathrm{D}\rho)(a-c) \circ (\mathrm{id}_U)(x) = nA(x, a-c, \ldots, a-c)$$

teljesül.

17.18. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor A olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. Legyen $a \in A$ tetszőleges pont és $\tau \in \mathscr{L}(A,A)$, $\tau(b) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}$. A minden $h \in A \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(a+h)-f(a)-\tau(h)}{\|h\|} \right\| &= \frac{1}{\|h\|} \left\| (a+h)^n - a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k h a^{n-1-k} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^k \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^{k-2} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \\ &\leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} = \|h\| \cdot (1+\|a\|)^n \end{aligned}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a) = \tau$.

17.19. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és*

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V,V) \mid \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V)\right\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$\mathrm{D}i : G(A) \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V,V) \mid \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V)\right\}.$$

Legyen $a \in G(A)$ tetszőleges pont, $\tau \in \mathscr{L}(A,A)$, $\tau(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ és jelölje 1 az A egységelemét, vagyis az id_V leképezést. Ha $0 \neq h \in A$ és $\|h\| \leq \dfrac{1}{2\left\|a^{-1}\right\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{i(a+h)-i(a)-\tau(h)}{\|h\|}\right\| &= \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|(a+h)^{-1}-a^{-1}+a^{1}ha^{-1}\right\| = \\
&= \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|((1+a^{-1}h)^{-1}-1+a^{-1}h)a^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\|h\|}\cdot\left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-a^{-1}h)^{k}\right\|\cdot\left\|a^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^{k} \leq \frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left\|a^{-1}\right\|\cdot\|h\|\right)^{k} = \\
&= \frac{\left\|a^{-1}\right\|}{\|h\|}\cdot\frac{\left\|a^{-1}\right\|^{2}\cdot\|h\|^{2}}{1-\left\|a^{-1}\right\|\cdot\|h\|} \leq \|h\|\cdot 2\left\|a^{-1}\right\|^{3}
\end{aligned}$$

becslés, amiből következik az állítás.

17.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

17.20. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^{+}$, $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ index esetén az $\mathrm{pr}_i \circ f : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^{+}$, $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén vezessük az $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ függvényt.
Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban és legyen $i \in \{1,\ldots,n\}$. Mivel a pr_i projekció függvény folytonos lineáris leképezés, a 17.15 tétel alapján deriválható és a deriváltja minden pontban önmaga. Felhasználva még az összetett függvény deriválási szabályáról szóló 17.8 tételt

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = (\mathrm{D}\,\mathrm{pr}_i)(f(a)) \circ (\mathrm{D}f)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

adódik.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ index esetén az $f_i : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban, és legyen $B_i = (\mathrm{D}f_i)(a)$. Tekintsük a

$$B : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i \qquad x \mapsto (B_1x,\ldots,B_nx)$$

leképezést. Ekkor B folytonos lineáris leképezés, hiszen

$$\begin{aligned}\|B\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(B_1x,\ldots,B_nx)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \max\{\|B_kx\| \,|k\in\{1,\ldots,n\}\} \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \max\{\|B_k\|\cdot\|x\| \,|k\in\{1,\ldots,n\}\} = \\ &= \max\{\|B_k\| \,|k\in\{1,\ldots,n\}\} < \infty\end{aligned}$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy $(Df)(a) = B$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Mivel minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén f_i differenciálható az a pontban, ezért

$$\exists \delta_i \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \Big(\|x-a\| < \delta_i \ \rightarrow\ \|f_i(x) - f_i(a) - B_i(x-a)\| \leq \varepsilon\cdot\|x-a\|\Big)$$

teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_i |\ i\in\{1,\ldots,n\}\}$. Ha $x \in B_\delta(a)$, akkor

$$\begin{aligned}&\|f(x) - f(a) - B(x-a)\| = \\ &\quad= \|(f_1(x)-f_1(a)-B_1(x-a),\ldots,(f_n(x)-f_n(a)-B_n(x-a))\| = \\ &\quad= \max\{\|f_i(x)-f_i(a)-B_i(x-a)\| \mid i\in\{1,\ldots,n\}\} \leq \varepsilon\cdot\|x-a\|\end{aligned}$$

teljesül, vagyis az f függvény differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}f)(a) = B$ teljesül.

17.21. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$, $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és $k \in \{1,\ldots,n\}$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény parciálisan deriválható a k-adik változója szerint az a pontban*, ha az $f\circ \mathrm{in}_{a,k} : U_k \to V$ függvény differenciálható az a_k pontban és ekkor a

  $$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f\circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)$$

  jelölést használjuk.
- Az f függvény *k-adik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a

  $$\partial_k f = \left\{(a,A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f)\times \mathscr{L}(U_k,V) \;\middle|\; \begin{array}{l} f\circ \mathrm{in}_{a,k} \text{ differenciálható az } a_k \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f\circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)\end{array}\right\}$$

  függvényt.
- Az *f függvény parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom}\partial_k f = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény parciálisan folytonosan differenciálható a k-adik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható a k-adik változója szerint és $\partial_k f$ folytonos.

17.22. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ és $a \in U_k$. Ekkor*

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,k})(a) = \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ és $a, x \in U_k$. Ekkor az

$$\mathrm{in}_{u,k}(x) - \mathrm{in}_{u,k}(a) = \mathrm{in}_{0,k}(x-a)$$

egyenlőség miatt

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{in}_{u,k}(x) - \mathrm{in}_{u,k}(a) - \mathrm{in}_{0,k}(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

17.23. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ *normált terek rendszere,* V *normált tér és* $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *pontban. Ekkor minden* $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban. Legyen $k \in \{1, \dots, n\}$. Mivel f és az $\mathrm{in}_{a,k}$ függvény differenciálható, ezért a közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k) = ((\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k))) \circ (\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k) = (\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,k}\,.$$

Legyen $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ tetszőleges vektor. Mivel

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{in}_{0,i}(x_i)$$

és $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés, ezért

$$(\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)) \sum_{i=1}^{n} \mathrm{in}_{0,i}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} ((\mathrm{D}f)(a) \circ \mathrm{in}_{0,i})(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

17.24. Tétel. *Legyen* $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,m}$ *és* $(V_j)_{j=1,\dots,n}$ *normált terek rendszere és* $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ *pontban. Minden* $i \in \{1, \dots, m\}$ *és* $j \in \{1, \dots, n\}$ *esetén legyen*

$$A_{ji} = (\partial_i f_j)(a),$$

ahol $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, *valamint értelmezzük az*

$$A : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j \qquad (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} A_{ni} x_i \right)$$

leképezést. Ekkor $(\mathrm{D}f)(a) = A$ *teljesül, vagyis minden* $x = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ *vektorra és* $j \in \{1, \dots, n\}$ *indexre*

$$((\mathrm{D}f)(a)x)_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a) x_i.$$

Bizonyítás. Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\dots,m}$ és $(V_j)_{j=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ pontban. Minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

legyen $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, és legyen $x \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ tetszőleges vektor.
A 17.20 tétel alapján minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre az f_j függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}f_j)(a)(x) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)(x) = ((\mathrm{D}f)(a)(x))_j \tag{17.1}$$

teljesül.
Minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az f_j függvényre alkalmazva a 17.23 tételt

$$((\mathrm{D}f_j)(a))(x) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)(x_i)$$

adódik.
Tehát minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$((\mathrm{D}f)(a)(x))_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a)(x_i)$$

teljesül, amiből az $A_{ji} = (\partial_i f_j)(a)$ jelölés bevezetésével

$$((\mathrm{D}f)(a)(x))_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ji} x_i$$

következik, amiből már következik az állítás.

17.6. Folytonosan differenciálható függvények

17.25. Tétel. *Legyen U normált tér, $a, b \in U$ és legyen $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható az $]a, b[$ halmazon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $a, b \in U$ és legyen $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható az $]a, b[$ halmazon. Tekintsük a

$$\gamma : [0, 1] \to U \qquad t \mapsto a + t(b - a)$$

függvényt és legyen $\varphi = f \circ \gamma$. Ekkor a φ függvény folytonos a $[0, 1]$ szakaszon, és differenciálható a $]0, 1[$ halmazon. Ezért a Lagrange-tétel értelmében létezik olyan $t_0 \in]0, 1[$ pont, melyre

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \cdot (1 - 0)$$

teljesül. Legyen $c = \gamma(t_0)$. Ekkor a közvetett függvény deriválási szabálya alapján a fenti egyenletet az

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(\gamma(t_0)) \circ (\mathrm{D}\gamma)(t_0) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$$

alakban is felírhatjuk, ami bizonyítja az állítást.

17.26. Tétel. *Legyen V normált tér és legyen $f : [0, 1] \to V$ és $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]0, 1[$ halmazon, továbbá minden $t \in]0, 1[$ elemre $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq g'(t)$ teljesül. Ekkor*

$$\|f(1) - f(0)\| \leq g(1) - g(0).$$

Bizonyítás. Legyen V normált tér és legyen $f : [0,1] \to V$ és $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]0,1[$ halmazon, továbbá minden $t \in]0,1[$ elemre $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq g'(t)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\|f(1) - f(0)\| \leq g(1) - g(0) + \alpha + \beta$$

teljesül, amiből következik az állítás.
Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és ehhez definiáljuk a

$$h : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto g(t) - g(0) - \|f(t) - f(0)\| + \alpha t + \beta$$

függvényt. Mivel h folytonos és $h(0) = \beta \neq 0$, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [0, \delta[$ esetén $h(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H = \{t \in [0,1] \mid 0 \leq h(t)\}$$

halmaz nem üres, hiszen például $\frac{\delta}{2} \in H$, továbbá zárt, mert $H = \overset{-1}{h}([0, \infty[)$, vagyis zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe. A H halmaz korlátos, ezért tekinthetjük a $c = \sup H$ számot, melyre H zártsága miatt $c \in H$ teljesül, továbbá $\frac{\delta}{2} \in H$ miatt $0 < c$.
Ha $c = 1$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor

$$0 \leq h(1) = g(1) - g(0) - \|f(1) - f(0)\| + \alpha + \beta$$

teljesül, amit bizonyítani akartunk.
Tegyük fel, hogy $c < 1$. Ekkor az f és g függvény differenciálható a c pontban, vagyis minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\begin{aligned}
&\exists \delta_f \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0,1] : \quad c < x < c + \delta_f \quad \to \quad \|f(x) - f(c) - ((\mathrm{D}f)(c))(x - c)\| < \varepsilon_1 \cdot (x - c) \\
&\exists \delta_g \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0,1] : \quad c < x < c + \delta_g \quad \to \quad \|g(x) - g(c) - g'(c)(x - c)\| < \varepsilon_1 \cdot (x - c)
\end{aligned}$$

vagyis ha $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, 1 - c\}$, akkor minden $x \in]c, c + \delta[$ számra

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(c) - ((\mathrm{D}f)(c))(x - c)\| &< \varepsilon_1(x - c) \\
\|g(x) - g(c) - g'(c)(x - c)\| &< \varepsilon_1(x - c)
\end{aligned}$$

teljesül. Vagyis ha $x \in]c, c + \delta[$, akkor

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(c)\| &\leq \varepsilon_1(x - c) + \|((\mathrm{D}f)(c))(x - c)\| \leq \varepsilon_1(x - c) + \|(\mathrm{D}f)(c)\| (x - c) \leq \\
&\leq \varepsilon_1(x - c) + g'(c)(x - c) \leq \varepsilon_1(x - c) + \varepsilon_1(x - c) + g(x) - g(c) = \\
&= g(x) - g(c) + 2\varepsilon_1(x - c),
\end{aligned}$$

és ezért

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(0)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(0)\| \leq \\
&\leq g(x) - g(c) + 2\varepsilon_1(x - c) + g(c) - g(0) + \alpha c + \beta = \\
&= g(x) - g(0) - c(2\varepsilon_1 - \alpha) + 2\varepsilon_1 x + \beta.
\end{aligned}$$

Tehát legyen $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2}$, mert ekkor minden $x \in]c, c + \delta[$ esetén

$$\|f(x) - f(0)\| \leq g(x) - g(0) + \alpha x + \beta$$

teljesül, vagyis $0 \leq h(x)$, ezért $x \in H$. Ebből az az ellentmondás adódik, hogy a H halmaz tartalmaz a szuprémumánál nagyobb elemket is.

17.27. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$. Továbbá legyen $a, b \in U$, $a \neq b$, olyan pont, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, f folytonos az $[a, b]$ halmazon és f differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \right) \cdot \|b - a\| .$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$. Továbbá legyen $a, b \in U$, $a \neq b$, olyan pont, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, f folytonos az $[a, b]$ halmazon és f differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $\sup\limits_{x\in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| < \infty$, egyébként nyilvánvaló módon igaz az állítás. Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a

$$\begin{aligned} \gamma &: [0,1] \to U \qquad & t &\mapsto (1-t)a + tb \\ g &: [0,1] \to \mathbb{R} \qquad & t &\mapsto tC\,\|b-a\| \end{aligned}$$

függvényeket és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Ekkor az $\tilde{f}$ és g függvény folytonos a $[0,1]$ halmazon és differenciálható a $]0,1[$ intervallumon. Továbbá, ha $t \in]0,1[$, akkor

$$\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| = \|(\mathrm{D}f)(\gamma(t)) \circ (\mathrm{D}\gamma)(t)\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\right) \cdot \|b-a\|$$

teljesül. Vagyis a $C = \sup\limits_{x\in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|$ választással az adódik, hogy minden $t \in]0,1[$ pontra $\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| \leq g'(t)$, ezért az előző, 17.26, tételből, valamint a $\tilde{f}(0) = a$ és a $\tilde{f}(1) = b$ formulából adódik a bizonyítandó állítás.

17.28. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $A \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz és $f : A \to V$ differenciálható függvény. Ha minden $a \in A$ esetén $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ teljesül, akkor az f függvény állandó.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $A \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz és $f : A \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy minden $a \in A$ esetén $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ teljesül, és legyen $x, y \in A$ tetszőleges pont. A 14.35 tétel alapján létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. Legyen $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tetszőleges. Ekkor a véges növekmények formulája alapján

$$\|f(z_k) - f(z_{k+1})\| \leq \left(\sup_{x\in]z_k,z_{k+1}[} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\right) \cdot \|z_{k+1} - z_k\| = 0.$$

Vagyis minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $f(z_k) = f(z_{k+1})$ teljesül, amiből $f(x) = f(y)$ következik.

17.29. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod\limits_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\partial_i f)$ olyan pont, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen*

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i).$$

Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, y \in B_\delta(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - A(x-y)\| \leq \varepsilon\,\|x-y\|$$

teljesül, f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod\limits_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény. Tegyük fel, hogy $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\partial_i f)$ olyan pont, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a

$\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban. Legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\partial_i f)$ teljesül. Továbbá definiáljuk a

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$

leképezést, mely nyilván folytonos és lineáris.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített szám. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, y \in B_\delta(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - A(x - y)\| \le \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül, melyből az $y = a$ választással következik, hogy f differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) = A$. Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\partial_i f$ függvény folytonos az a pontban, ezért létezik olyan $\delta \in\,]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

teljesül.
Legyen $x, y \in B_\delta(a)$ tetszőleges pont. Definiáljuk a $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ vektorokat a komponensenként: a z_i ($i \in \{0, \ldots, n\}$) vektor j-edik ($j \in \{1, \ldots, n\}$) komponense legyen

$$(z_i)_j = \begin{cases} y_j, & \text{ha} \quad j \le i; \\ x_j, & \text{ha} \quad j > i. \end{cases}$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén $z_0 = (x_1, x_2, x_3)$, $z_1 = (y_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (y_1, y_2, x_3)$, $z_3 = (y_1, y_2, y_3)$.)
Ekkor nyilván $z_0 = x$ és $z_n = y$ teljesül, továbbá

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - A(x - y) &= f(z_0) - f(z_n) - A(z_0 - z_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - A(z_{i-1} - z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - y_i) \end{aligned}$$

adódik. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen

$$\gamma_i : [x_i, y_i] \to V \qquad t \mapsto (f \circ \operatorname{in}_{z_i,i})(t) - (A \circ \operatorname{in}_{z_i,i})(t).$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= f(t, x_2, x_3) - A(t, x_2, x_3) \\ \gamma_2(t) &= f(y_1, t, x_3) - A(y_1, t, x_3) \\ \gamma_3(t) &= f(y_1, y_2, t) - A(y_1, y_2, t) \end{aligned}$$

teljesül.) Ekkor

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) - ((\partial_i f)(a))(x_i - y_i) = \gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i).$$

A parciális deriválás definíciójából, a közvetett függvény deriválási szabályából, a folytonos lineáris leképezés (17.15 tétel) és az inklúzió deriválási szabályából (17.22 tétel) adódik, hogy minden $w \in [x_i, y_i]$ esetén

$$\begin{aligned} (\mathrm{D}\gamma_i)(w) &= (\partial_i f)\operatorname{in}_{z_i,i}(w) - (\mathrm{D}A)(\operatorname{in}_{z_i,i}(w)) \circ (\mathrm{D}\operatorname{in}_{z_i,i})(w) = \\ &= (\partial_i f)\operatorname{in}_{z_i,i}(w) - A \circ \operatorname{in}_{0,i} = \\ &= (\partial_i f)\operatorname{in}_{z_i,i}(w) - (\partial_i f)(a). \end{aligned}$$

A γ_i függvényre és az $[x_i, y_i]$ szakaszra alkalmazható a véges növekmények formulája

$$\|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \leq \left(\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\mathrm{D}\gamma_i)(w)\| \right) \cdot \|x_i - y_i\| .$$

Mivel minden $w \in [x_i, y_i]$ esetén $\mathrm{in}_{z_i,i}(w) \in B_\delta(a)$, ezért

$$\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\mathrm{D}\gamma_i)(w)\| = \left(\sup_{w \in]x_i, y_i[} \|(\partial_i f)\, \mathrm{in}_{z_i,i}(w) - (\partial_i f)(a)\| \right) \leq \sup_{w \in B_\delta(a)} \|(\partial_i f)(w) - (\partial_i f)(a)\| < \frac{\varepsilon}{n},$$

ezért

$$\|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{n} \|x_i - y_i\| .$$

összerakva ezeket az eredményeket

$$\|f(x) - f(y) - A(x-y)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\gamma_i(x_i) - \gamma_i(y_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \|x_i - y_i\| \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x - y\| = \varepsilon \|x - y\|$$

adódik. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in B_\delta(a): \quad \|f(x) - f(y) - A(x-y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül.

17.30. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, legyen $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény, és legyen $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér, legyen $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ függvény, és legyen $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz.
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Az előző, 17.29 tételt alkalmazva az Ω halmaz minden pontjára azt kapjuk, hogy f differenciálható az Ω halmazon. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos is az Ω halmazon.
Ehhez legyen $a \in \Omega$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A 17.29 tétel alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \Omega$ és minden $x, y \in B_r(a)$ esetén

$$\|f(x) - f(y) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|$$

teljesül. Most rögzítsük az x vektort. Mivel f differenciálható az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in]0, r - \|x - a\|[$, hogy minden $z \in B_\delta(x)$ esetén

$$\|f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - z\| .$$

Mivel $B_\delta(x) \subseteq B_r(a)$ ezért minden $z \in B_\delta(x)$ vektorra

$$\begin{aligned}
&\|((\mathrm{D}f)(a))(x-z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| = \\
&\quad = \|(f(z) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(a))(z-x)) + (f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z))\| \leq \\
&\quad \leq \|f(z) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(a))(z-x)\| + \|f(x) - f(z) - ((\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| \leq \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - z\| + \frac{\varepsilon}{2} \|x - z\| = \varepsilon \|x - z\| .
\end{aligned}$$

Vagyis $\|((\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x))(x-z)\| < \varepsilon \|x - z\|$. Mivel tetszőleges $e \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ egységvektor esetén, ha $t \in]-\delta, \delta[$, akkor $z = x + te \in B_\delta(a)$, vagyis

$$\|((\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}f)(x))te\| \leq \varepsilon t$$

amiből a linearitás miatt az következik, hogy minden e egységvektorra

$$\|((\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}f)(x))e\|<\varepsilon,$$

tehát az operátornorma definíciója alapján

$$\|(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}f)(x)\|\leq\varepsilon,$$

ami igazolja a $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli folytonosságát.
Most tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az Ω halmazon. A parciális derivált értelmezése, a közvetett függvény deriválási szabálya és az inklúziófüggvény deriváltja alapján minden $k\in\{1,\ldots,n\}$ és $a\in\Omega$ esetén

$$(\partial_k f)(a)=(\mathrm{D}(f\circ \mathrm{in}_{a,k}))(a_k)=(\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{a,k}(a_k))\circ(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{a,k})(a_k)=(\mathrm{D}f)(a)\circ \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül. Ezért a minden $k\in\{1,\ldots,n\}$ esetén a $\partial_k f$ függvény értelmezett az Ω halmazon, továbbá az $\mathrm{in}_{0,k}$ függvény és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonossága miatt a $\partial_k f$ függvény is folytonos.

17.7. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

17.31. Tétel. *Legyen U normált tér, V Banach-tér, $r\in\mathbb{R}^+$, $a\in U$, valamint minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n: B_r(a)\to V$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x\in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f: B_r(a)\to V$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $r\in\mathbb{R}^+$, $a\in U$ valamint minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n: B_r(a)\to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1\in\mathbb{N}$, hogy minden $N_1<m,n\in\mathbb{N}$ számra

$$\|f_n(a)-f_m(a)\|<\frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 16.3 tétel alapján létezik olyan $N_2\in\mathbb{N}$, hogy minden $N_2<m,n\in\mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)}\|\mathrm{D}f_n(y)-\mathrm{D}f_m(y)\|<\frac{\varepsilon}{4r}$$

teljesül. Legyen $N=\max\{N_1,N_2\}$.
Legyen $m,n\in\mathbb{N}$ és $x\in B_r(a)\setminus\{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az f_n-f_m függvényre és az $[a,x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(a)-f_m(a))\|\leq\left(\sup_{y\in]a,x[}\|(D(f_n-f_m))(y)\|\right)\cdot\|x-a\|$$

adódik, vagyis

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq\|f_n(a)-f_m(a)\|+\left(\sup_{y\in]a,x[}\|(D(f_n-f_m))(y)\|\right)\cdot\|x-a\|.$$

Ekkor minden $N<n,m$ természetes számra

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq\|f_n(a)-f_m(a)\|+\left(\sup_{y\in]a,x[}\|(D(f_n-f_m))(y)\|\right)\cdot\|x-a\|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4r}\cdot r=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
teljesül. Vagyis minden $x \in B_r(a)$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik az
$$f : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
határfüggvény. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan N, hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
teljesül, amiből az $m \to \infty$ határértéket véve
$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in B_r(a)} \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
adódik, ami éppen az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletes konvergenciáját fejezi ki.

17.32. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to V$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték.
Definiáljuk az
$$\Omega' = \left\{x \in \Omega \,|\, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$
halmazt.
1. Az első lépésben azt igazoljuk, hogy az Ω' halmaz nyílt és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω' halmazon.
Legyen $a \in \Omega'$. Ekkor létezik a $\lim\limits_a f_n(a)$ határérték, valamint a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenciája miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. A 17.31 tétel alapján ebben az esetben minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_x f_n(x)$ határérték és a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. Tehát $B_r(a) \subseteq \Omega'$, vagyis Ω' nyílt és az a pontnak létezik olyan környezete ($B_r(a)$), ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.
2. Most igazoljuk az $\overline{\Omega'} \cap \Omega = \Omega'$ egyenlőséget. Mivel $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \cap \Omega$ nyilván teljesül ezért csak az $\overline{\Omega'} \cap \Omega \subseteq \Omega'$ tartalmazást kell igazolni. Ehhez legyen $x \in \overline{\Omega'} \cap \Omega$. Mivel a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Továbbá $x \in \overline{\Omega'}$ miatt létezik olyan $z \in \Omega'$, melyre $\|x - z\| < \dfrac{r}{2}$ teljesül. Ekkor a $z \in B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás miatt a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_{\frac{r}{2}}(x)$ halmazon, vagyis a 17.31 tétel alapján $B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq \Omega'$, amiből $z \in \Omega'$ következik.
3. Megmutatjuk, hogy $\Omega' = \Omega$. Mivel $\Omega' \subseteq \Omega$ nyílt halmaz, valamint $x_0 \in \Omega'$ miatt $\Omega' \neq \emptyset$, továbbá $\overline{\Omega'} \cap \Omega = \Omega'$ teljesül, ezért a 14.34 tétel alapján $\Omega' = \Omega$.
Ezek után definiáljuk az
$$f : \Omega \to V \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

határfüggvényt.
4. Végül megmutatjuk, hogy a határfüggvény deriválható és minden $a \in \Omega$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(a) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(a)$$

teljesül.
Ehhez legyen

$$g : \Omega \to V \qquad a \mapsto \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(a)$$

és $a \in \Omega$ tetszőleges pont. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a) - (\mathrm{D}f_n)(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a) - g(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a. \end{cases}$$

Az f_n függvény a pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 16.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne az a pontban és teljesülne a bizonyítandó

$$(\mathrm{D}f)(a) = g(a)$$

egyenlőség.
Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 16.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y\in B_r(a)} \|(\mathrm{D}f_n)(y) - (\mathrm{D}f_m)(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.
Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \to V \qquad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - ((\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))u$$

függvényre és az $[a, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\begin{gathered} \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) - ((\mathrm{D}f_n)(a)(x-a) - (\mathrm{D}f_m)(a))(x-a)\| \le \\ \left(\sup_{y\in]a,x[} \|(D(f_n - f_m))(y) - ((\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))\| \right) \cdot \|x-a\| \end{gathered}$$

adódik, vagyis ha $N < n, m$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} &\|f_n(x) - f_n(a) - (\mathrm{D}f_n)(a)(x-a) - (f_m(x) - f_m(a) - (\mathrm{D}f_m)(a))(x-a))\| \le \\ &\le \left(\sup_{y\in]a,x[} (\|(D(f_n - f_m))(y)\| + \|(\mathrm{D}f_n)(a) - (\mathrm{D}f_m)(a)\|) \right) \cdot \|x-a\| \le \\ &\le \left(\left(\sup_{y\in B_r(a)} \|(D(f_n - f_m))(y)\| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \|x-a\| \le \end{aligned}$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \|x - a\| = \varepsilon \|x - a\| .$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq a$ esetén

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| = \left\|\frac{f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a)}{\|x - a\|}\right\| \le \frac{\varepsilon \cdot \|x - a\|}{\|x - a\|} = \varepsilon,$$

valamint $x = a$ esetén is $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| \le \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 16.3 tétel értelmében következik, hogy a a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

17.33. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_n (\mathrm{D} f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ összeg;*
2. *a $\sum_n f_n$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to V$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D} f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D} f_n)(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, V Banach-tér, $\Omega \subseteq U$ összefüggő nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to V$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D} f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ összeg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n : \Omega \to V \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 17.32 tételt adódik az állítás.

17.8. Inverzfüggvény tétel

17.34. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen U és V Banach-tér, $f : U \twoheadrightarrow V$ tetszőleges függvény és $a \in U$. Ha $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom}(\mathrm{D} f)$, $\mathrm{D} f$ folytonos az a pontban és $(\mathrm{D} f)(a) \in \mathscr{L}(U, V)$ homeomorfizmus, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D} f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük.
1. Legyen U és V Banach-tér, $f : U \twoheadrightarrow V$ tetszőleges függvény és $a \in U$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathscr{L}(U, V)$ homeomorfizmus.
Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést és legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_{r_0}(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül. A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli $\mathrm{D}f$ folytonossága miatt létezik olyan $r \in]0, r_0[$, hogy minden $x \in B_r(a)$ esetén

$$\|(\mathrm{D}f)(x) - A\| < \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}.$$

Definiáljuk az $\Omega = B_r(a)$ halmazt. Lépésenként megmutatjuk, hogy erre az Ω halmazra teljesülnek a tételben felsorolt tulajdonságok. Előbb azonban megjegyezzük, hogy a 14.23 tétel miatt minden $x \in \Omega$ pont esetén a $(\mathrm{D}f)(x)$ leképezés invertálható.
2. A bizonyítás folyamán szükségünk lesz az alábbi függvényre. Minden $y \in V$ esetén legyen

$$\varphi_y : \Omega \to U \qquad x \mapsto x + A^{-1}(y - f(x)).$$

Mivel minden $y \in V$ estén

$$\varphi_y = \mathrm{id}_\Omega + (A^{-1}y) - A^{-1} \circ f,$$

ezért minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}\varphi_y)(x) = \mathrm{id}_U - A^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(x) = A^{-1}(A - (\mathrm{D}f)(x))$$

teljesül, amiből

$$\|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|(A - (\mathrm{D}f)(x))\| < \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2}$$

következik. Vagyis minden $y \in V$ és bármely $x_1, x_2 \in \Omega$ pont esetén a véges növekmények formuláját felírva az $[x_1, x_2]$ szakaszra és a φ_y függvényre

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| &\le \left(\sup_{x \in]x_1, x_2[} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le \\ &\le \left(\sup_{x \in \Omega} \|(\mathrm{D}\varphi_y)(x)\|\right) \|x_1 - x_2\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}\end{aligned}$$

adódik. Tehát φ_y kontrakció és

$$\forall y \in V\ \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{17.2}$$

teljesül.
3. Most megmutatjuk, hogy az $f|_\Omega$ függvény injektív. Ehhez tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in \Omega$ olyan, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $y = f(x_1)$, akkor $\varphi_y(x_1) = x_1$ és $\varphi_y(x_2) = x_2$, amiből a (17.2) egyenlet segítségével

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \le \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

adódik, vagyis $x_1 = x_2$.
4. Most igazoljuk, hogy minden $X \subseteq \Omega$ nyílt halmaz esetén $f(X)$ nyílt halmaz. Legyen $y_0 \in f(X)$ tetszőleges pont. Ekkor $f|_\Omega$ injektivitása miatt létezik egyetlen olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel X nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{2r}(x_0) \subseteq X$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $x \in \overline{B_r(x_0)}$, $y \in B_\rho(y_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x) - x_0\| &\le \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \le \\ &\le \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \left\|A^{-1}(y - f(x_0))\right\| \le \\ &\le \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \le \\ &\le \frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $\frac{r}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \rho = r$, azaz $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$, akkor minden $x \in \overline{B_r(x_0)}$ esetén

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r.$$

Mostantól legyen $\rho = \frac{r}{2\left\|A^{-1}\right\|}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\varphi_y\left(\overline{B_r(x_0)}\right) \subseteq \overline{B_r(x_0)}.$$

Mivel U Banach-tér és $\overline{B_r(x_0)}$ zárt részhalmaza, ezért a 13.38 tétel alapján a $\overline{B_r(x_0)}$ halmaz is teljes. Ekkor az $M = \overline{B_r(x_0)}$ halmazra és a $\varphi_y|_M$ függvényre alkalmazva a 13.96 Banach-féle fixponttételt, az adódik, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \overline{B_r(x_0)}$ pont, melyre

$$\varphi_y(x) = x$$

teljesül, ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = y$. Tehát azt kaptuk, hogy minden $y \in B_\rho(y_0)$ ponthoz létezik olyan $x \in X$, melyre $f(x) = y$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy $B_\rho(y_0) \subseteq f(X)$. Ezzel igazoltuk, hogy $f(X)$ nyílt halmaz.

5. Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük a $g = f|_\Omega$ és az $\Omega' = f(\Omega)$ jelöléseket. Most megmutatjuk, hogy g homeomorfizmus Ω és Ω' között. Mivel f differenciálható az Ω halmazon, ezért ott folytonos is, vagyis g folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése alapján a g^{-1} függvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq U$ nyílt halmazra létezik olyan $X' \subseteq V$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{\left(g^{-1}\right)}(X) = X' \cap \operatorname{Dom} g^{-1}$ teljesül. Mivel g injektív, ezért azt kell igazolnunk, hogy minden $X \subseteq U$ nyílt halmazhoz létezik olyan $X' \subseteq V$ nyílt halmaz, melyre

$$g(X) = X' \cap \Omega'.$$

Ha $X \subseteq U$ nyílt halmaz, akkor $g(X) = g(\Omega \cap X)$ és mivel $\Omega \cap X$ nyílt halmaz, ezért a 4. pont alapján $g(\Omega \cap X)$ nyílt halmaz. A nyilvánvaló $g(\Omega \cap X) \subseteq \Omega'$ tartalmazás miatt

$$g(X) = g(\Omega \cap X) \cap \Omega',$$

vagyis az $X' = g(\Omega \cap X)$ nyílt halmazra teljesül a kívánt tartalmazás.

6. Most igazoljuk, hogy g^{-1} differenciálható és minden $x \in \Omega$ pontra

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens, hogy minden minden $y \in \Omega'$ pontban g^{-1} differenciálható és

$$(\mathrm{D}(g^{-1}))(y) = ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y)))^{-1}$$

teljesül. Ennek igazolásához legyen $y_0 \in \Omega'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Azt kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}&\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in V: \\ &\qquad \left(\|y - y_0\| < \delta \quad \to \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| \leq \varepsilon \|y - y_0\|\right)\end{aligned}$$

teljesül. Mivel Ω' nyílt halmaz a 4. pont alapján, ezért létezik olyan $r_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, melyre $B_{r_1}(y_0) \subseteq \Omega'$. Legyen $x_0 = g^{-1}(y_0)$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő kifejezésen végezzük el a következő átalakításokat, ahol $y \in B_{r_1}(y_0)$ tetszőleges és $x = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}&\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|x - x_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}(y - y_0)\right\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\left(((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\right)\right\| \leq \\ &\quad \leq \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0) - (y - y_0)\| = \\ &\quad = \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0 - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| =\end{aligned}$$

$$= \left\| ((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1} \right\| \cdot \left\| g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(g^{-1}(y_0)))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)) \right\|$$

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ egy paraméter, melynek majd később rögzítjük az értékét. Mivel $x_0 \in \Omega$, Ω nyílt halmaz és a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért létezik olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{r_2}(x_0) \subseteq \Omega$ és

$$\forall x \in U : \qquad (\|x - x_0\| < r_2 \quad \rightarrow \quad \|g(x) - g(x_0) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(x - x_0)\| \le \varepsilon' \|x - x_0\|) .$$

Mivel a g^{-1} függvény folytonos az y_0 pontban, ezért létezik olyan $r_3 \in \,]0, r_1[$ paraméter, hogy

$$\forall y \in V : \qquad \left(\|y - y_0\| < r_3 \quad \rightarrow \quad \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| < r_2\right) .$$

Ezekből

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon' \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|$$

következik. Tetszőleges $y \in B_{r_3}(y_0)$ pont esetén

$$\begin{aligned}
\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| &= \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\
&\le \left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\right\| + \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| \le \\
&\le \left\|\varphi_{y_0}(g^{-1}(y)) - \varphi_{y_0}(g^{-1}(y_0))\right\| + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| \le \\
&\le \frac{\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\|}{2} + \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|
\end{aligned}$$

adódik, ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk a (17.2) becslést és ennek az egyenlőtlenségnek az átrendezéséből

$$\left\|g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)\right\| \le 2 \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\|$$

következik. Tehát az eddigiek alapján

$$\forall y \in B_{r_3}(y_0) : \ \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le 2\varepsilon' \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| .$$

Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\|}$, akkor minden $y \in B_{r_3}(y_0)$ pontra teljesül a bizonyítandó

$$\left\|((\mathrm{D}g)(x_0))^{-1}\right\| \cdot \left\|g(g^{-1}(y)) - g(g^{-1}(y_0)) - ((\mathrm{D}g)(x_0))(g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0))\right\| \le \varepsilon \|y - y_0\|$$

egyenlőtlenség. Tehát a fent definiált ε' paraméterhez kell r_2 és r_3 számokat választani, és r_3 lesz a keresett δ.

7. Végül igazoljuk, hogy a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban. Már megmutattuk, hogy

$$\mathrm{D}(g^{-1}) = i \circ (\mathrm{D}g) \circ g^{-1},$$

ahol i jelöli az invertálást. A g^{-1} függvény folytonosságát igazoltuk, a $(\mathrm{D}g)$ függvény folytonosságát feltettük az a pontban és a 14.14 tétel alapján tudjuk, hogy i folytonos. Ezek alapján a $\mathrm{D}(g^{-1})$ függvény is folytonos az $f(a)$ pontban.

17.9. Implicitfüggvény tétel

17.35. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen U_1, U_2 és V Banach-tér, $f : U_1 \times U_2 \twoheadrightarrow V$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és a $(\partial_2 f)(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(U_2, V)$ leképezés homeomorfizmus, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ differenciálható függvény, melyre minden $x \in \Omega_1$ esetén*

$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

Bizonyítás. Legyen U_1, U_2 és V Banach-tér, valamint $f : U_1 \times U_2 \twoheadrightarrow V$ függvény. Legyen $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(Df)$ olyan pont, melyben $\mathrm{D}f$ folytonos és a $(\partial_2 f)(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(U_2, V)$ leképezés homeomorfizmus.

A $\operatorname{Dom} f \subseteq U_1 \times U_2$ halmazon értelmezzük az

$$\eta : U_1 \times U_2 \to U_1 \times V \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, f(x_1, x_2))$$

függvényt. Ekkor ha $(b_1, b_2) \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, akkor

$$((\mathrm{D}\eta)(b_1, b_2)) : U_1 \times U_2 \to U_1 \times V \qquad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{U_1} & 0 \\ (\partial_1 f)(b_1, b_2) & (\partial_2 f)(b_1, b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

teljesül. Ebből adódik, hogy $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}\eta)$, továbbá a $\mathrm{D}f$ függvény (a_1, a_2) pontbeli folytonossága miatt a $\mathrm{D}\eta$ függvény is folytonos az (a_1, a_2) pontban. Egyszerű számolással igazolható, hogy az $A = (\mathrm{D}\eta)(a_1, a_2)$ leképezés inverze

$$U_1 \times V \to U_1 \times U_2 \qquad (y_1, y_2) \mapsto (y_1, -((\partial_2 f)(a_1, a_2))^{-1}(\partial_1 f)(a_1, a_2)y_1 + ((\partial_2 f)(a_1, a_2))^{-1}y_2),$$

mely folytonos lineáris leképezés, vagyis $(\mathrm{D}\eta)(a_1, a_2)$ homeomorfizmus.

Az η függvényre és az (a_1, a_2) pontra alkalmazva a 17.34 inverzfüggvény tételt az adódik, hogy létezik olyan Ω_1', Ω_2' nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre

1. $\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'}$ injektív;
2. az $\Omega = \eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'} \subseteq U_1 \times V$ halmaz nyílt;
3. az $(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény differenciálható;
4. minden $x \in \Omega_1' \times \Omega_2'$ pontra
$$(\mathrm{D}((\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}))(\eta(x)) = ((\mathrm{D}\eta)(x))^{-1}$$
teljesül;
5. a $\mathrm{D}(\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ függvény folytonos az $\eta(a_1, a_2)$ pontban.

Vezessük be a $\rho = (\eta|_{\Omega_1' \times \Omega_2'})^{-1}$ jelölést, tehát $\rho : \Omega \to U_1 \times U_2$ differenciálható függvény, melynek komponensei legyenek

$$\rho_1 : \Omega \to U_1 \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1(\rho(x, y))$$
$$\rho_2 : \Omega \to U_2 \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, y)).$$

Ha $(x_1, y) \in \Omega \subseteq U_1 \times V$, akkor

$$(x_1, y) = \eta(\rho(x_1, y)) = \eta(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y)) = (\rho_1(x_1, y), f(\rho_1(x_1, y), \rho_2(x_1, y))),$$

vagyis minden $(x_1, y) \in \Omega$ pont esetén

$$x_1 = \rho_1(x_1, y) \qquad \text{és} \qquad y = f(x_1, \rho_2(x_1, y)). \tag{17.3}$$

Legyen $c = f(a_1, a_2)$. Ekkor $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom} f$ miatt $(a_1, a_2) \in \operatorname{Dom}\eta$ is teljesül és $\eta(a_1, a_2) = (a_1, c)$ miatt $(a_1, c) \in \Omega$, mivel Ω nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq U_1$ nyílt halmaz, melyre $\Omega_1 \times \{c\} \subseteq \Omega$.

Tekintsük a

$$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2' \qquad x \mapsto \mathrm{pr}_2(\rho(x, c))$$

függvényt. Mivel ρ differenciálható és pr_2 lineáris leképezés, ezért φ is differenciálható függvény. A (17.3) egyenlet alapján minden $x \in \Omega_1$ pontra

$$c = f(x, \rho_2(x, c)) = f(x, \varphi(x))$$

teljesül, melyből a közvetett függvény deriválási szabálya alapján az adódik, hogy minden $x \in \Omega_1$ esetén

$$0 = (\partial_1 f)(x, \varphi(x)) + (\partial_2 f)(x, \varphi(x)) \circ (D\varphi)(x)$$

teljesül, aminek átrendezéséből

$$(D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$

adódik.

17.10. Többszörös deriváltak

17.36. Definíció. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$.
- Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a) \in \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V))$, ennek a kompozícióját a

$$\rho_{n-1} : \mathscr{L}(U, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \quad A \mapsto \Big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_n)\Big)$$

izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$. Az $f : U \to V$ függvény *n-edik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(n)} f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f) \to \mathscr{L}^n(U^n, V) \qquad a \mapsto \rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n-1)} f))(a)$$

függvényt.
- Az *f függvény n-szer differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$.
- Az *f függvény n-szer folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(n)} f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, n-szer folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, V)$ jelöli.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, V értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, V)$ jelöli.

17.37. Tétel. *(Young-tétel.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ tetszőleges függvény, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$. Ekkor $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \in \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$, azaz $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ szimmetrikus multilineáris leképezés.*

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ tetszőleges függvény.
Ha $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(n)} f$, akkor definíció szerint $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ szimmetrikus lineáris leképezés.
Most igazoljuk az állítás az $n = 2$ esetre.
Legyen $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(2)} f$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D} f)$ teljesül, vagyis az f függvény differenciálható a $B_r(a)$ halmazon. Legyen $x, y \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges vektorok és $R = \dfrac{r}{\|x\| + \|y\|}$.
Definiáljuk az

$$s :]{-R}, R[\to V \qquad t \mapsto f(a + tx + ty) - f(a + tx) - f(a + ty) + f(a)$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t)}{t^2} = (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(x, y) \tag{17.4}$$

teljesül, amiből következik a bizonyítandó

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tx + ty) - f(a + tx) - f(a + ty) + f(a)}{t^2} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + ty + tx) - f(a + ty) - f(a + tx) + f(a)}{t^2} = (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(y, x)\end{aligned}$$

képlet. A (17.4) képlethez igazolni kell az

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t) - (\mathrm{D}^{(2)} f)(a)(tx, ty)}{t^2} = 0$$

egyenlőséget, amit az alábbi két részre bontunk.

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t) - (\mathrm{D} f)(a + tx)(ty) + (\mathrm{D} f)(a)(ty)}{t^2} = 0 \tag{17.5}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{D} f)(a + tx)(ty) - (\mathrm{D} f)(a)(ty) - (\mathrm{D}^2 f)(a)(tx, ty)}{t^2} = 0 \tag{17.6}$$

A $\mathrm{D}f$ függvény a pontbeli deriválhatósága alapján

$$\lim_{z\to 0}\frac{(\mathrm{D}f)(a+z)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z)}{\|z\|}=0,$$

tehát a

$$\varphi : B_r(a)\to V \qquad z\mapsto \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{D}f)(a+z)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z)}{\|z\|}, & \text{ha} \quad z\neq 0;\\ 0, & \text{ha} \quad z=0\end{cases}$$

formulával értelmezett függvény folytonos a 0 pontban, ezért

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=0 \tag{17.7}$$

és minden $z\in B_r(a)$ vektorra

$$(\mathrm{D}f)(a+z)=\|z\|\cdot\varphi(z)+(\mathrm{D}f)(a)+(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z) \tag{17.8}$$

teljesül.
A (17.6) egyenlőség bizonyításához legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a φ függvény 0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $z\in U$, $0<\|z\|<\delta$ esetén

$$\|\varphi(z)\|=\frac{\|(\mathrm{D}f)(a+z)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(z)\|}{\|z\|}<\varepsilon.$$

Vagyis minden $t\in\mathbb{R}$, $0<|t|<\dfrac{\delta}{\|x\|}$ számra

$$\frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\|}{|t|\cdot\|x\|}<\varepsilon,$$

amiből

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{(\mathrm{D}f)(a+tx)(ty)-(\mathrm{D}f)(a)(ty)-(\mathrm{D}^2f)(a)(tx,ty)}{t^2}\right\|\leq\\ &\leq\frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\|\cdot\|ty\|}{t^2}=\\ &=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\frac{\|(\mathrm{D}f)(a+tx)-(\mathrm{D}f)(a)-(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx)\|}{|t|\cdot\|x\|}<\varepsilon\cdot\|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

következik. Ezzel igazoltuk a (17.6) egyenlőséget.
A (17.5) egyenlőség igazolásához minden $t\in\,]-R,R[$ paraméter esetén tekintsük az alábbi függvényt.

$$\alpha_t:[0,1]\to V \qquad s\mapsto f(a+tx+sty)-f(a+sty)-(\mathrm{D}f)(a+tx)(sty)+(\mathrm{D}f)(a)(sty)$$

Ekkor minden $t\in\,]-R,R[$ esetén

$$s(t)-(\mathrm{D}f)(a+tx)(ty)+(\mathrm{D}f)(a)(ty)=\alpha_t(1)-\alpha_t(0)$$

teljesül.
A véges növekmények formulája alapján minden $t\in\,]-R,R[$ számra

$$\begin{aligned}&\|\alpha_t(1)-\alpha_t(0)\|\leq\sup_{s\in]0,1[}\|(\mathrm{D}\varphi_t)(s)\|=\\ &=\sup_{s\in]0,1[}\|(\mathrm{D}f)(a+tx+sty)(ty)-(\mathrm{D}f)(a+sty)(ty)-(\mathrm{D}f)(a+tx)(ty)+(\mathrm{D}f)(a)(ty)\|\leq\\ &\leq|t|\cdot\|y\|\cdot\sup_{s\in]0,1[}\|(\mathrm{D}f)(a+tx+sty)-(\mathrm{D}f)(a+sty)-(\mathrm{D}f)(a+tx)(ty)+(\mathrm{D}f)(a)\|\end{aligned}$$

teljesül, amit a (17.8) képlet segítségével az alábbi formában is felírhatunk.

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_t(1) - \alpha_t(0)\| \leq \\
&\leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \Big(\Big\| \begin{aligned}[t] &\|tx + sty\| \cdot \varphi(tx + sty) + (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx + sty) \\ &- \|sty\| \cdot \varphi(sty) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(sty) \\ &- \|tx\| \cdot \varphi(tx) - (\mathrm{D}f)(a) - (\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(a)(tx) + (\mathrm{D}f)(a) \Big\| \Big) \leq \end{aligned} \\
&\leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \left(\| \|tx + sty\| \cdot \varphi(tx + sty) - \|sty\| \cdot \varphi(sty) - \|tx\| \cdot \varphi(tx)\|\right) \leq \\
&\leq |t| \cdot \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \left(|t| \cdot (\|x\| + s\,\|y\|) \cdot \|\varphi(tx + sty)\| + s\,|t| \cdot \|y\| \cdot \|\varphi(sty)\| + |t| \cdot \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\|\right) \leq \\
&\leq |t|^2 \cdot \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \|\varphi(tx + sty)\| + \|y\| \cdot \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\|\right)
\end{aligned}$$

Vagyis, ha $t \in]-R, R[\setminus \{0\}$, akkor

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{s(t) - (\mathrm{D}f)(a + tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty)}{t^2} \right\| \leq \\
&\qquad \leq \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi(tx + sty)\| + \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\| \right).
\end{aligned}$$

A (17.5) egyenlőség bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A (17.7) egyenlet alapján
– létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_1$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|\,(\|x\| + \|y\|)};$$

– létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_2$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|^2};$$

– létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in U$, $0 < \|z\| < \delta_3$ esetén

$$\varphi(z) < \frac{\varepsilon}{3\,\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Ha $\delta = \dfrac{\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}}{\|x\| + \|y\|}$, akkor minden $t \in]-\delta, \delta[$ és $s \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}
\|tx + sty\| &< \delta \leq \delta_1 \\
\|sty\| &< \delta \leq \delta_2 \\
\|tx\| &< \delta \leq \delta_3.
\end{aligned}$$

Vagyis ha $t \in]-\delta, \delta[$, akkor

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{s(t) - (\mathrm{D}f)(a + tx)(ty) + (\mathrm{D}f)(a)(ty)}{t^2} \right\| \leq \\
&\quad \leq \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi(tx + sty)\| + \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \|\varphi(sty)\| + \|x\| \cdot \|\varphi(tx)\| \right) < \\
&\quad < \|y\| \cdot \left((\|x\| + \|y\|) \cdot \sup_{s\in]0,1[} \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|\,(\|x\| + \|y\|)} + \|y\| \cdot \sup_{s\in]0,1[} \frac{\varepsilon}{3\,\|y\|^2} + \|x\| \cdot \frac{\varepsilon}{3\,\|x\| \cdot \|y\|} \right) = \\
&\quad = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a (17.5) képletet.
Tehát eddig megmutattuk, hogy a tétel igaz az $n = 1$ és az $n = 2$ esetben. Most teljes indukcióval

megmutatjuk, hogy ha $2 \leq n$ és az n számra igaz az állítás, akkor az $n+1$ számra is igaz.
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$ és tegyük fel, hogy igaz az állítás az n számra. Vezessük be a $g = \mathrm{D}^{(n)}f$ függvényt, ekkor $g : U \to \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$, ahol $\mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$ jelöli a folytonos szimmetrikus n-lineáris leképezések terét. Mivel a 14.51 tétel alapján $\mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n(U^n, V)$ térnek, ezért a 17.13 állítás miatt a g függvény deriváltjára $\mathrm{D}g : U \to \mathrm{Lin}\,(U, \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V))$ teljesül. Ezért, ha $Q = (\mathrm{D}^{(n+1)}f)(a)$, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in U$ és $\sigma : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ olyan permutáció, melyre $\sigma(1) = 1$ teljesül, akkor a magasabbrendű derivált értelmezése alapján

$$\begin{aligned}
Q(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) &= \Big(\rho_{n-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) = \\
&= \Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_{\sigma(1)})(x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) = \\
&= \Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(n)}f))(a)\Big)(x_1)(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \\
&= Q(x_1, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Legyen $\sigma^* : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ a $\sigma^*(1) = 2$, $\sigma^*(2) = 1$ és minden $3 \leq k \leq n$ esetén $\sigma^*(k) = k$ hozzárendeléssel értelmezett permutáció, valamint $h = \mathrm{D}^{n-1}f$ függvény. Ekkor a $h : U \to \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)$ függvényre alkalmazva a Young-tételt az $n = 2$ esetben, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{D}^2h : U \to \mathscr{L}_s{}^2\left(U^2, \mathscr{L}^{n-1}(U^{n-1}, V)\right),$$

vagyis minden $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in U$ vektorra a magasabbrendű deriváltak értelmezése alapján

$$\begin{aligned}
Q(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)}, \ldots, x_{\sigma^*(n+1)}) &= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)})\right)(x_{\sigma^*(3)}, \ldots, x_{\sigma^*(n+1)}) = \\
&= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_2, x_1)\right)(x_3, \ldots, x_{n+1}) = \\
&= \left((\mathrm{D}^2(h))(a)(x_1, x_2)\right)(x_3, \ldots, x_{n+1}) = \\
&= Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

teljesül.
Végül legyen $\sigma : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ olyan permutáció, melyre $\sigma(1) \neq 1$, valamint legyen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in U$ tetszőleges vektor. Legyen $i = \sigma^{-1}(1)$ és legyen $\sigma_1 : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ a $\sigma_1(2) = i$, $\sigma_1(i) = 2$ és minden $k \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{2, i\}$ esetén $\sigma_1(k) = k$ hozzárendeléssel értelmezett permutáció. Ekkor a $\sigma' = \sigma^* \circ \sigma \circ \sigma_1$ permutációra $\sigma'(1) = 1$ teljesül és a

$$\sigma^* \circ \sigma^* = \sigma_1 \circ \sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n+1\}}$$

azonosság miatt

$$\sigma = \sigma^* \circ \sigma' \circ \sigma_1.$$

Az eddigiek alapján

$$\begin{aligned}
Q(x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_1(2)}, \ldots, x_{\sigma_1(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\
Q(x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(2)}, \ldots, x_{\sigma'(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\
Q(x_{\sigma^*(1)}, x_{\sigma^*(2)}, \ldots, x_{\sigma^*(n+1)}) &= Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

amiből

$$Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

következik.

Jelölés. Legyen A halmaz, $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az $a^{[n]} = (a, \ldots, a) \in A^n$ jelölést használjuk, vagyis

$$a^{[n]} = \underbrace{(a, \ldots, a)}_{n-\text{szer}}.$$

17.11. Taylor-sorfejtés

17.38. Definíció. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Az f *függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a} : U \to V \qquad (x) \mapsto T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(U, V)$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az f *függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

17.39. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)} f)(\xi)(b-a)^{[n+1]}.$$

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Tekintsük a

$$\gamma : \mathbb{R} \to U \qquad t \mapsto a + t(b-a)$$

függvényt és legyen $\tilde{f} = f \circ \gamma$. Mivel a γ függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, U) \qquad t \mapsto (b-a)$$

teljesül, vagyis $\mathrm{D}\gamma$ konstans függvény, ezért minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ esetén $\mathrm{D}^{(k)}\gamma = 0$, vagyis γ végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon. Ezért az $\tilde{f}$ függvény n-szer folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ szakaszon, illetve $(n+1)$-szer differenciálható a $]0, 1[$ szakaszon. A 7.30 Taylor sorfejtést alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre, a $[0, 1]$ szakaszra a $p = 1$ választással az adódik, hogy létezik olyan $\tilde{\xi} \in]0, 1[$ paraméter, melyre

$$\tilde{f}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\tilde{f}^{(k)}(0) \cdot (1-0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{\xi}) \cdot (1-0)^{n+1},$$

vagyis

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\tilde{f}^{(k)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{\xi}). \tag{17.9}$$

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))\gamma'(\tilde{z}) = (\mathrm{D}f)(\gamma(\tilde{z}))(b-a),$$

ahol $z = \gamma(\tilde{z})$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}^+$ számra minden $\tilde{z} \in [0, 1]$ esetén

$$\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}) = ((\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z})))(b-a)^{[k]}$$

teljesül, valamint az f függvény $(k+1)$-szer differenciálható valamely $z_0 \in [a, b]$ pontban. Ekkor az $\tilde{f}$ függvény $(k+1)$-szer differenciálható a $\tilde{z}_0 = \gamma^{-1}(z_0)$ pontban. Mivel a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to z_0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(x) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0) - (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(z_0)(x - z_0)}{\|x - z_0\|} = 0,$$

ezért ha $x = z_0 + h(b-a)$, ahol $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0 + h(b-a)) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(z_0) - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(z_0)(b-a)}{|h|} = 0,$$

amiből

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h)) - (\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0)) - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)}{h} = 0$$

következik. Ezért

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0 + h))(b-a)^{[k]} - (\mathrm{D}^{(k)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k]} - h(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}}{h} = 0,$$

vagyis

$$\tilde{f}^{(k+1)}(\tilde{z}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0 + h) - \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}_0)}{h} = (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\gamma(\tilde{z}_0))(b-a)^{[k+1]}.$$

Ezen eredményt beírva a (17.9) képletbe a $\xi = \gamma^{-1}(\tilde{\xi})$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}$$

formula adódik.

17.40. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left\| f(b) - T^f_{n,a}(b) \right\| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon.
Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk az állítást. Ha $n = 0$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség következik a véges növekmények formulájából.
Most tegyük fel, hogy valamely n számra igaz az állítás és legyen $f : U \to V$ olyan függvény, mely $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+2)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Tekintsük az alábbi függvényeket.

$$\tilde{f} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto f(a + t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]} f)(a)(b-a)^{[k]}$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \frac{t^{n+2}\,\|b-a\|^{n+2}}{(n+2)!} \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+2)} f)(x) \right\| \right)$$

Ekkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}\tilde{f})(t) &= (\mathrm{D}f)(a + t(b-a))(b-a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k t^{k-1}}{k!}(\mathrm{D}^{[k]} f)(a)(b-a)^{[k]} = \\
&= (\mathrm{D}f)(a + t(b-a))(b-a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]}(b-a) = \\
&= \left((\mathrm{D}f)(a + t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]} \right)(b-a)
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha alkalmazzuk indukciós hipotézisünket a $\mathrm{D}f : U \to \mathscr{L}(U,V)$ függvényre és az $[a, a+t(b-a)]$ szakaszra, akkor

$$\begin{aligned}\left\|(\mathrm{D}f)(a+t(b-a)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a)(b-a)^{[k]}\right\| &\leq \\ \leq \left(\sup_{x\in]a,a+t(b-a)[} \left\|(\mathrm{D}^{(n+1)}(\mathrm{D}f))(x)\right\|\right) \cdot \frac{\|t(b-a)\|^{n+1}}{(n+1)!} &\leq \\ \leq \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{t^{n+1}\,\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

adódik, vagyis minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\right\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{t^{n+1}\,\|b-a\|^{n+2}}{(n+1)!} = g'(t)$$

teljesül. Ezen egyenlőtlenségből a 17.26 tétel alapján

$$\left\|\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\right\| \leq g(1) - g(0)$$

következik, ami pedig nem más mint a bizonyítandó

$$\left\|f(b) - T^{f}_{n+1,a}(b)\right\| \leq \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(n+2)}f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{\|b-a\|^{n+2}}{(n+2)!}$$

képlet.

17.41. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen az $f : U \to V$ függvény n-szer differenciálható az $a \in U$ pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^{f}_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen U és V normált tér és $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in U$. A tételt az n paraméter szerinti teljes indukcióval igazoljuk.
Ha $n = 1$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(1)}$, akkor $T^{f}_{n,a}(x) = f(a) + (\mathrm{D}f)(a)(x-a)$ egyenlőség miatt a bizonyítandó határérték

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (\mathrm{D}f)(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

mely következik a differenciálhatóság definíciójából.
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített szám. Tegyük fel, hogy minden U' és V' normált térre, valamint minden $g : U' \to V'$ függvényre és $a \in U'$ pontra, $a \in \operatorname{Dom} g^{(n)}$ esetén

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T^{g}_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n} = 0$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, akkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^{f}_{n+1,a}(x)}{\|x-a\|^{n+1}} = 0.$$

Mivel $a \in \operatorname{Dom} f^{(n+1)}$, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül és tekintsük a

$$h : B_r(a) \to V \qquad x \mapsto f(x) - T^{f}_{n+1,a}(x)$$

függvényt. Mivel a 17.17 tétel szerint minden $u \in U$ esetén

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}T^f_{n+1,a})(x)u &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} k \left(((\mathrm{D}^{[k]} f)(a))(u, x-a, \ldots, x-a) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \left(((\mathrm{D}^{[k-1]}(\mathrm{D}f))(a))(u, x-a, \ldots, x-a) \right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(((\mathrm{D}^{[k]}(\mathrm{D}f))(a))(x-a)^{[k]} \right) \right) u = \\
&= (T^{\mathrm{D}f}_{n,a}(x))u,
\end{aligned}$$

ezért

$$(\mathrm{D}h)(x) = (\mathrm{D}f)(x) - T^{\mathrm{D}f}_{n,a}(x).$$

A $g = \mathrm{D}f$ függvényre alkalmazva az indukciós hipotézist a

$$\lim_{x \to a} \frac{(\mathrm{D}f)(x) - T^{\mathrm{D}f}_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n} = 0$$

határértéket kapjuk, vagyis

$$\lim_{x \to a} \frac{(\mathrm{D}h)(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\delta \in]0, r[$, hogy minden $z \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left\| \frac{(\mathrm{D}h)(z)}{\|z-a\|^n} \right\| < \varepsilon,$$

vagyis

$$\|(\mathrm{D}h)(z)\| < \varepsilon \cdot \|z-a\|^n .$$

Legyen $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges és alkalmazzuk a véges növekmények formuláját a h függvényre és az $[a, x]$ szakaszra.

$$\|h(x) - h(a)\| = \|h(x)\| \le \left(\sup_{z \in]a,x[} \|(\mathrm{D}h)(z)\| \right) \|x-a\| \le \varepsilon \left(\sup_{z \in]a,x[} \|z-a\|^n \right) |x-a| < \varepsilon \|x-a\|^{n+1}$$

Vagyis megmutattuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén

$$\left\| \frac{h(x)}{\|x-a\|^{n+1}} \right\| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{\|x-a\|^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n+1,a}(x)}{\|x-a\|^{n+1}} = 0$$

határértéket jelenti.

17.12. Lokális szélsőérték jellemzése

17.42. Definíció. Legyen U normált tér $f : U \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.

- Az f *függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom}\, f$ esetén $f(a) \le f(x)$.

- Az f *függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f *függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az f *függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az f *függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

17.43. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ és minden $x \in B_r(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$. Vezessük be az $A = (\mathrm{D}f)(a)$ jelölést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in V$ vektor, melyre $Av \neq 0$ teljesül, és legyen $q = Av$.
A 17.10 tétel alapján ekkor

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q.$$

Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|t| \cdot \|v\| < r$, akkor az $a + tv \in B_r(a)$ tartalmazás miatt

$$f(a+tv) - f(a) \leq 0.$$

Tehát $t \in \left]0, \frac{r}{\|v\|}\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0,$$

illetve $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, 0\right[$ esetén

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Vagyis az

$$0 \leq \lim_{t \to 0-} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0$$

egyenlőtlenségekből a $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = q = 0$ ellentmondást kaptuk. Tehát nem létezik olyan v vektor, amire $Av \neq 0$ teljesülne, tehát $A = 0$.
Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek ott lokális maximuma van, vagyis az előző gondolatmenet alapján $(\mathrm{D}(-f))(a) = 0$, amiből $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ adódik.

17.44. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

Bizonyítás. Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \neq 0$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_r(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{(n-1)} f)$ teljesül. Vezessük be a $Q = (\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ jelölést és az

$$\varphi : B_r(a) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n}, & \text{ha} \quad x \neq a; \\ 0, & \text{ha} \quad x = a \end{cases}$$

függvényt. Az infinitezimális Taylor-formula alapján $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, vagyis a φ függvény folytonos az a pontban, az a ponton kívül pedig nyilvánvalóan folytonos. A deriváltakra vonatkozó feltételezés alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)\,\|x-a\|^n + \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \tag{17.10}$$

teljesül.

1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban. Legyen $\delta \in\,]0, r[$ olyan szám, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ teljesül. Ekkor a (17.10) egyenlet alapján minden $x \in B_\delta(a)$ pontra

$$\varphi(x)\,\|x-a\|^n + \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \leq 0.$$

Legyen $v \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Ekkor minden $t \in \left[0, \dfrac{\delta}{\|v\|}\right[$ esetén az $x = a + tv$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, vagyis az előző egyenlet alapján

$$\varphi(a+tv)\,\|v\|^n\, t^n + \frac{t^n}{n!} Q(v)^{[n]} \leq 0,$$

azaz

$$n!\varphi(a+tv)\,\|v\|^n + Q(v)^{[n]} \leq 0.$$

Végrehajtva a $t \to 0$ határátmenetet

$$Q(v)^{[n]} \leq 0$$

adódik, vagyis Q negatív. A Young-tétel alapján Q szimmetrikus is, ezért a 14.55 tétel alapján n páros.

2. Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor a $-f$ függvénynek lokális maximuma van ott és az 1. pontban igazolt eredmény alapján ekkor Q pozitív leképezés lesz.

3. Tegyük fel, hogy a Q leképezés szigorúan pozitív. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $v \in U$ vektorra $Q(v)^{[n]} \geq K\,\|v\|^n$ teljesül. Ekkor a (17.10) egyenlet alapján minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$f(x) - f(a) - \varphi(x)\,\|x-a\|^n = \frac{1}{n!} Q(x-a)^{[n]} \geq \frac{K}{n!}\,\|x-a\|^n\,,$$

vagyis

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^n \left(\varphi(x) + \frac{K}{n!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta \in\,]0, r[$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{K}{2n!}$. Ekkor minden ilyen x vektorra

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^n \left(\varphi(x) + \frac{K}{n!}\right) > \|x-a\|^n \left(-\frac{K}{2n!} + \frac{K}{n!}\right) \geq 0$$

teljesül, vagyis az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.

4. Ha $(\mathrm{D}^n f)(a)$ szigorúan negatív, akkor $(\mathrm{D}^n(-f))(a)$ szigorúan pozitív és a 3. pontban igazolt eredmény alapján ekkor a $-f$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, tehát az f függvénynek szigorú lokális maximuma van ott.

5. Tegyük fel, hogy a Q leképezés indefinit. Legyen $v_1, v_2 \in U$ olyan vektor, melyre $Q(v_1)^{[n]} > 0$ és

$Q(v_2)^{[n]} < 0$. Ha $u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ $(i = 1, 2)$, akkor a multilinearitás miatt $Q(u_1)^{[n]} > 0$ és $Q(u_2)^{[n]} < 0$ teljesül. Legyen $\alpha_1 = Q(u_1)^{[n]}$ és $\alpha_2 = -Q(u_2)^{[n]}$. Ekkor minden $t \in [0, r[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$, akkor $x_1, x_2 \in B_r(a)$, vagyis a (17.10) egyenlet alapján

$$f(x_1) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{n!}\right)$$
$$f(x_2) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{n!}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1, \delta_2 \in]0, r[$, hogy minden $x \in B_{\delta_1}(a)\setminus\{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_1}{2n!}$ és minden $x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}$ esetén $|\varphi(x)| < \dfrac{\alpha_2}{2n!}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor minden $t \in]0, \delta[$ esetén ha $x_1 = a + tu_1$ és $x_2 = a + tu_2$

$$f(x_1) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_1) + \frac{\alpha_1}{n!}\right) > \frac{t^n\alpha_1}{2n!} > 0$$
$$f(x_2) - f(a) = t^n \left(\varphi(x_2) - \frac{\alpha_2}{n!}\right) < -\frac{t^n\alpha_2}{2n!} < 0.$$

Tehát az a pont bármely kis sugarú környezetében található olyan x_1 és x_2 vektor melyre $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$ teljesül, ezért az f függvénynek nem lehet lokális szélsőértéke az a pontban.
6. Az 1. és a 2. pontból adódik.

17.13. Konvexitás differenciális jellemzése

17.45. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in]0, 1[$ esetén
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
- Az *f függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
- Az *f függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
- Az *f függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

17.46. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \le f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
$1 \Rightarrow 2$ Legyen $x, y \in \Omega$, $x \ne y$. Ekkor a konvexitás definíciója alapján minden $t \in]0, 1]$ esetén

$$f(x + t(y - x)) \le f(x) + t(f(y) - f(x)),$$

amiből

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \le f(y) - f(x) \tag{17.11}$$

adódik. Mivel f differenciálható az x pontban, ezért ebben a pontban létezik az $e = y - x$ iránymenti deriváltja és a 12.12 tétel alapján $(\mathrm{D}_e f)(x) = ((\mathrm{D}f)(x))(e)$ teljesül. Az iránymenti derivált definíciója és a (17.11) képlet alapján ekkor

$$(\mathrm{D}_e f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t} \le f(y) - f(x).$$

Ez pedig éppen az

$$((\mathrm{D}f)(x))(y-x) \leq f(y)-f(x)$$

egyenlőtlenséget jelenti.
$2 \Rightarrow 1$ Legyen $x,y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in\,]0,1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x-z) \\ f(y) &\geq f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y-z) \end{aligned}$$

Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &\geq f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x-z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y-z) = \\ &= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) = \\ &= f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

adódik.
$1 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in \Omega$ és $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_R(x) \subseteq \Omega$ és legyen $r = \dfrac{R}{\|v\|}$. Tekintsük a

$$\alpha : B_r(0) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x+tv)$$

függvényt. Az α függvény konvex, ugyanis ha $t_1, t_2 \in B_r(0)$ és $\lambda \in [0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda(x+t_1 v) + (1-\lambda)(x+t_2 v)) \leq \\ &\leq \lambda f(x+t_1 v) + (1-\lambda) f(x+t_2 v)) = \lambda\alpha(t_1) + (1-\lambda)\alpha(t_2). \end{aligned}$$

Az α függvény kétszer deriválható és a deriválási szabályokból

$$\alpha'(t) = ((\mathrm{D}f)(x+tv))(v) \qquad \alpha''(t) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x+tv))(v,v)$$

adódik. Az egyváltozós, kétszer differenciálható konvex függvények második deriváltja nem negatív, ezért

$$0 \leq \alpha''(0) = ((\mathrm{D}^{(2)}f)(x))(v,v).$$

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $x,y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 12.46 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x,y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitivitását, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y-x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x) \geq 0$$

következik, vagyis

$$f(y) \geq f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x).$$

17.47. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x,y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén*

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) < f(y)$$

2. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.
1. Tegyük fel, hogy f szigorúan konvex és $x,y \in \Omega$, $x \neq y$. Mivel f konvex, ezért a 17.46 tétel alapján

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) \leq f(y).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(y)$ teljesül. Az

$$\alpha : \{t \in \mathbb{R}|\ x + t(y - x \in \Omega)\} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(x + tv)$$

függvény konvex és kétszer differenciálható. Konvexitása miatt a deriváltja monoton növő, tehát

$$\begin{aligned}
&0 \leq \alpha' - \alpha'(0)\\
&0 \leq \int_0^1 \alpha'(t) - \alpha'(0) = \alpha(1) - \alpha(0) - ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(y) - f(x) - ((\mathrm{D}f)(x))(y-x).
\end{aligned}$$

A nem negatív $t \mapsto \alpha'(t) - \alpha(0)$ folytonos függvény integrálja csak akkor lehet nulla, ha minden pontban nulla a függvény. Ekkor viszont minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\int_0^t \alpha'(0) = \int_0^t \alpha' \tag{17.12}$$

$$t((\mathrm{D}f)(x))(y-x) = f(x + t(y-x)) - f(x). \tag{17.13}$$

A $t = \dfrac{1}{2}$ esetben ebből

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

adódik, az f szigorú konvexitásából viszont az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f(x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}f)(x))(y-x)$$

ellentmodás.
Most tegyük fel, hogy minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén

$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y-x) < f(y).$$

Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in]0,1[$ és definiáljuk a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor a feltételezés szerint

$$\begin{aligned}
f(x) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(x-z)\\
f(y) &> f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(y-z)
\end{aligned}$$

Az első egyenletet megszorozva t-vel, a másodikat $(1-t)$-vel és összeadva

$$\begin{aligned}
tf(x) + (1-t)f(y) &> f(z) + t((\mathrm{D}f)(z))(x-z) + (1-t)((\mathrm{D}f)(z))(y-z) =\\
&= f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(tx + (1-t)y - z) = f(z) + ((\mathrm{D}f)(z))(0) = f(z) =\\
&= f(tx + (1-t)y)
\end{aligned}$$

adódik.
2. Tegyük fel, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ pozitív definit. Legyen $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. A skalárértékű függvényekre vonatkozó Taylor-formula (a 12.46 tétel) alapján létezik olyan $z \in [x, y]$ pont, melyre

$$f(y) = f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x) + \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x)$$

teljesül. Felhasználva $(\mathrm{D}^{(2)}f)(z)$ pozitív definitségét, ebből

$$f(y) - f(x) - (\mathrm{D}f)(x)(y-x) = \frac{1}{2}((\mathrm{D}^{(2)}f)(z))(y-x, y-x) > 0$$

következik, vagyis

$$f(y) > f(x) + (\mathrm{D}f)(x)(y-x).$$

Viszont ebből az 1. pont alapján következik, hogy f szigorúan konvex.

18. Fourier-sorok

18.1. Trigonometrikus polinomok

Jelölés. A jelen fejezetben különösen sokat fogjuk használni a

$$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \triangleq \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{K}) |\ \forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = f(x+2\pi)\}$$

jelölést.

18.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\dots,n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

18.2. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ algebrát alkot.*
2. *Minden $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom esetén $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
3. *Minden $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén a $t \mapsto f(t+x)$ függvény is trigonometrikus polinom.*

Bizonyítás.
1. A trigonometrikus polinomok halmaza az összeadásra és a számmal való szorzásra nyilván zárt, a szorzásra pedig a minden $k, l \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ számra érvényes

$$\begin{aligned}
\sin(kt)\sin(lt) &= \frac{1}{2}\cos((k-l)t) - \frac{1}{2}\cos((k+l)t)\\
\sin(kt)\cos(lt) &= \frac{1}{2}\sin((k-l)t) + \frac{1}{2}\sin((k+l)t)\\
\cos(kt)\cos(lt) &= \frac{1}{2}\cos((k-l)t) + \frac{1}{2}\cos((k+l)t)
\end{aligned}$$

addíciós formulák miatt zárt.
2. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Az $n = 0$ és $n = 1$ esetekben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Ekkor a $\cos^n$ trigonometrikus polinomot megszorozva a cos trigonometrikus polinommal, az 1. pont értelmében megint trigonometrikus polinomot kapunk, tehát $\cos^{n+1}$ is trigonometrikus polinom. Ebből az 1. pont alkalmazásával adódik, hogy minden P polinomra $P \circ \cos$ trigonometrikus polinom.
3. A minden $t, x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra fennálló

$$\begin{aligned}
\sin(k(t+x)) &= \cos(kx)\sin(kt) + \sin(kx)\cos(kt)\\
\cos(k(t+x)) &= \cos(kx)\cos(kt) - \sin(kx)\sin(kt)
\end{aligned}$$

azonosságokból következik az állítás.

18.3. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.)* *Minden $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, melyre $\|f-\varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül.*

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítjuk a tételt.
1. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ páros függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f \circ \arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és a 11.27 tétel szerint létezik olyan $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ polinom, hogy

$$\sup_{t\in[-1,1]} |f(\arccos(t)) - p(t)| < \varepsilon$$

teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = p \circ \cos$ függvény trigonometrikus polinom. Mivel az f és a φ függvény 2π szerint periodikus, ezért

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi(x)|\,,$$

valamint mivel az f és a φ függvény páros, ezért

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - \varphi(x)| .$$

Minden $x \in [0, \pi]$ esetén $\arccos\cos x = x$ és minden $t \in [-1, 1]$ esetén $\cos\arccos t = t$, ezért

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - \varphi(x)| &= \sup_{x\in[0,\pi]} |(f \circ \arccos)(\cos x) - ((p \circ \cos) \circ \arccos)(\cos x)| = \\ &= \sup_{t\in[-1,1]} |(f \circ \arccos)(t) - p(t)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

vagyis $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.
2. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, melyre $\left\|f \sin^2 - \varphi\right\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x.\end{aligned}$$

Ekkor $f \sin^2 = f_1 \sin^2 + f_2 \sin$, valamint $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ páros 2π szerint periodikus függvények, vagyis az 1. pont alapján létezik olyan φ_1, φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|f_1 - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = \varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin$ függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f \sin^2 - \varphi\right\|_\infty &= \left\|f_1 \sin^2 + f_2 \sin - (\varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin)\right\|_\infty \le \\ &\le \left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1 \sin^2\right\|_\infty + \|f_2 \sin - \varphi_2 \sin\|_\infty \le \\ &\le \|f_1 - \varphi_1\|_\infty + \|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
3. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan φ trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \cos^2 - \varphi\right\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor $f_1 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, vagyis az 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \varphi_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|f \cos^2 - \varphi\right\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x) \cos^2 x - \varphi(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_1(x) \sin^2(x) - \varphi_1\right| = \left\|f_1 \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül.
4. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$; a 3. pont alapján létezik olyan φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\left\|f \cos^2 - \varphi_2\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \left\|f \sin^2 + f \cos^2 - \varphi_1 - \varphi_2\right\|_\infty \le \left\|f \sin^2 - \varphi_1\right\|_\infty + \left\|f \cos^2 - \varphi_2\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5. Végül legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 4. pont alapján létezik olyan φ_1 és φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|\mathrm{Re}\, f - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|\mathrm{Im}\, f - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\,\varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|(\mathrm{Re}\, f - \varphi_1) + \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f - \varphi_2)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon.$$

18.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

18.4. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$.
1. Ekkor kihasználva, hogy a sin függvény 2π szerint periodikus

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_a^{a+2\pi} = \frac{\sin(ka) - \sin(ka + k2\pi)}{k} = 0$$

adódik. Hasonlóan igazolható, hogy $\int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$.
2. A minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ számra érvényes $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx)$ és $\sin^2(kx) + \cos^2(kx) = 1$ formulából az 1. pont eredményének a felhasználásával

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 + \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$
$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} 1 - \cos(2kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

adódik.
3. A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételek és az 1. pont alapján

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \cos((m-l)x) - \cos((l+m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} \sin((m+k)x) + \sin((k-m)x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

adódik.

18.5. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}\, t, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}\, t$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az $S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, 2\pi]$ intervallumon az f határfüggvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0$$

teljesül. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) \sin(kt) - f(t) \sin(kt)| &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| \, |\sin(kt)| \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0, \\
\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) \cos(kt) - f(t) \cos(kt)| &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| \, |\cos(kt)| \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0,
\end{aligned}$$

vagyis a $t \mapsto S_n(t) \sin(kt)$ és a $t \mapsto S_n(t) \cos(kt)$ függvénysorozat is egyenletesen konvergál a $t \mapsto f(t) \sin(kt)$ és a $t \mapsto f(t) \cos(kt))$ függvényhez. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $S_n(t) \sin(kt)$ illetve az $S_n(t) \cos(kt)$ függvény folytonos, ezért a 11.17 tétel értelmében

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \ \mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos(kt) \ \mathrm{d}\, t \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \ \mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin(kt) \ \mathrm{d}\, t,
\end{aligned}$$

továbbá a trigonometrikus függvények integráljáról szóló 18.4 tétel miatt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos(kt) \ \mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi a_k & \text{ha} & n \geq k; \end{array} \right\} = \pi a_k \\
\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin(kt) \ \mathrm{d}\, t &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & n < k; \\ \pi b_k & \text{ha} & n \geq k; \end{array} \right\} = \pi b_k
\end{aligned}$$

amiből következik az állítás.

18.6. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

3. A

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

Bizonyítás. 1. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a definiált művelet teljesíti a skaláris szorzás kritériumait.
2. Legyen $k, l \in \mathbb{Z}$. Ha $k \neq l$, akkor a 18.4 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,lx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx) - \mathrm{i}\sin(kx))(\cos(lx) + \mathrm{i}\sin(lx))\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx) + \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx) - \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

ami mutatja, hogy a függvényrendszer ortogonális. A minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén fennálló

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\,x = 1$$

egyenlet pedig mutatja, hogy a függvényrendszer normált.
3. Legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$. Ha $k \neq l$, akkor a 18.4 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 0$$

ami mutatja, hogy a 2. pontban megadott függvényrendszer ortogonális. Szintén a 18.4 tétel alapján a

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right\rangle = 1$$

összefüggések pedig azt mutatják, hogy a megadott függvényrendszer normált.
4. Most igazoljuk, hogy az 1. illetve a 2. pontban megadott függvényrendszer teljessége ekvivalens. Ehhez először tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \right\rangle = 0$$

teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0\cdot x} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx}\right\rangle = 0$$

teljesül. Tehát ha f merőleges a

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

vektorhalmaz minden elemére, akkor merőleges az összes

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorra is.
Fordítva, tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy merőleges a

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

vektorhalmaz összes elemére. Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\rangle + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n > 0; \\ 0, & \text{ha,} \quad n = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle = 0, & \text{ha,} \quad n < 0 \end{cases}$$

teljesül, tehát f merőleges minden

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

vektorra.
5. Most megmutatjuk, hogy a megadott függvényrendszer teljes. Ehhez tegyük fel, hogy létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\langle f(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\rangle = 0$ teljesül. Mivel f nem azonosan nulla, ezért $0 < \int_0^{2\pi} |f|^2$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A 18.3 Weierstrass approximációs tétele szerint létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ekkor viszont a 15.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \int_0^{2\pi} (\overline{f} - \overline{\varphi})f = \langle f - \varphi, f\rangle \leq \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f - \varphi|^2\right)} < \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)} \cdot \sqrt{2\pi}\varepsilon,$$

adódik, amiből viszont

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2} < \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

következik. Mivel ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül, ezért ebből a $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$ ellentmondás adódik.

18.3. Függvény Fourier-sora

18.7. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

18.8. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}\right|$ jelölés mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n| \le \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \le \frac{D_k}{n^k}.$$

Bizonyítás. A $k = 0$ esetben a Fourier-együtthatók definíciója alapján teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, és legyen $f \in C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a parciális integrálás felhasználásával

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \\ =& \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \left(\left[f^{(k)}(t) \frac{1}{n} \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right) = \\ =& \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \cos\left(nt - (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

adódik, ami mutatja, hogy a $k + 1$ számra is igaz az állítás. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az állítás. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \right| \le \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}(t)\right| \cdot \left|\cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right)\right| \mathrm{d}\, t \le \\ &\le \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}(t)\right| \mathrm{d}\, t = \frac{D_k}{n^k} \end{aligned}$$

teljesül. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az egyenlőtlenség.

18.9. Tétel. *Minden $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ekkor f'' és $|f''|$ is folytonos függvény, tehát integrálható. Tekintsük a

$$D = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''|$$

számot. A 18.8 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra

$$|a_n| \le \frac{D}{n^2} \qquad |b_n| \le \frac{D}{n^2}$$

teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Ekkor a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \le |a_n| + |b_n| \le \frac{2D}{n^2}$$

becslés alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le 2D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

adódik, vagyis a $\sum_n f_n$ függvénysorra alkalmazható a 16.12 Weierstrass-tétel, ezért a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen is konvergens. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

ezért az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens, továbbá a $g = \lim_{n\to\infty} S_n$ határfüggvény folytonos is. Az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergenciája miatt a 18.5 tétel alapján a g függvény Fourier-együtthatóira minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) \,\mathrm{d}\, x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) \,\mathrm{d}\, x$$

adódik, vagyis a $h = f - g$ folytonos függvény összes Fourier-együtthatója nulla. Ebből a trigonometrikus rendszer teljességéről szóló 18.6 tétel alapján $h = 0$ adódik.

18.4. Riemann–Lebesgue-lemma

18.10. Tétel. *(Riemann–Lebesgue-lemma.) Minden $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvényre*

$$\lim_{a\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(at) \,\mathrm{d}\, t = \lim_{a\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(at) \,\mathrm{d}\, t = 0.$$

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük.
1. Legyen $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$, $\alpha < \beta$ és $a \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| = \left| \frac{\cos(a\alpha) - \cos(a\beta)}{a} \right| \le \frac{2}{a}$$

Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ a $[-\pi, \pi]$ intervallum felosztása és minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén legyen $c_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Tekintsük a

$$g = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \chi_{[x_k, x_{k+1}[} + c_{n-1} \chi_{[x_{n-1}, x_n]}$$

függvényt, azaz

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \begin{cases} c_k, & \text{ha} \quad t \in [x_k, x_{k+1}[\,; \\ c_{n-1}, & \text{ha} \quad t \in [x_{n-1}, x_n]\,, \end{cases}$$

és legyen $c = \max\{|c_i| \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$. Ekkor

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(at) \,\mathrm{d}\, t \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot \frac{2}{a} = \frac{2nc}{a}$$

teljesül.
2. Legyen $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Az f függvény integrálható lévén korlátos, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [-\pi,\pi]$ számra $|f(t)| < K$ teljesül. Az integrálhatóság definíciója alapján ekkor létezik a $[-\pi,\pi]$ intervallumnak olyan $I = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ felosztása, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} f - s_I(f) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Minden $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ esetén legyen $c_k = \inf\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$ és tekintsük a

$$g = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \chi_{[x_k,x_{k+1}[} + c_{n-1}\chi_{[x_{n-1},x_n]}$$

függvényt. Ekkor a $[-\pi,\pi]$ intervallumon $g \le f$ teljesül, valamint az $\int_{-\pi}^{\pi} g = s_I(f)$ összefüggés miatt a $\int_{-\pi}^{\pi} f - s_I(f) < \frac{\varepsilon}{2}$ egyenlőtlenséget a $\int_{-\pi}^{\pi} (f-g) < \frac{\varepsilon}{2}$ alakban is fel lehet írni. Továbbá minden $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ esetén $|c_k| \le K$. Az 1. pont eredményét felhasználva az alábbi becsléseket végezhetjük.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t)+g(t))\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t))\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |(f(t)-g(t))\sin(at)|\,\mathrm{d}\,t + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} f(t)-g(t)\,\mathrm{d}\,t + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nK}{a}.
\end{aligned}$$

Ezek alapján minden $a \in \left]\frac{4nK}{\varepsilon},\infty\right[$ számra

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t\right| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Az $a \to -\infty$ határátmenetet tekintve a sin függvény páratlansága miatt nem változik az eredmény. Továbbá a sin függvény helyett a cos függvényből kiindulva teljesen hasonlóan igazolható a

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(at)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

határérték is.

18.5. Dirichlet-féle magfüggvény

18.11. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \textit{ha } \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+2n, & \textit{ha } \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$. Ha létezik olyan $m \in \mathbb{Z}$, melyre $x = m2\pi$, akkor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\cos(kx) = \cos(km \cdot 2\pi) = 1$, vagyis

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n.$$

Legyen most $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Ekkor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \neq 0$ és a következő átalakítások bizonyítják a tételt.

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right) = \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right) = 1 - \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{i}\right) = \\
&= 1 + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

18.12. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1 + 2n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Dirichlet-féle magfüggvényeknek* nevezzük.

18.13. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a D_n függvény folytonos, valamint $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 2\pi$.*

Bizonyítás. A D_0 függvényre nyilván teljesül az állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor a minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennálló

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

azonosság miatt a D_n függvény folytonos, valamint

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi.$$

18.14. Tétel. *(Konvolúció a Dirichlet-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x - y)\,\mathrm{d}\,y. \tag{18.1}$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges pont. Az $n = 0$ esetben a (18.1) képlet a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

alakú lesz az S_0 illetve D_0 definíciója alapján, ami a_0 definíciója miatt nyilván igaz.
Most legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az alábbi átalakítások igazolják az állítást.

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,\mathrm{d}\,y\right)\cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,\mathrm{d}\,y\right)\sin(kx) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\cos(kx) + \sin(ky)\sin(kx)\right)\mathrm{d}\,y = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-y))\right)\mathrm{d}\,y = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y)\,\mathrm{d}\,y
\end{aligned}
$$

18.6. Dirichlet-féle lokalizációs tétel

18.15. Tétel. *(Dirichlet-féle lokalizációs tétel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül, továbbá legyen $x_0, A \in \mathbb{R}$ olyan paraméter, melyre a*

$$
\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x) + f(x_0-x) - 2A}{x}, & \textit{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \textit{ha} \quad x = 0 \end{cases}
$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege A; azaz

$$
a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = A.
$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, továbbá legyen $x_0, A \in \mathbb{R}$ olyan paraméter, melyre a

$$
\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x) + f(x_0-x) - 2A}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}
$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a 18.14 tétel alapján

$$
a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x_0 - y)\,\mathrm{d}\,y.
$$

Az integrálnál kihasználva, hogy a D_n függvény páros, az f és a D_n függvény 2π szerint periodikus, valamint bevezetve a $v = y - x_0$ és az $u = x_0 - y$ változókat

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x_0-y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(v+x_0) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v = \int_{-\pi}^{\pi} f(v+x_0) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v
$$

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x_0-y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_0+\pi}^{x_0-\pi} -f(x_0-u) D_n(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-u) D_n(u)\,\mathrm{d}\,u
$$

adódik. Mivel $A = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} A D_n(v)\,\mathrm{d}\,v$, ezért

$$
S_n(x_0) - A = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+v) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v + \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-v) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v - 2\int_{-\pi}^{\pi} A D_n(v)\,\mathrm{d}\,v\right) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x_0+v)+f(x_0-v)-2A\right) D_n(v)\,\mathrm{d}\,v = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+v)+f(x_0-v)-2A}{v}\cdot v\cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)v\right)}{\sin\frac{v}{2}}\,\mathrm{d}\,v = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(v)\cdot\frac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}v\right)\mathrm{d}\,v.
\end{aligned}
$$

Mivel a

$$
\rho : [-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \qquad v\mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}, & \text{ha} \quad v\neq 0; \\ 1, & \text{ha} \quad v = 0 \end{cases}
$$

függvény folytonos, ezért integrálható is, továbbá a tétel feltétele miatt a φ függvény is integrálható, ezért szorzatuk is integrálható. Erre a szorzatra alkalmazva a 18.10 Riemann–Lebesgue-lemmát, adódik a bizonyítandó

$$
\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x_0)-A\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi(v)\cdot\frac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}v\right)\mathrm{d}\,v = 0
$$

határérték.

18.16. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 1. következménye.) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]}\in\mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$, és legyen $x_0\in\mathbb{R}$ olyan pont, hogy f differenciálható az x_0 pontban. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens a x_0 pontban és a sor összege $f(x_0)$; azaz*

$$
a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0)+b_k\sin(kx_0) = f(x_0).
$$

Bizonyítás. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]}\in\mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x_0\in\mathbb{R}$ olyan pont, hogy ott f differenciálható. Legyen

$$
\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2f(x_0)}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x=0.\end{cases}
$$

Megmutatjuk, hogy a φ függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon és ebből már következik az állítás a 18.15 Dirichlet-féle lokalizációs tétel alapján. Mivel φ páratlan, ezért elég azt igazolni, hogy φ integrálható a $[0,\pi]$ intervallumon, hiszen ekkor a $[-\pi,0]$ intervallumon is integrálható lesz, és ekkor a 9.22 tétel alapján integrálható lesz a $[-\pi,\pi]$ intervallumon is.
A φ függvény $[0,\pi]$ intervallumon való integrálhatóságát úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $I=(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztása a $[0,\pi]$ intervallumnak, hogy a hozzá tartozó $\Omega_I(\varphi)$ oszcillációs összeg kisebb mint ε. Legyen tehát $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a 7.4 tétel szerint

$$
\forall\varepsilon^*\in\mathbb{R}^+\exists\delta^*\in\mathbb{R}^+\forall x\in\mathbb{R}: \quad \big(|x|<\delta^* \ \rightarrow\ |f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|<\varepsilon^*\cdot|x|\big).
$$

Az $\varepsilon^*=\dfrac{\varepsilon}{4}$ számhoz tehát létezik olyan $\delta^*\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ számra $|x|<\delta^*$ esetben

$$
|f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot|x|
$$

teljesül. Legyen $\delta=\dfrac{\min\{1,\delta^*\}}{2}$. Ha $x\in\,]0,\delta]$, akkor

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \left|\frac{\left(f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x\right)+\left(f(x_0-x)-f(x_0)-f'(x_0)(-x)\right)}{x}\right| \leq \\
&\leq \frac{|f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x|+|f(x_0-x)-f(x_0)-f'(x_0)(-x)|}{|x|} \leq
\end{aligned}
$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon}{4}|x| + \frac{\varepsilon}{4}|x|}{|x|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\varphi(0) = 0$, ezért minden $x \in [0, \delta]$ számra $|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha a $[0, \delta]$ intervallumot csak egy részre osztjuk fel, azaz $I_1 = (x_0, x_1) = (0, \delta)$, akkor a hozzá tartozó oszcillációs összegre

$$\Omega_{I_1}(\varphi) = (\sup_{t\in[0,\delta]} \varphi(t) - \inf_{t\in[0,\delta]} \varphi(t)) \cdot (\delta - 0) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. A $[\delta, \pi]$ intervallumon az $x \mapsto f(x_0+x)$, az $x \mapsto f(x_0-x)$ és az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény integrálható, tehát összegük és szorzatuk is integrálható, ezért itt a φ függvény is integrálható. Vagyis létezik olyan I_2 felosztása a $[\delta, \pi]$ intervallumnak, hogy a hozzá tartozó $\Omega_{I_2}(\varphi)$ oszcillációs összeg kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Legyen I a $[0, \pi]$ azon felosztása mely tartalmazza a végpontokat és az I_2 felosztás osztópontjait. Ekkor

$$\Omega_I(\varphi) = \Omega_{I_1}(\varphi) + \Omega_{I_2}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\varphi \in \mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ teljesül.

18.17. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 2. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor az f függvény Fourier-sora konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és ott a sor összege $f(x)$; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = f(x).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor f folytonos, tehát integrálható, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ pont esetén alkalmazható rá a 18.16 tétel.

18.18. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 3. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim_{x_0\pm} f$ határérték. Ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a*

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & \textit{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \textit{ha} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0-x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & \textit{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \textit{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[0, r]$ intervallumon, akkor az f függvény Fourier-sora konvergens az x_0 pontban és a sor összege $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x_0+} f + \lim\limits_{x_0-} f\right)$; azaz

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim_{x_0\pm} f$ határérték. Tekintsük a

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényeket és tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi_+, \varphi_- \in \mathcal{R}([0,r], \mathbb{R})$ teljesül. Legyen

$$A = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right)$$

és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2A}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in [0, \pi]$ számra

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy a φ függvény integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon és ebből már következik az állítás a 18.15 Dirichlet-féle lokalizációs tétel alapján.

Az $[r, \pi]$ intervallumon az $x \mapsto f(x_0 + x)$, az $x \mapsto f(x_0 - x)$ és az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény integrálható, tehát összegük és szorzatuk is integrálható, ezért itt a φ_+ és a φ_- függvény is integrálható. Tehát az összegük φ is integrálható itt. A feltétel szerint φ_+ és φ_- integrálható a $[0, r]$ intervallumon, ezért φ is integrálható itt. A 9.22 tétel alapján tehát φ integrálható a $[0, \pi]$ intervallumon is. Továbbá mivel φ páratlan, ezért a $[-\pi, 0]$ intervallumon is integrálható, vagyis megint a 9.22 tételre hivatkozva azt kapjuk, hogy φ integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

18.19. Tétel. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Bizonyítás. Legyen f olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, melyre minden $x \in [-\pi, \pi[$ esetén $f(x) = (x + \pi)^2$ teljesül és legyen $x_0 = -\pi$. Ekkor $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, mert csak egy pontban (nulla mértékű halmazon) nem folytonos, valamint

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = 4\pi^2.$$

Tekintsük a

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor minden $x \in [0, \pi]$ esetén

$$\varphi_+(x) = \frac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x} = \frac{x^2 - 0}{x} = x$$

$$\varphi_-(x) = \frac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x} = \frac{f(-\pi - x) - 4\pi^2}{x} = \frac{f(\pi - x) - 4\pi^2}{x} = x - 4\pi$$

teljesül, vagyis a φ_+ és a φ_- függvény integrálható a $[0,\pi]$ intervallumon, ezért a 18.18 Dirichlet-tétel 3. következménye alapján az f függvény Fourier-sora konvergens az x_0 pontban és a sor összege

$$A = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+} f(x) + \lim_{x\to x_0-} f(x)\right) = 2\pi^2.$$

Az f függvény Fourier-együtthatóira kétszeres parciális integrálás után

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{4\pi^2}{3}\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4(-1)^k}{k^2} \qquad k\in\mathbb{N}^+\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4\pi(-1)^{k+1}}{k} \qquad k\in\mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

adódik. Mivel minden $k\in\mathbb{N}^+$ esetén $\sin(kx_0)=0$ és $\cos(kx_0)=(-1)^k$, ezért az f függvény Fourier-sorára az x_0 pontban

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cdot(-1)^k = 2\pi^2$$

teljesül az eddigiek alapján, amiből rögtön adódik a bizonyítandó egyenlőség.

18.7. Fejér-féle magfüggvény

18.20. Tétel. *Minden $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\cdot x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}, & \textit{ha}\quad \dfrac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z};\\ 1+n, & \textit{ha}\quad \dfrac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az $n=0$ esetben nyilván igaz az állítás. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $x\in\mathbb{R}$. Ha $\dfrac{x}{2\pi}\in\mathbb{Z}$, akkor minden $k\in\{0,\dots,n\}$ esetén $D_k(x)=1+2k$, vagyis

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1+n.$$

Ha $\dfrac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z}$, akkor minden $k\in\{0,\dots,n\}$ esetén

$$D_k(x) = \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+\frac{1}{2}\right)x} =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^k\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-1}\right) =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right) =\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\operatorname{Im}\left(\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right)\cdot\mathrm{i}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\operatorname{Re}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \cos((n+1)x)\right).$$

Legyen $a = (n+1)x$. Ekkor az

$$1 - \cos a = 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

átalakítások után

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

adódik.

18.21. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin^2 \frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényeket *Fejér-féle magfüggvényeknek* nevezzük. indexFejér-féle magfüggvény

18.22. Tétel. *(A Fejér-féle magfüggvény tulajdonságai.)*

1. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_n(x) \geq 0$.*
3. *Minden $\delta \in]0, \pi[$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Felhasználva, hogy minden $j \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül az alábbi átalakítások igazolják az állítást.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{j=1}^{k}\cos(jx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2\pi = 1$$

2. A Fejér-féle magfüggvény definíciójából rögtön adódik.
3. Mivel a Fejér-féle magfüggvény a definíció alapján nyilván páros, így elég megmutatni, hogy minden $\delta \in]0, \pi[$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül. Ehhez rögzítsünk egy $\delta \in]0, \pi[$ számot. Az F_n függvények definíciója alapján ha $x \in [\delta, \pi]$, akkor

$$F_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Ha tudnánk, hogy a

$$K = \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x$$

integrál véges, vagyis $K < \infty$, akkor készen lennénk a bizonyítással a

$$\begin{aligned} 0 \leq & \quad F_n(x) && \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ 0 = \int_\delta^\pi 0 \,\mathrm{d}\, x \leq & \int_\delta^\pi F_n(x) \,\mathrm{d}\, x && \leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{n+1} \cdot K \\ 0 \leq & \lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi F_n(x) \,\mathrm{d}\, x && \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot K = 0 \end{aligned}$$

átalakítások miatt. A $\sin^2 \frac{x}{2}$ függvény monoton növő a $[\delta, \pi]$ intervallumon, vagyis minden $x \in [\delta, \pi]$ esetén

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} \leq \sin^2 \frac{x}{2},$$

amiből

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

következik, vagyis

$$K = \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\, x \leq \int_\delta^\pi \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} < \infty.$$

18.23. Tétel. *(Konvolúció a Fejér-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \tag{18.2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Az $n = 0$ esetben a (18.2) egyenlet az

$$S_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_0(y) \,\mathrm{d}\, y$$

alakban írható, ami az $S_0(x) = a_0$ és $F_0(y) = 1$ formulák felhasználásával éppen az a_0 Fourier-együttható definíciójára vezet.
Most legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a 18.14 és a 18.20 tétel felhasználásával az alábbi átalakításokkal igazolható az állítás.

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_k(x-y) \,\mathrm{d}\, y = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} D_k(x-y) \right) \mathrm{d}\, y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) \,\mathrm{d}\, y \end{aligned}$$

18.8. Fejér tétele a Fourier-sor konvergenciájáról

18.24. Tétel. *(A Fejér-tétel.) Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a 18.23 tétel alapján

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y,$$

továbbá $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1$ miatt

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) - f(x) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y,$$

tehát az $F_n \geq 0$ miatt

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y.$$

Ahhoz, hogy megmutassuk: a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az f függvényhez egyenletesen konvergál válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. Mivel az f függvény folytonos a $[-\pi, \pi]$ kompakt halmazon, így Heine tétele miatt egyenletesen is folytonos, vagyis létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$ számra $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [-\pi, \pi]$ számra

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y. \tag{18.3}$$

Az egyenletes folytonosság miatt az első integrálra

$$\frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{1}{2\pi} \int_{y\in[-\delta,\delta]} \frac{\varepsilon}{2} \cdot F_n(y) \,\mathrm{d}\, y =$$
$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y = \frac{\varepsilon}{2}$$

érvényes. Mivel az f függvény folytonos, ezért korlátos, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [-\pi, \pi]$ számra $|f(t)| < K$. Ekkor a (18.3) képletben szereplő második integrálra

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} 2K F_n(y) \,\mathrm{d}\, y = \frac{K}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y) \,\mathrm{d}\, y$$

adódik. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \,\mathrm{d}\, x = 0,$$

ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \, \mathrm{d}\, x < \frac{\varepsilon \pi}{2K}$$

teljesül. Vagyis minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)| \, F_n(y) \, \mathrm{d}\, y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel az egyenletes folytonosságnál használt δ, a korlátosságot jellemző K és a hozzá tartozó N küszöbindex megválasztása független volt az x számtól, ezért azt kaptuk, hogy az adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ és $N < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezért minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|\sigma_n - f\|_{\sup} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ami bizonyítja az egyenletes konvergenciát.

19. Komplex függvénytan

19.1. Komplex differenciálhatóság

19.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény komplex differenciálható*, vagy *holomorf az a pontban* ha létezik a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
határérték. Ekkor a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ komplex számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az
$$f' = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\wedge\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \right\}$$
függvényt.

– Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható az a pont egy környezetében.

– Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy *$\mathbb{C}$-differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.

– Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

19.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tekintsük az f által meghatározott*
$$u : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y)$$
$$v : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y)$$
függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + \mathrm{i}\, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén
$$f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$
teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. *Az f függvény holomorf az a pontban.*
2. *Létezik olyan $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, melyre*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|} = 0.$$
3. *Az u és a v függvény differenciálható az a pontban, valamint*
$$(\partial_1 u)(a) = (\partial_2 v)(a)$$
$$(\partial_2 u)(a) = -(\partial_1 v)(a)$$
teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor
$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + \mathrm{i}(\partial_1 v)(a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során az állítás jelöléseit használjuk.
$1 \Rightarrow 2$ Tegyük fel, hogy f holomorf az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Tekintsük az $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Az = cz$ lineáris leképezést. Ekkor a
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$$
határértékből
$$\lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a} \right| = 0$$

következik, amiből peidg

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}\right|=0$$

ez viszont éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}=0$$

egynlőséget jelenti.
$2\Rightarrow 3$ A 2. pontban tekintett A lineáris leképezés értéke az 1 számon legyen $p+\mathrm{i}\,q=A1$, ahol $p,q\in\mathbb{R}$, valamint az a pont algebrai alakban legyen $a=a_1+\mathrm{i}\,a_2$ $(a_1,a_2\in\mathbb{R})$ A 2. pontban feltételezett határérték szerint

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)+\mathrm{i}\,v(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-\mathrm{i}\,v(a_1,a_2)-(p+\mathrm{i}\,q)((x_1-a_1)+\mathrm{i}(x_2-a_2))}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0,$$

aminek külön kiírva a valós és képzetes részét, az alábbi egyenletek adódnak.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-p(x_1-a_1)+q(x_2-a_2)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{v(x_1,x_2)-v(a_1,a_2)-p(x_2-a_2)-q(x_1-a_1)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

Az első egyenlet szerint az u függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}u)(a)=\big((\partial_1u)(a)\quad(\partial_1u)(a)\big)=\big(p\quad -q\big)\,,$$

a második egyenlet szerint pedig a v függvény differenciálható az a pontban és

$$(\mathrm{D}v)(a)=\big((\partial_1v)(a)\quad(\partial_1v)(a)\big)=\big(q\quad p\big)\,.$$

A deriváltakból pedig leolvasható, hogy ezekre teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek.
$3\Rightarrow 1$ A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján léteznek olyan $a,b\in\mathbb{R}$ számok, hogy

$$(\mathrm{D}u)(a)=\big((\partial_1u)(a)\quad(\partial_1u)(a)\big)=\big(p\quad -q\big)\quad\text{és}\quad(\mathrm{D}v)(a)=\big((\partial_1v)(a)\quad(\partial_1v)(a)\big)=\big(q\quad p\big)$$

teljesül. Ezek alapján

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-p(x_1-a_1)+q(x_2-a_2)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{v(x_1,x_2)-v(a_1,a_2)-p(x_2-a_2)-q(x_1-a_1)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

teljesül. Az első egyenlethez hozzáadva a második i-szeresét

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{u(x_1,x_2)+\mathrm{i}\,v(x_1,x_2)-u(a_1,a_2)-\mathrm{i}\,v(a_1,a_2)-(p+\mathrm{i}\,q)((x_1-a_1)+\mathrm{i}(x_2-a_2))}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}=0$$

adódik, ami szerint

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{|x-a|}=0.$$

Ebből

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{|x-a|}\right|=0$$

következik, ahol elhagyhatjuk a nevezőből az egyik abszolútérték jelet, vagyis

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)-(p+\mathrm{i}\,q)(x-a)}{x-a}\right|=0.$$

Ez pedig éppen a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p+\mathrm{i}\,q.$$

bizonyítandó határérték létezését jelenti.

19.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az f *függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának* nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ teljesül az f *függvény a pontbeli forgatási együtthatójának* nevezzük.

19.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

19.4. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az a pontban és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

19.3. Hatványsor differenciálhatósága

19.5. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugárára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

19.4. Görbe menti integrál

19.6. Definíció. Görbék főbb típusai.

- A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim\limits_{t \to a+0} \dot\gamma(t)$ és a $\lim\limits_{t \to b-0} \dot\gamma(t)$ határérték, valamint a

$$\acute\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t \to a+0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = a; \\ \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ \lim\limits_{t \to b-0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = b. \end{cases}$$

  függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim\limits_{t \to a+0} \dot\gamma(t) + \gamma(a), & \text{ha} \quad t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha} \quad a < t < b; \\ (t-b) \lim\limits_{t \to b-0} \dot\gamma(t) + \gamma(b), & \text{ha} \quad t \geq b. \end{cases}$$

  függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.
- A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.
- A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \operatorname{Dom}\gamma$ és $b = \sup \operatorname{Dom}\gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

19.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény.

– Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és a $\displaystyle\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\displaystyle\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük.

– Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ olyan, hogy a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0,\ldots,n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és szintén a $\displaystyle\int_\gamma f$ vagy a $\displaystyle\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\acute{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}(t)\right|\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget a *γ görbe hosszának* nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

– Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\displaystyle\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

19.8. Tétel. *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$. *Ekkor*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma^\circ}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

Bizonyítás. A görbe menti integrál és a γ° függvény definíciójának közvetlen következménye.

19.9. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|\,.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\displaystyle\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ teljesül. Legyen $u = \operatorname{Re} f$ és $v = \operatorname{Im} f$. Ekkor

$$\left|\int_a^b f\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}\int_a^b f = \int_a^b (\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha))\cdot(u(t) + \mathrm{i}\,v(t))\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \cos(\alpha)u(t) + \sin(\alpha)v(t)\,\mathrm{d}\,t \le$$
$$\le \int_a^b \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b |f|$$

teljesül, ahol az egyenlőtlenségnél a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget használtuk.

19.10. Tétel. *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ *és* $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} g$ *teljesül.*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \qquad \displaystyle\int_\gamma (\lambda f) = \lambda \int_\gamma f$
3. *Legyen* $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b+a-t)$, *ekkor* $\displaystyle\int_\delta f = -\int_\gamma f$.
4. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \sup_{x\in \operatorname{Ran}\gamma} |f(x)|$

Bizonyítás. Az első és a második tulajdonság a Riemann-integrál linearitásán múlik.
Ha $\gamma \in \Gamma^e$, akkor

$$\int_\delta f = \int_a^b f(\delta(t))\acute{\delta}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(a+b-t)\acute{\gamma}(a+b-t)(-1)\,\mathrm{d}\,t =$$
$$\overset{x=a+b-t}{=} \int_b^a f(x)\acute{\gamma}(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_\gamma f$$

és

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq$$
$$\leq \int_a^b \sup_{x\in\operatorname{Ran}\gamma} |f(x)|\cdot|\acute{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}\,t = L(\gamma)\sup_{x\in\operatorname{Ran}\gamma}|f(x)|$$

teljesül. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletek igazolják az állítás 3. és 4. pontját.

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje $[a, b]$ az *a és b pontokat összekötő szakaszt*, vagyis

$$[a,b] = \{a + t(b-a) \in \mathbb{C} |\ t \in [0,1]\}\,.$$

19.11. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b-a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,\mathrm{d}\,t.$$

19.12. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f.$
2. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
3. *Minden $c \in [a, b]$ pontra* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

Bizonyítás. Az 1. és a 2. pont a 19.10 tétel alapján teljesül. A 3. pont pedig Riemann-integrálás egyik alaptulajdonsága.

19.13. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a *F az f primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint *F az f globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

19.14. Tétel. *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvények, melyekre $F' = f$ és $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül. Ekkor

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\acute{\gamma}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b F'(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma^\circ}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b (F\circ\gamma^\circ)'(t)\,\mathrm{d}\,t = [F\circ\gamma^\circ]_a^b = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletet alkalmazva minden Γ^e beli részre kapjuk az állítást.

19.15. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

Bizonyítás. A 19.14 tétel közvetlen következménye.

19.5. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

Jelölés. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje

$$T(a, b, c) \triangleq \left\{\alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbb{C} \,|\, |(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3 \ \wedge \ \alpha + \beta + \gamma = 1\right\}$$

az a, b, c csúcspontú háromszöget.

Jelölés. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az a, b, c háromszög oldalain való integrálást a megfelelő irányítással az alábbi módon fogjuk jelölni.

$$\int_{[a,b,c]} f \triangleq \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$$

19.16. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

19.17. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az*

$$F : U \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

19.18. Tétel. *(Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.*

19.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f fügvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.6. Az indexfüggvény

19.21. Tétel. *Legyen* $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ *és tekintsük az* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ *függvényt és a* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ *görbét. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \neq -1; \\ 2\pi\,\mathrm{i}\,m, & \text{ha} \quad n = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvény és $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ pedig a $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbe. Ekkor a görbementi integrál definíciója alapján

$$\int_\gamma f = \int_0^1 r^n w^n\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,nmt}\,rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}\,2\pi\,\mathrm{i}\,m\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\,\mathrm{i}\,mr^{n+1}w^{n+1}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(n+1)mt}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= 2\pi\,\mathrm{i}\,mr^{n+1}w^{n+1}\int_0^1 \cos((n+1)mt) + \mathrm{i}\sin((n+1)mt)\,\mathrm{d}\,t.$$

Amiből adódik, hogy $n \neq -1$ esetén az integrál nulla, $n = -1$ esetén pedig

$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i}\,m.$$

19.22. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}$$

19.23. Tétel. *Legyen* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ *és tekintsük a* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ *görbét. Ekkor minden* $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = r\}$ *esetén*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |z| > r; \\ m, & \text{ha} \quad |z| < r. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbe. Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| < r$, akkor minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left|\frac{z}{\gamma(t)}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma(t)}} = 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^n} = 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^1 2\pi\,\mathrm{i}\,m\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= m\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{z^n}{r^n w^n}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,mnt}\,\mathrm{d}\,t = m$$

adódik.
Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| > r$, akkor minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left|\frac{\gamma(t)}{z}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$$

miatt

$$\frac{\acute{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{-\acute{\gamma}(t)}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma(t)}{z}} = \frac{-\acute{\gamma}(t)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{z^n} = -2\pi\,\mathrm{i}\, m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, m(n+1)t}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, m(n+1)t}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z|}\right)^{n+1} < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{\acute{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z} \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 -2\pi\,\mathrm{i}\, m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, m(n+1)t} \,\mathrm{d}\, t = \\ &= -m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{rw}{z}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\, m(n+1)t} \,\mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

adódik.

19.24. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\mathrm{Ran}\,\mathrm{Ind}_\gamma \subseteq \mathbb{Z}$
2. *Az Ind_γ függvény folytonos.*
3. *Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.*

19.7. Cauchy integráltételei

19.25. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a *γ_0 és γ_1 kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0,1]^2 \to U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

19.26. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az *$U \subseteq M$ halmaz egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az *(M,d) metrikus tér egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

19.27. Tétel. *(Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz és minden $z \in \mathrm{Dom}\, f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\mathrm{Dom}\, f$ halmazban, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

19.28. Tétel. *(Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\mathrm{Ran}\,\gamma \subseteq U \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\operatorname{Dom} f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén*

$$\oint_\gamma f = 0$$

teljesül.

19.30. Tétel. *(Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \operatorname{Ran}\gamma$ pontra*

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

Jelölés. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\gamma_{r,a} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$
$$S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z-a| = r\}.$$

19.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

19.8. Cauchy transzformáció

19.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az *f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - z}.$$

19.33. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. *A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a $\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran}\gamma)$ számnál.*
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\operatorname{dist}(a,\operatorname{Ran}\gamma)}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$C^{(n)}_{f,\gamma}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

19.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.*

1. *Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a*

$$r_a = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\}$$

számnál.

3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$, $r \in\,]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

19.9. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei

19.35. Tétel. *(Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.*
- *Létezik a $\lim\limits_{a} f$ határérték.*
- *Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)$ halmaz korlátos.*
- $\lim\limits_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$

19.36. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.37. Tétel. *(Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Az f függvény holomorf.*
- *Minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ esetén $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ teljesül.*
- *Minden $a, b, c \in \operatorname{Dom} f$ esetén, ha $T(a,b,c) \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

19.38. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.39. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

19.40. Tétel. *(Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \le |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n-ed fokú polinom.*

19.41. Tétel. *(Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.*

19.42. Tétel. *(Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.*

19.11. Holomorf függvények gyökei

19.43. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$.*

1. *Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.*

2. *Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ számra $f(z) = (z-a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.*
3. *Az N_f halmaz megszámlálható.*

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény esetén vezessük be az

$$N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$$

jelölést a zérushelyekre és minden $a \in N_f$ esetén az a gyök multiplicitását jelölje $m_f(a)$.

19.44. Tétel. *(Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha a $T = \{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.*

19.12. Laurent-sorfejtés

Jelölés. Ha $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre a $\sum_k a_{-k}$ és a $\sum_k a_k$ sor is konvergens, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést.

19.45. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in \,]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$$

halmazt az *a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

19.46. Tétel. *(Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\operatorname{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\operatorname{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) c_n = \frac{1}{2\pi \, \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\operatorname{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} \ .$$

19.47. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\operatorname{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\operatorname{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \ .$$

– Ekkor a
$$C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$$
függvénysort az *f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük.
– Az *f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_r : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z-a)^n$$
és az *f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon*
$$f_p : C_{0,\rho}(a) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z-a)^n .$$
– Az *f függvénynek az a pontban pólusa* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ | \, c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az
$$r_f(a) = \max\left\{m \in \mathbb{N}^+ | \, c_{-m} \neq 0\right\}$$
szám a *pólus rendje.*
– *Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása* van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ | \, c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.
– A c_{-1} számot az *f függvény a pontbeli reziduumának* nevezzük és a $\operatorname{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

19.48. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m-ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor*
$$\operatorname{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right) \right) .$$

19.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele

19.49. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf,* ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\operatorname{Dom} f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

19.50. Tétel. *(Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*
$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}_f(a) .$$

19.51. Tétel. *(Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*
$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a\in P_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) r_f(a) .$$

19.52. Tétel. *(Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor*
$$\sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a\in N_{f+g}} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a) .$$

19.14. Nyílt leképezés tétele, lokális maximum elve és a Schwarz-lemma

19.53. Tétel. *(Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.*

19.54. Tétel. *(Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.*

19.55. Tétel. *(Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.*

19.56. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor*

$$\sup_{x\in\overline{U}} |f(x)| = \max_{x\in \operatorname{Fr} U} |f(x)|\,,$$

ahol $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

19.57. Tétel. *(Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \le C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$|f(z) - f(a)| \le C\frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \le \dfrac{C}{r}$.

19.15. Casorati–Weierstrass-tétel és a Hurwitz-tétel

19.58. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen $r(a) = \sup\Big\{r \in \mathbb{R}^+ \big|\ \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f\Big\}$ és az f függvény a pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$.*

1. *Ekkor minden $r \in \,]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \le \dfrac{1}{r^n} \cdot \displaystyle\sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
3. *Az f függvénynek pontosan akkor van m-ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\dfrac{C_1}{|z-a|^m} \le |f(z)| \le \dfrac{C_2}{|z-a|^m}$.*
4. *Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in \,]0, r(a)[$ esetén $\dfrac{C_k}{r^k} \le \displaystyle\sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*

19.59. Tétel. *(Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in \,]0, r[$ esetén $\overline{f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)} = \mathbb{C}$.*

19.60. Tétel. *(Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}$.*

19.61. Tétel. *(Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.*

19.16. Pár valós integrál kiszámítása reziduum tétellel

19.62. Tétel. *Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \geq 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]0, 2\pi[\, : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]-1, 1[\, : \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a\right)$$

19.17. A Cauchy-integrálformula és a reziduum-tétel néhány következménye

19.63. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf fgüvény, hogy*

1. *az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;*
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$*;*
3. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$*,*

akkor $f = g$.

19.64. Tétel.

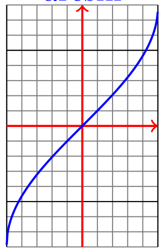
1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}:$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{(z+k)^2}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right):$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}:$ $\qquad \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{1}{\pi z} + \dfrac{2z}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^2 - k^2}$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right):$ $\qquad \operatorname{tg}(\pi z) = \dfrac{2z}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

20. Függelék

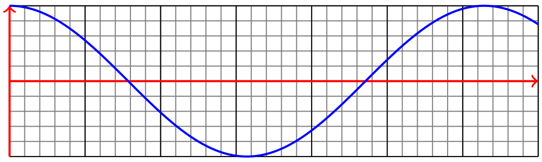
20.1. Az elemi függvények grafikonjai

sin

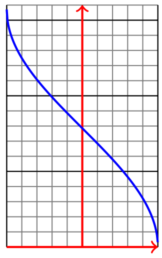
arcsin



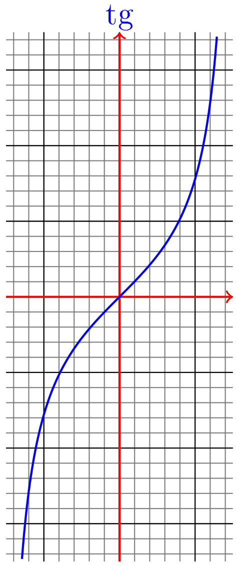
cos



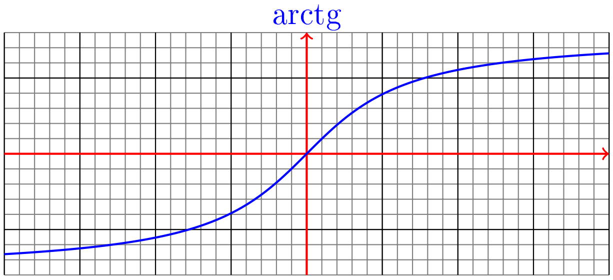
arccos

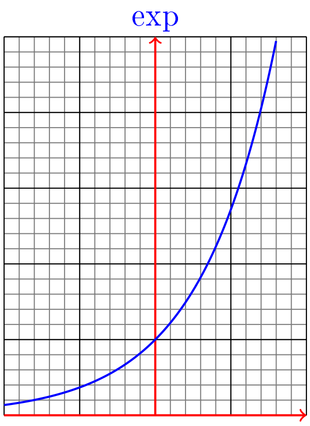


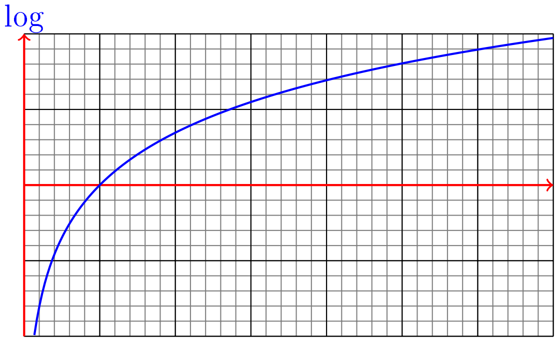
tg

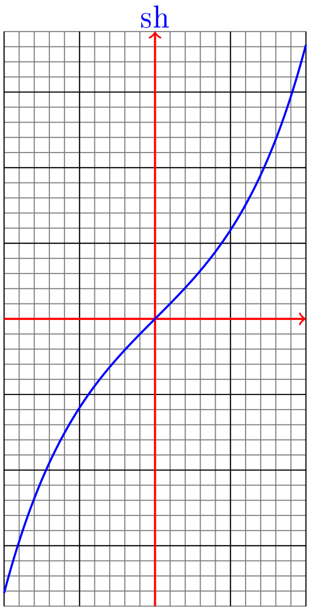


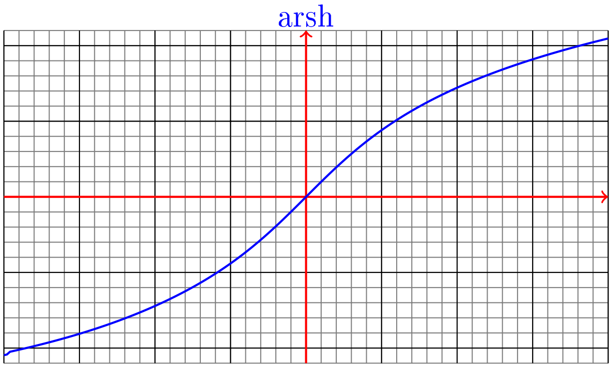
arctg

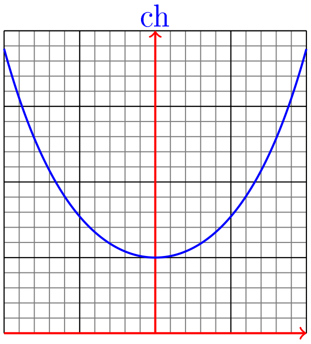


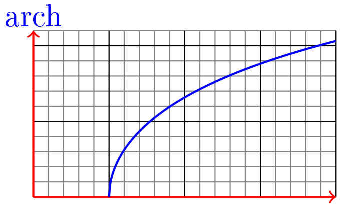

exp

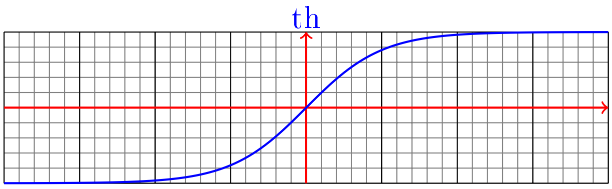

log

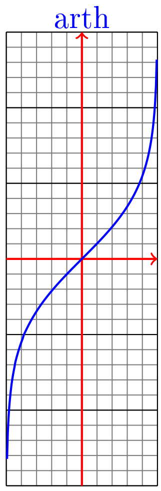

sh


arsh









20.2. Tizedestörtek

20.1. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Értelmezzük az*

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1}x] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n = 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor

1. *minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;*
2. *a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;*
3. *minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;*
4. *$x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;*
5. *végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N-1$;*
6. *legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
1. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és legyen $y = N^{n-1}x$. Ekkor

$$[N^n x] - \left[N^{n-1}x\right] \cdot N = [N([y]+\{y\})] - [[y]+\{y\}] \cdot N = N\,[y] + [N\,\{y\}] - [y]\,N = [N\,\{y\}]\,,$$

vagyis $a(x)_n$ egész szám, továbbá $a(x)_n \leq N-1$, hiszen ellenkező esetben $\{y\} \geq 1$ teljesülne.
2. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sort majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n}$ sor, mely konvergens.
3. Az $a(x)$ sorozat definíciója alapján n szerinti teljes indukcióval egyszerűen adódik.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a(x)_k}{N^k}$. Felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N^n x = [N^n x] + \{N^n x\}$$

és az előző pont eredményét

$$\alpha_n = \frac{N^n x - \{N^n x\}}{N^n} = x - \frac{\{N^n x\}}{N^n}$$

adódik, amiből pedig

$$|x - \alpha_n| < \frac{1}{N^n}$$

következik. Vagyis $\lim \alpha = x$.
5. Tegyük fel, hogy csak véges sok n természetes számra teljesül az $a(x)_n < N-1$ egyenlőtlenség. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ természetes számra $a(x)_n = N-1$. Tehát az

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

egyenlőség miatt

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

teljesül, ami ellentmond a 4. bizonyításában szereplő

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| < \frac{1}{N^{n^0}}$$

egyenlőtlenségnek.
6. Legyen $b : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, N-1\}$ olyan sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

teljesül, és tegyük fel, hogy $a(x) \neq b$. Legyen $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} |\ a(x)_n \neq b_n\}$. Ekkor

$$\frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melynek átrendezéséből

$$\left| \frac{a(x)_{n_0} - b_{n_0}}{N^{n_0}} \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n - b_n}{N^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(x)_n - b_n|}{N^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis $|a(x)_{n_0} - b_{n_0}| = 1$. Ha $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, akkor a fenti egyenlőtlenségben csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $n > n_0$ esetén

$$|a(x)_n - b_n| = N - 1.$$

Továbbá a két sor összege csak akkor egyezhet meg, ha $b_n \geq a(x)_n$. Tekintettel arra, hogy $b_n, a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ezért csak az $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$ megoldása van a fenti egyenlőtlenségnek. A $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ esetben a fentihez hasonló érveléssel azt kapnánk, hogy minden $n > n_0$ számra $a(x)_n = N - 1$ és $b_N = 0$. Ekkor viszont

$$x = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}+1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis az $a(x)$ sorozat definíciója alapján $a_{n_0} + 1 = a_{n_0}$, ami ellentmondás, tehát a $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ eset nem valósulhat meg.
Fordítva, ha $a(x) = b$, akkor a két sor összege nyilván megegyezik. Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$ és minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}+1}{N^{n_0}}$$

és

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \frac{1}{N^{n_0}}
\end{aligned}$$

vagyis a két sor összege megegyezik.

20.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - \left[N^{n-1} x\right] \cdot N, & \text{ha} \quad n > 0; \\ [x], & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \dots \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melyet az x *szám* N *alapú számrendszer vett felírásának* nevezünk.

20.3. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Bizonyítás. Mivel a valós számok a racionális számok bizonyos részhalmazai (Dedekind-szeletei), ezért létezik $j : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ injektív leképezés, vagyis $|\mathbb{R}| \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Mivel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ezért $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Most a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{R}|$ formulát igazoljuk. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \qquad E \mapsto s(E) := \left(n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin E; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in E. \end{cases} \right)$$

$$\rho : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k}$$

Rövid számolással igazolható, hogy a φ függvény bijekció, valamint a ρ függvény a 20.1 állítás alapján injektív. Tehát $\rho \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injektív leképezés, vagyis $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.
Tehát $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, vagyis az 1.93 Schröder–Bernstein-tétel alapján $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

20.3. Kategóriák

20.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy adott egy $\mathcal{K}$ *kategória*, ha

1. adottak *objektumai*, melynek jele $\mathcal{OB}$;
2. bármely két (esetleg azonos) $A, B \in \mathcal{OB}$ esetén adott az A *objektumból* B *objektumba képező morfizmusok* $\mathcal{MOR}(A,B)$ *halmaza*;
3. bármely három $A, B, C \in \mathcal{OB}$ esetén adott egy
$$\mathcal{MOR}(A,B) \times \mathcal{MOR}(B,C) \to \mathcal{MOR}(A,C) \qquad (f,g) \mapsto g \circ f$$
függvény, a *morfizmusok kompozíciója*.

Továbbá megköveteljük, hogy bármely négy $A, B, C, D \in \mathcal{OB}$ objektum és $f \in \mathcal{MOR}(A,B)$, $g \in \mathcal{MOR}(B,C)$, $h \in \mathcal{MOR}(C,D)$ morfizmus esetén
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
teljesüljön, valamint minden $A \in \mathcal{OB}$ esetén létezzen egy kitüntetett eleme a $\mathcal{MOR}(A,A)$ halmaznak, melyet *egységmorfizmusnak* nevezünk, és az id_A szimbólummal jelölünk, azzal a tulajdonsággal, hogy minden $B, C \in \mathcal{OB}$ objektumra és $f \in \mathcal{MOR}(A,B)$, $g \in \mathcal{MOR}(C,A)$ morfizmusra
$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g$$
teljesül.

Jelölés. Ha nem okoz félreértést, akkor a $\mathcal{K}$ kategóriát röviden a $\mathcal{K} = (\mathcal{OB}, \mathcal{MOR})$ alakban írjuk fel.

20.5. Definíció. (*Példák kategóriákra.*)

- Legyen $\mathcal{SET}$ az a kategória, melynek az objektumai a halmazok, és bármely két A, B halmaz esetén legyen $\mathcal{MOR}(A,B) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{F}(A,B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{SET}$ kategóriát a *halmazok kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{VECT}$ az a kategória, melynek az objektumai a valós számtest feletti vektorterek, és tetszőleges A, B vektortér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A,B) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{Lin}(A,B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{VECT}$ kategóriát a *valós számtest feletti vektorterek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{MET}$ az a kategória, melynek az objektumai a metrikus terek, és tetszőleges A, B metrikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A,B) \stackrel{\triangle}{=} C(A,B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{MET}$ kategóriát a *metrikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{TOP}$ az a kategória, melynek az objektumai a topologikus terek, és tetszőleges A, B topologikus tér esetén legyen $\mathcal{MOR}(A,B) \stackrel{\triangle}{=} C(A,B)$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{TOP}$ kategóriát a *topologikus terek kategóriájának* nevezzük.
- Legyen $\mathcal{GROUP}$ az a kategória, melynek az objektumai a csoportok, és tetszőleges A, B csoport esetén legyen $\mathcal{MOR}(A,B) \stackrel{\triangle}{=} \{f : A \to B | f \text{ homomorfizmus}\}$. A morfizmusok kompozíciója pedig legyen a megszokott függvénykompozíció. A $\mathcal{GROUP}$ kategóriát a *csoportok kategóriájának* nevezzük.

20.4. Vektorterek

20.6. Definíció. A $(V, +, \cdot)$ hármast *vektortérnek* nevezzük a $\mathbb{K}$ számtest felett, ha V halmaz, $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ olyan függvény mely teljesíti a következőket.

1. A $(V, +)$ pár kommutatív csoport.
2. Minden $a, b \in \mathbb{K}$ és $x, y \in V$ esetén
$$a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$$
$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$
$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$
$$1 \cdot x = x.$$

A továbbiakban a $\cdot$ műveletet nem írjuk ki.

20.7. Tétel. *A valós együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett, hasonlóan a komplex együtthatójú polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{C}$ felett.*

Bizonyítás. Elemi számolással igazolhatók a vektortérre megkövetelt tulajdonságok.

20.8. Definíció. A $(V,+,\cdot,\times)$ négyest *algebrának* nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha
- $(V,+,\cdot)$ hármas vektortér a $\mathbb{K}$ test felett,
- $\times : V\times V \to V$ pedig olyan művelet, melyre minden $x,y,z\in V$ és $c\in\mathbb{K}$ esetén az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned}(x\times y)\times z &= x\times(y\times z)\\ x\times(y+z) &= x\times y + x\times z\\ (y+z)\times x &= y\times x + z\times x\\ c\cdot(x\times y) &= (c\cdot x)\times y = x\times(c\cdot y)\end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy $(V,+,\cdot,\times)$ *egységelemes algebra*, ha létezik olyan $e\in V$, hogy minden $x\in V$ elemre $e\times x = x\times e = x$.
Ha nem okoz félreértést, a $\cdot$ és $\times$ műveletet nem írjuk ki.

20.9. Tétel.
1. *Tetszőleges A halmaz mellett $(\mathcal{F}(A,\mathbb{K}),+,\times)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*
2. *A polinomok halmaza algebrát alkot.*

Bizonyítás. Elemi számolással igazolhatók a vektortérre megkövetelt tulajdonságok.

20.10. Definíció. Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i\in I}$ vektorok egy rendszere, azaz minden $i\in I$ esetén legyen $e_i\in V$.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden $i\in\{1,\ldots,n\}$ esetén $e_i\neq 0$ és ha minden $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0 \quad\to\quad a_1=\cdots=a_n=0$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha minden véges $J\subseteq I$ halmazra az $(e_i)_{i\in J}$ vektorrendszer lineárisan független.
- Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer *algebrai bázis*, ha lineárisan független vektorrendszer, és nem valódi részhalmaza egyetlen lineárisan független vektorrendszernek sem.

20.11. Tétel. *Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i\in I}$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor létezik olyen B bázis a V vektortérben, melyre minden $i\in I$ esetén $e_i\in B$ teljesül. (Vagyis lineárisan független vektorok rendszere kiegészíthető bázissá.)*

Bizonyítás. Legyen V vektortér és legyen $(e_i)_{i\in I}$ lineárisan független vektorrendszer.

$$H=\{S\in\mathcal{P}(V)|\ S \text{ elemei lineárisan független vektorrendszert alkotnak, } \forall i\in I : e_i\in S\}$$

halmazt, és értelmezzük rajta a $\leq$ reláció, mint a halmazelméleti tartalmazást, azaz $f,g\in H$ elemekre $f\leq g$ pontosan akkor teljesül, ha $f\subseteq g$.
Rövid számolással igazolható, hogy $(H,\leq)$ induktívan rendezett halmaz, ezért létezik maximális eleme, legyen ez f. Ha az f vektorrendszer elemei nem alkotnának bázist, akkor létezne olyan f' lineárisan független vektorrendszer, melyre $f\subsetneq f'$ teljesül, vagyis az $f<f'$ reláció miatt f nem lenne maximális. Tehát az f elemei bázist alkotnak.

20.12. Tétel. *Minden vektortérben létezik bázis.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér és $K = \{\}$. Ekkor a K halmaz (nem létező) elemei lineárisan függetlenek, vagyis az előző tétel alapján létezik olyan B bázis a V vektortérben mely tartalmazza a K halmazt.

20.13. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor minden $x \in V$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz és a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből álló $(a_j)_{j\in J}$ számrendszer, melyre*

$$x = \sum_{j\in J} a_j e_j$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben és $x \in V$ tetszőleges vektor. Ha $x = 0$, akkor $J = \emptyset$ választással teljesül az állítás, tehát feltehető, hogy $x \neq 0$.
Ha nem létezne olyan $J \subseteq I$ véges halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz elemeiből álló $(a_j)_{j\in J}$ számrendszer, melyre

$$x = \sum_{j\in J} a_j e_j$$

teljesül, akkor az $\{e_i | i \in I\} \cup \{x\}$ halmazrendszer is lineárisan független lenne, vagyis $(e_i)_{i\in I}$ nem lenne bázis.
Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $J_1, J_2 \subseteq I$ olyan véges halmaz és $(a_j)_{j\in J_1}$, $(b_j)_{j\in J_2}$ olyan nem nulla számok, melyekre

$$x = \sum_{j\in J_1} a_j e_j = \sum_{j\in J_2} b_j e_j$$

teljesül. Legyen $J = J_1 \cup J_2$ és minden $j \in J$ esetén legyen

$$c_j = \begin{cases} a_j, & \text{ha} \quad j \in J_1 \setminus J_2; \\ -b_j, & \text{ha} \quad j \in J_2 \setminus J_1; \\ a_j - b_j, & \text{ha} \quad j \in J_1 \cap J_2. \end{cases}$$

Ekkor a

$$0 = \sum_{j\in J} c_j e_j$$

egyenlőségből a bázisvektorok lineáris függetlensége miatt az adódik, hogy minden $j \in J$ esetén $c_j = 0$.
Tehát
– minden $j \in J_1 \setminus J_2$ indexre $c_j = 0$ miatt $a_j = 0$, és mivel $a_j \neq 0$, ezért $J_1 \setminus J_2 = \emptyset$;
– minden $j \in J_2 \setminus J_1$ indexre $c_j = 0$ miatt $b_j = 0$, és mivel $b_j \neq 0$, ezért $J_2 \setminus J_1 = \emptyset$;
– minden $j \in J_1 \cap J_2$ indexre $c_j = 0$ miatt $a_j = b_j$ teljesül.
Ezért $J_1 = J_2$ és minden $j \in J_1$ esetén $a_j = b_j$.

20.14. Tétel. *Ha $(e_i)_{i\in I}$ bázis a V vektortérben, akkor*

$$V = \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i e_i | \ \forall i \in I: \ \alpha_i \in \mathbb{K} \ \wedge \ \textit{az } \{i \in I | \alpha_i \neq 0\} \ \textit{halmaz véges} \right\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha V_0 jelöli a jobb oldalon álló halmazt, akkor a 20.13 tétel alapján $V \subseteq V_0$ teljesül. Mivel vektorok lineáris kombinációja is eleme a vektortérnek, ezért $V_0 \subseteq V$, vagyis $V = V_0$.

20.15. Tétel. *(Kicserélési lemma.) Legyen V vektortér, $n, k \in \mathbb{N}$, valamint legyen $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ és $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ bázis. Ekkor minden $l \in \{1, \ldots, k\}$ esetén létezik olyan $b_{j(l)}$ vektor, hogy az*

$$\{a_i | i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer bázis.

Bizonyítás. Legyen V vektortér, $n, k \in \mathbb{N}$, valamint legyen $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ és $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ bázis. Először indirekt módon azt tegyük fel, hogy van olyan $l \in \{1, \ldots, k\}$ index, hogy minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az

$$\{a_i | i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_j\}$$

vektorrendszer nem lineárisan független.
A jelölések egyszerűsítése végett legyen $I = \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}$.
Ekkor minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén vannak olyan $(\alpha_i^{(j)})_{i\in I}$ és β_j nem csupa nullából álló számok, hogy

$$\beta_j b_j + \sum_{i\in I} \alpha_i^{(j)} a_i = 0$$

teljesül. Ha $\beta_j = 0$, akkor az $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ rendszer lineáris függetlensége miatt minden $i \in I$ indexre $\alpha_i^{(j)} = 0$ teljesülne, ami ennentmond annak, hogy a fenti lineáris kombinációban nem minden együttható nulla. Tehát $\beta_j \neq 0$, vagyis minden $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$b_j = \sum_{i\in I} -\frac{\alpha_i^{(j)}}{\beta_j} a_i \subseteq \left\{\sum_{i\in I} \gamma_i a_i | \ \forall i \in i \in I : \ \gamma_i \in \mathbb{K}\right\}.$$

Mivel lineáris kombinációk lineáris kombinációja is lineáris kombináció, ezért

$$V = \left\{\sum_{j=1}^{n} \delta_j b_j | \delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{K}\right\} \subseteq \left\{\sum_{i\in I} \gamma_i a_i | \ \forall i \in I : \ \gamma_i \in \mathbb{K}\right\},$$

amiből az $a_l \notin V$ ellentmondás adódik.
Eddig tehát ott tartunk a bizonyításban, hogy minden $l \in \{1, \ldots, k\}$ esetén létezik olyan $b_{j(l)}$ vektor, hogy az

$$\{a_i | i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer lineárisan független. Most igazoljuk, hogy ez a vektorrendszer bázis is. Ehhez legyen $l \in \{1, \ldots, k\}$ tetszőleges és legyen olyan $b_{j(l)}$ olyan vektor, hogy az

$$\{a_i | i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}\} \cup \{b_{j(l)}\}$$

vektorrendszer lineárisan független. A továbbiakban is az $I = \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}$ jelöléssel fogunk élni.
Indirekt módon tegyük fel, hogy a fenti vektorrendszer nem bázis. Legyen $x \in V$ olyan vektor, hogy a

$$\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\} \cup \{x\}$$

vektorrendszer is lineárisan független. Mivel az $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ vektorrendszer bázis, ezért léteznek olyan $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,k}$ és $(\beta_i)_{i=1,\ldots,k}$ számok, hogy

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i a_i + \alpha_l a_l$$
$$b_{j(l)} = \sum_{i\in I} \beta_i a_i + \beta_l a_l.$$

Mivel $\{a_i | i \in I\} \cup \{x\}$ lineárisan független, ezért $\alpha_l \neq 0$, valamint $\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\}$ lineáris függetlensége miatt $\beta_l \neq 0$. Ekkor viszont

$$\sum_{i\in I} (\beta_l \alpha_i - \alpha_l \beta_i) a_i + \alpha_l b_{j(l)} - \beta_l x = 0$$

teljesül, ami ellentmond a

$$\{a_i | i \in I\} \cup \{b_{j(l)}\} \cup \{x\}$$

vektorrendszer is lineárisan függetlenségének.

20.16. Tétel. *Ha valamely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és az $(f_j)_{j=1,\ldots,m}$ vektorrendszer is bázis, akkor $n = m$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén az $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és az $(f_j)_{j=1,\ldots,m}$ vektorrendszer is bázis. Ha $n = 0$, akkor $V = \{0\}$, tehát a V vektortérben az egyetlen bázis a $\emptyset$, ezért $m = 0$. Ha $n = 1$, akkor $V = \mathbb{K} \cdot e_1$. Az f_1 vektor felírható az e_1 bázisban, tehát létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, melyre $f_1 = \lambda e_1$. Viszont ekkor $V = \mathbb{K} \cdot f_1$ is teljesül, vagyis f_1 is bázis, ezért $m = 1$.
Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Mivel $(f_j)_{j=1,\ldots,m}$ bázis, ezért az előző (20.15) állítás alapján az e_1 vektorhoz létezik olyan $f_{j(1)}$ bázisvektor, hogy a $\{e_i | i \in \{2, \ldots, n\}\} \cup \left\{f_{j(1)}\right\}$ vektorrendszer bázis. Megint a 20.15 állítást használva a $\{e_i | i \in \{2, \ldots, n\}\} \cup \left\{f_{j(1)}\right\}$ bázis e_2 elemére, azt kapjuk, hogy létezik olyan $f_{j(2)}$ bázisvektor, hogy a $\{e_i | i \in \{3, \ldots, n\}\} \cup \left\{f_{j(1)}, f_{j(2)}\right\}$ vektorrendszer bázis. Ezt az eljárást n-szer alkalmazva azt kapjuk, hogy az $\left\{f_{j(i)} | i = 1, \ldots, n\right\}$ halmazrendszer bázis. Mivel bázis nem lehet valódi részhalmaza bázisnak, ezért $m = n$.

20.17. Tétel. *A V vektortérben legyen $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és $(f_j)_{j\in J}$ bázis. Ekkor $|J| = n$.*

Bizonyítás. A V vektortérben legyen $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ és $(f_j)_{j\in J}$ bázis. A 20.13 állítás alapján

$$V = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k | \; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Mivel minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az e_i vektorhoz egyértelműen létezik olyan $J_i \subseteq J$ véges halmaz és a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből álló $(a_{ij})_{j \in J_i}$ számrendszer, melyre

$$e_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij} f_j$$

teljesül, ezért a $J_0 = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ jelölés bevezetésével $(f_j)_{j \in J_0}$ is bázis. Mivel bázis nem lehet valódi részhalmaza bázisnak, ezért $J = J_0$, valamint J_0 véges sok véges halmaz uniója, ezért J_0 is véges. Legyen $|J_0| = m$.
Ekkor a 20.16 tétel alapján $n = m = |J_0| = |J|$ teljesül.

20.18. Definíció. Legyen V vektortér. Azt mondjuk, hogy a V vektortér
- *n-dimenziós* ($n \in \mathbb{N}$), ha létezik benne n elemszámú bázis;
- *véges dimenziós* ha n dimenziós valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- *végtelen dimenziós*, ha nem véges dimenziós.

20.19. Definíció. Legyen V_1 és V_2 vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy az $A : V_1 \to V_2$ *leképezés lineáris*, ha
- $\forall x, y \in V_1 : \; A(x + y) = A(x) + A(y)$;
- $\forall x \in V_1 \forall \lambda \in \mathbb{K} : \; A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, az $A(x)$ vektort Ax alakban írjuk fel.

20.20. Tétel. *Ha V_1 és V_2 vektortér, akkor a*

$$\mathrm{Lin}(V_1, V_2) \stackrel{\triangle}{=} \{A : V_1 \to V_2 | \; A \textit{ lineáris}\}$$

halmaz vektorér a pontonkénti műveletekkel.

Bizonyítás. Legyen V_1 és V_2 vektortér, valamint legyen $A, B \in \mathrm{Lin}(V_1, V_2)$ és $c, c' \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = Ax + Ay + Bx + By = (A + B)(x) + (A + B)(y)$$
$$(A + B)(c'x) = A(c'x) + B(c'x) = c'Ax + c'Bx = c'Ax + c'Bx = c'(A + B)x$$

teljesül, tehát $A+B \in \operatorname{Lin}(V_1, V_2)$, valamint az

$$\begin{aligned}(cA)(x+y) &= cA(x+y) = cA(x) + cAy = (cA)x + (cA)y \\ (cA)(c'x) &= cA(c'x) = cc'Ax = c'(cA)x\end{aligned}$$

egyenletek miatt $cA \in \operatorname{Lin}(V_1, V_2)$. Az összeadás és a számmal való szorzás megkövetelt tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők.

20.21. Definíció. Ha V vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor a $\operatorname{Lin}(V, \mathbb{K})$ halmazt a V *vektortér duálisának* nevezzük, és a továbbiakban a V^* szimbólummal jelöljük.

20.5. Valós számok szögfüggvényei

20.22. Tétel. *A* sin *és* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. A sin és cos függvény 2π szerinti periodicitása miatt az

$$x' = x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]$$

számra $\sin x = \sin x'$ és $\cos x = \cos x'$ teljesül, valamint $0 \le x' < 2\pi$. Ekkor az 5.42 addíciós formulák és a 6.44 nevezetes szögek szögfüggvényei alapján

$$\sin x = \begin{cases} \sin x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2}; \\ \cos\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi; \\ -\sin\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2}; \\ -\cos\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi, \end{cases}$$

valamint

$$\cos x = \begin{cases} \cos x', & \text{ha} \quad 0 \le x' < \frac{\pi}{2}; \\ -\sin\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x' < \pi; \\ -\cos\left(x' - \pi\right), & \text{ha} \quad \pi \le x' < \frac{3\pi}{2}; \\ \sin\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2} \le x' < 2\pi \end{cases}$$

adódik.

20.23. Tétel. *A* cos *függvény* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.*

Bizonyítás. Minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, továbbá az addíciós tétel alapján

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ezért ha ismerjük a koszinusz függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ halmazon, akkor itt a szinusz függvény értékeit is ismerjük, vagyis a 20.22 tétel alapján minden valós szám szögfüggvényét ismerjük.

20.24. Tétel. *Ha* $x \in [0, \pi]$, *akkor*

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \textit{és} \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor a cos függvényre vonatkozó 5.42 addíciós formula alapján

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \begin{cases} 2\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right) - 1; \\ 1 - 2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right). \end{cases}$$

Mivel $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és ekkor $\sin x, \cos x \geq 0$, ezért a fenti egyenletek átrendezéséből adódik az állítás.

20.25. Tétel. $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $\qquad$ $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Bizonyítás. Elég a $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ formulát igazolni, hiszen $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}$. Megmutatjuk, hogy $2\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ugyanis ebből már a félszögek szöggfüggvényeiről szóló 20.24 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$ és $q = 2\cos \frac{2\pi}{5}$. Ekkor az 5.34 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos \frac{2\pi}{5} = q,$$

valamint $x^5 = 1$, vagyis

$$0 = x^5 - 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Tehát elég az $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ egyenletet kell megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve. Ez viszont egyszerű a

$$0 = x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right) = x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right) = x^2\left(q^2 + q - 1\right)$$

átalakítások, valamint a $q > 0$ feltétel miatt,

$$q = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

20.26. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x\frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x = \frac{\pi}{6}$ esetén $x = 30^\circ$.)

20.27. Tétel.

$$\sin 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16} - \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos 3^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \left(\sqrt{3}-1\right)\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{16}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \frac{\pi}{5}$ és $\beta = \frac{\pi}{6}$. Ekkor $\alpha = 36^\circ$ és $\beta = 30^\circ$. Az α és a β szögfüggvényeit ismerjük a 20.25 és a 6.44 tételből. Az 5.42 addíciós formula alapján

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}.$$

A félszögekre vonatkozó 20.24 tétel segítségével az $\frac{\alpha-\beta}{2} = 3^\circ$ szinusza és koszinusza éppen a tételben leírt értéket adja.

20.28. Tétel.

$$\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{17}+15+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\left(3+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}$$

Bizonyítás. Elég $2\cos\frac{2\pi}{17}$ értékét meghatározni, ugyanis ebből már a félszögek szögfüggvényeiről szóló 20.24 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x=\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{17}\right)$ és $q=2\cos\frac{2\pi}{17}$. Ekkor az 5.34 Euler-tétel alapján

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{2\pi}{17}=q,$$

valamint $x^{17}=1$, vagyis

$$0=x^{17}-1=\frac{x^{17}-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{16}x^k.$$

Tehát az

$$\sum_{k=0}^{16}x^k=x^8\cdot\sum_{k=-8}^{8}x^k=0$$

átalakítás miatt elég az

$$\alpha_0=\sum_{k=-8}^{8}x^k=0$$

egyenletet megoldani az $q=x+\frac{1}{x}$ változóra nézve.
A 17 Fermat-prím, ugyanis $n=2$ esetén $17=2^{(2^n)}+1$. Legyen $p=17$ és válasszunk egy olyan $g\in\mathbb{N}$ számot, melyre

$$g^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \mod p$$

teljesül. A továbbiakban a $g=3$ választással élünk. Az $i\in\{1,2,3\}$ esetben definiáljuk az alábbi polinomot.

$$\alpha_i=\sum_{k=0}^{2^{(2^n-i)-1}}x^{\left(g^{k\left(2^i\right)}\right)}$$

Az $x^{17}=1$ felhasználásával az alábbi polinomokat kapjuk.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=x^{-8}+x^{-4}+x^{-2}+x^{-1}+x+x^2+x^4+x^8\\ \alpha_2&=x^{-4}+x^{-1}+x+x^4\\ \alpha_3&=x^{-1}+x\end{aligned}$$

A háttérben meghúzódó mélyebb okok részletezése nélkül megemlítjük, léteznek olyan β_1,β_2,β_3 polinomok és $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ paraméterek, melyekre

$$\begin{aligned}\alpha_0&=a_1\alpha_1^2+b_1\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_0&=a_2\alpha_2^2+b_2\alpha_1\alpha_2+\beta_2\\ \alpha_0&=a_3\alpha_3^2+b_2\alpha_2\alpha_3+\beta_3\end{aligned}$$

teljesül, ahol $\beta_1\in\mathbb{R}$, β_2 kifejezhető az α_1 polinommal és β_3 kifejezhető az α_1,α_2 polinommal. Valóban, számolással ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{1}{4}\alpha_1^2+\frac{1}{4}\alpha_1-1\\ \alpha_0&=-\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+1\end{aligned}$$

$$\alpha_0 = 2\alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2 - 3).$$

Tehát az $\alpha_0 = 0$ miatt az első egyenlet alapján

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

Ekkor a második

$$\alpha_2^2 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\alpha_2 - 1 = 0$$

egyenlet miatt

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}.$$

Ezek után a harmadik egyenlet megoldható az α_3 változóra nézve, ami a keresett q érték.

20.6. Szummázások

20.29. Definíció. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatból képzett $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sort, amit az s szimbólummal fogunk jelölni. Vagyis

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

a részletösszeg sorozat. Minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a $\sigma^{(i)}$ sorozatot az alábbi módon. Az $i = 1$ esetben legyen

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k,$$

az $i > 1$ esetben pedig

$$\sigma^{(i)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(i)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(i-1)}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ *sor C_i (Cesáro-) összegezhető*, ha létezik véges határértéke a $\sigma^{(i)}$ sorozatnak. Ebben az esetben a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_i}\, a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(i)}$$

jelölést használjuk.

20.30. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sor konvergens, akkor C_1 összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\, a_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyhez rendelt $\sum a$ sor konvergens és vezessük be a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ jelölést. Definiáljuk a

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

részletösszeg sorozatot, illetve a

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k,$$

sorozatot. Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$ teljesül. Azt kell igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)} = A$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$ határérték miatt választhatunk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, melyre minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $|s_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ számra

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n^{(1)} - A\right| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(s_k - A)\right| = \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N_1}(s_k - A) + \sum_{k=N_1+1}^{n}(s_k - A)\right)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \sum_{k=N_1+1}^{n}|s_k - A|\right) < \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

A becslésben az első tag kisebb lesz mint $\frac{\varepsilon}{2}$, ha az $n \in \mathbb{N}$ számra $N_2 < n$ teljesül, ahol

$$N_2 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\cdot\sum_{k=0}^{N_1}|s_k - A|\right].$$

Tehát az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|\sigma_n^{(1)} - A\right| < \varepsilon$ teljesül.

20.31. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozathoz rendelt $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sor C_k összegezhető, akkor minden $m \in \mathbb{N}$, $k < m$ elemre C_m összegezhető, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_k} a_n.$$

Bizonyítás. Az előző (20.30) tétel $m - k$ alkalommal való alkalmazásával adódik.

20.32. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|q| \leq 1$ és $q \neq 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Továbbá

1. *a $\sum\limits_n (-1)^{1+n}$ sor C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} (-1)^n = \frac{1}{2};$$

2. *a $\sum\limits_n \sin(nx)$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \sin(nx) = \begin{cases} 0 & \textit{ha} \quad x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}; \\ \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} & \textit{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}; \end{cases}$$

3. *a $\sum\limits_n \cos(nx)$ sor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ esetén C_1 összegezhető és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \cos(nx) = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|q| \le 1$ és $q \neq 1$ teljesül. Definiáljuk

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} q^k$$

részletösszeg sorozatot, illetve a

$$\sigma^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(1)} \triangleq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k,$$

sorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $s_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ és

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = \frac{1}{(n+1)(q-1)} \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} - 1 = \\ &= \frac{1}{(n+1)(q-1)} \left(q \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - (n+1) \right) = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{q(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2} + \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{q(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2} + \frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Az 1. pont a $q = -1$ helyettesítéssel adódik.
A 2. és a 3. pont $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | \ k \in \mathbb{Z}\}$ esetén a $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}$ helyettesítéssel igazolható, ugyanis ekkor $q \neq 1$ és

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \cos(nx) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} \sin(nx) &= \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} (\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1} = \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}} = \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{2\,\mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}{2\,\mathrm{i}} \right)} = \frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\mathrm{i}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

teljesül.

20.7. Jensen-tétel következményei

20.33. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a,b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \ge f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 6.2 Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása az $x_1, \ldots, x_n$ pontokra és a $S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ jelölés mellett az $\dfrac{\omega_1}{S}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{S}$ súlyokra.

20.34. Tétel. *(Súlyozott hatványközép.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméterre*

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i x_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & \textit{ha} \quad r \neq 0, \\ \lim\limits_{r \to 0} \alpha(r) & \textit{ha} \quad r = 0, \end{cases}$$

függvény monoton növő.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint minden $i = 1, \dots, n$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$ jelölés mellett vezessük be minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $a_i = \frac{\omega_i}{S}$ paramétereket, valamint minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$\alpha(r) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor nyilván $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$.

A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk meg a $\lim\limits_{r \to 0} \alpha(r)$ határértéket.

$$\lim_{r \to 0} \alpha(r) = \lim_{r \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \to 0} \exp \left(\frac{1}{r} \cdot \log \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right) \right) = \exp \lim_{r \to 0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r} \log \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \right) \right) =$$

$$= \exp \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^r} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \log x_i = \exp \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i \right) =$$

$$= \exp \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \log x_i \right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

Vagyis a súlyozott hatványközép határértéke a 0 pontban a súlyozott geometriai közép.
Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olyan melyre $0 < r_1 < r_2$ teljesül és tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto x^{\frac{r_2}{r_1}}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f''(x) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) x^{\frac{r_2}{r_1} - 2} > 0$$

teljesül, vagyis f konvex függvény. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ekkor

$$f \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1} \right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f \left(x_i^{r_1} \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2).$$

Az $r_1 < r_2 < 0$ esetben az f függvény konkavitását kihasználva hasonló számolással adódik az $\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2)$ egyenlőtlenség.
Azt kell még igazolni, hogy minden $r_1 < 0$ és $r_2 > 0$ esetén

$$\alpha(r_1) \leq \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2).$$

Ehhez elég felírni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(x_i^{r_2})_{i=1,\ldots,n}$ számokra

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i^{r_2})^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)^{r_2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{r_2}$$
$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2),$$

illetve hasonló módon az $(x_i^{r_1})_{i=1,\ldots,n}$ számokra.

20.8. Wallis- és Stirling-formula

20.35. Tétel. *(Wallis-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}\, x$$

sorozatot. Ekkor elemi számolás alapján $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ és $a_1 = 1$ nyilván teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a parciális integrálás szabályát felhasználva

$$a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \,\mathrm{d}\, x = \left[-\cos x \cdot \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \cdot \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = (n+1)(a_n - a_{n+2})$$

adódik, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$. Ennek a segítségével teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

teljesül. Szintén teljes indukcióval adódik az állításban szereplő formulára a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi}{2a_{2n}}$$

felírás, tehát a bizonyítandó formula ekvivalens a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n}a_{2n}} = \sqrt{\pi}$$

határértékkel, amihez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 4na_{2n}^2 = \pi$$

teljesül.
Mivel miden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

továbbá az a sorozat monoton fogyó, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = a_{2n}a_{2n+1} \le a_{2n}^2 \le a_{2(n-1)}a_{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

teljesül, amiből az

$$\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \le 4na_{2n}^2 \le \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n\to\infty} 4na_{2n}^2 = \pi$$

adódik, amivel igazoltuk az állítással ekvivalens a 666 határértéket.

20.36. Tétel. *(Stirling-formula.)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

becslés.

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

A : $]-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-közelítése alapján minden $x \in [0,1]$ esetén létezik olyan $c \in [0,x]$ paraméter, melyre

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!}x^4$$

teljesül, vagyis

$$g(x) = -\frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!}x^4,$$

amiből következik, hogy minden $x \in [0,1]$ esetén

$$0 \ge g(x) \ge -\frac{x^4}{4}.$$

Tekintsük a

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \log\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right)$$

sorozatot, amit $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1)$$

alakban is felírhatunk. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(b_{k+1} - b_k) = (n-1)b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1,$$

ezt alkalmazva a $b_k = \log k$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) = (n-1)\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) = \log n$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1) = \\
&= (n-1)\log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + \frac{1}{2}\log n - n\log n + n = \\
&= -\frac{1}{2}\log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\log(k+1) - \log k) - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \\
&= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Az a sorozat ezen alakját kifejezhetjük a g függvény segítségével.

$$\begin{aligned}
a_n &= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(g\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) = \\
&= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

Az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ és az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$ sorozatnak létezik határértéke. A $\sum_k \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right)$ sor abszolút konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(k + \frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} < \infty$$

teljesül, ezért konvergens is. Vagyis az a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim a$. Mivel a sorozat minden részsorozata konvergens ugyan azzal a határértékkel ezért $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ is teljesül, és ezek alapján

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2a_n}}{e^{a_{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n(n!)^2}{(2n!)} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} = \sqrt{2\pi},$$

ahol felhasználtuk a Wallis-formulát. Tehát $A = \frac{1}{2}\log(2\pi)$, amiből

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

következik. Továbbá

$$\begin{aligned} n! &= \mathrm{e}^{a_n}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}^{a_n - A}\cdot \mathrm{e}^{A}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

teljesül. A

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} \le \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^3} \le \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$$

$$-\frac{1}{4}\int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{k=n}^\infty -\frac{1}{4k^4}\left(k+\frac{1}{2}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=n}^\infty \left(k+\frac{1}{2}\right)0 = 0$$

becslések alapján

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

teljesül.

20.37. Tétel. *Legyen*

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n \in \mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le a_n \le 1$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ahhoz hogy az

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto a_n \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

sorozat monoton csökkenéség igazoljuk, azt kell megmutatnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$. Ezt ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \ge \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1)$$

$$
\begin{aligned}
-\log n &\geq \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \\
\log\left(\frac{n+1}{n}\right) &\geq \frac{1}{n+1} \\
(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &\geq 1 \\
\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq 1 \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq \mathrm{e} \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}
\end{aligned}
$$

adódik. Tehát elég azt igazolni, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$
\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.
$$

Ehhez tekintsük az $a_1 = \cdots = a_m = 1 + \dfrac{1}{m}$ és a $b_1 = \cdots = b_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n+m+1]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}} &\leq \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)+(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{m+n+1} = \frac{m+1+n}{m+n+1} = 1 \\
\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} &\leq 1 \\
\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} &\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Mivel $a_1 = 1$ és a monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq 1$.
Az alsó becsléshez minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén tekintük az

$$
\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x
$$

átalakítást. Mivel az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény konvex, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ esetén minden $x \in [k, k+1]$ számra a $t = k + 1 - x \in [0, 1]$ paraméter mellett

$$
\begin{aligned}
f(tk + (1-t)(k+1)) &\leq tf(k) + (1-t)f(k+1) \\
f(x) &\leq \frac{k+1-x}{k} + \frac{x-k}{k+1} \\
\frac{1}{x} &\leq \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)
\end{aligned}
$$

teljesül, vagyis

$$
\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right).
$$

Ezek alapján minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ számra

$$
\log n \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},
$$

ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

20.38. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

20.9. A gamma függvény

20.39. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$\int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t$$

improprius integrál konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$.
Az $x = 1$ esetben egyszerű számolással igazolható az improprius integrál konvergenciája.
Ha $x \in]0, 1[$, akkor megmutatjuk, hogy az

$$\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t \qquad \text{és} \qquad \int_1^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t$$

improprius integrál konvergens, tehát ezek összege is konvergens.
Tekintsük az

$$I :]0, 1] \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_a^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton csökkenő és a minden $a \in]0, 1]$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_a^1 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t \leq \int_1^a t^{x-1} \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$ határérték, vagyis az első integrál is konvergens.
Tekintsük az

$$I : [1, \infty[\to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_1^a t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [1, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_1^a t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t \leq \int_1^a \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}\, t = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-a} \leq \mathrm{e}^{-1}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték, vagyis a második integrál is konvergens.
Ha $x \in]1, \infty[$, akkor az $a = x - 1$ paraméter pozitív. Legyen $n = [a] + 1$. A L'Hospital-szabályt n-szer alkalmazva kapjuk a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} = 0$$

határértéket, ami alapján létezik olyan $t_0 \in]1, \infty[$, hogy minden $t \in]t_0, \infty[$ számra

$$\frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} < 1.$$

Ekkor minden $t_0 < t$ paraméterre

$$0 \leq t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leq t^n\,\mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

teljesül. Tekintsük az

$$I : [t_0, \infty[\to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \int_{t_0}^{a} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növő és a minden $a \in [t_0, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) \leq \int_{t_0}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \leq 2$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ határérték. Vagyis az

$$\int_{0}^{t_0} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

összeg létezik, ami nem más mint $\displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.

20.40. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

20.41. Tétel. *(Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. *Minden* $x \in \mathbb{R}^+$ *esetén* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $n! = \Gamma(n+1)$ *teljesül.*

Bizonyítás. 1. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{a\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty} -\mathrm{e}^{-a} + 1 = 1.$

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén parciális integrállással számolva

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[t \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a - \int_{0}^{\infty} t\left((x-1)t^{x-2}\,\mathrm{e}^{-t} - t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}\,t =$$

$$= -(x-1)\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{\infty} t^{x}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

adódik, vagyis

$$\Gamma(x) = -(x-1)\Gamma(x) + \Gamma(x+1).$$

3. Az első két állítás segítségével n szerinti teljes indukcióval igazolható.

20.10. Az analitikus számelmélet pár tétele

20.42. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

1. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in]0,1[$ esetén $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$$

függvényt. Ha $x \in]0,1[$, akkor

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$$

nyilván teljesül.
Legyen $m, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a k paraméter szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m(x) = x^m$) függvényre

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m\right)^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}, & \text{ha} \quad k \le m \\ 0, & \text{ha} \quad k > m \end{cases}$$

teljesül. Ezért

$$f_n^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \binom{n}{i} (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^i \right)^{(k)} (x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n+i}\right)^{(k)} (x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, & \text{ha} \quad k \le n+i \\ 0, & \text{ha} \quad k > n+i \end{matrix} \right\},$$

vagyis
– ha $0 \le k < n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k},$$

tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$;
– ha $n \le k \le 2n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k},$$

tehát

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-n}}{(n-(k-n))!(k-n)!} \cdot \frac{(n+k-n)!}{(n+k-n-k)!} = \frac{(-1)^{k-n} k!}{(2n-k)!(k-n)!} = (-1)^{k-n} \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!},$$

amiből $\binom{k}{k-n}, \frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z}$ miatt $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ következik;
– ha $2n < k$, akkor $f_n^{(k)}(x) = 0$, tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f_n(x) = f_n(1-x)$ érvényes, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

20.43. Tétel. *A π^2 szám irracionális.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $a, b \in \mathbb{N}^+$ pár melyre $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. A 20.42 állítás alapján $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) &= b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= b^n \sum_{k=1}^{n+1} -(-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= b^n (-1)^{n+2} \pi^0 f_n^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x) \end{aligned}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $2n$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(2n+2)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n''(x) \sin(\pi x) + \pi F_n'(x) \cos(\pi x) - \pi F_n'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x) \sin(\pi x) = a^n \pi^2 f_n(x) \sin(\pi x),$$

ezért

$$a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} (\varphi_n(1) - \varphi_n(0)) = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

Valamint a 20.42 állításban szereplő becslés alapján

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x < \frac{\pi a^n}{n!}$$

teljesül. Mivel a 4.39 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| \frac{\pi a^n}{n!} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a^n \pi \displaystyle\int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x$ olyan egész szám lenne, mely a $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ intervallumban helyezkedik el, ezzel ellentmondást kaptunk.

20.44. Tétel. *Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és*

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1. *Minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ szám esetén $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.*
2. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
3. *Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

A binomiális kifejtési tétel alapján a g_n függvény a

$$g_n(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} (x-\alpha)^{2l}$$

alakban is felírható. Tehát a 20.42 tétel bizonyításában részletezett deriválási szabály alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(2l)!}{(2l-k)!}(x-\alpha)^{2l-k}, & \text{ha} \quad k \le 2l; \\ 0, & \text{ha} \quad k > 2l. \end{array} \right\}$$

1. A fenti felírásból rögtön adódik, hogy minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ számra $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ teljesül.
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel $k = 2m$ alakban.
Ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, vagyis $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m \le 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \frac{(2l)!}{(2l-2m)!} 0^{2l-2m}.$$

Tehát ha $m < n$, akkor $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $n \le m \le 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(2n-1-m)!} a^{4n-2m-2} b^{2m+1-n} \frac{(2m)!}{1} \cdot 1.$$

Mivel $0 \le 4n-2m-2$ és $0 \le 2m+1-n$, ezért $a^{4n-2m-2}, b^{2m+1-n} \in \mathbb{N}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\dfrac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont a

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} = \binom{2n-1}{m} \cdot \frac{(2m)!}{(2n-1)} \cdot \frac{m!}{(m-n)!}$$

felbontásból látszik, hiszen $\dbinom{2n-1}{m}, \dfrac{(2m)!}{(2n-1)}, \dfrac{m!}{(m-n)!} \in \mathbb{N}^+$.
3. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel a $k = 2m$ alakban. A g_n függvény a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}(a-bx)^{2n}(2a-bx)^n}{(n-1)!}$$

alakjából világos, hogy egy $4n-2$ fokszámú polinom, amit fel lehet írni a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^l = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^{n-1+l}$$

formában, ahol $c_0, \ldots, c_{3n-1} \in \mathbb{Z}$. Ebből

$$g_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(n-1+l)!}{(n-1+l-2m)!} x^{n-1+l-2m}, & \text{ha} \quad 2m \le n-1+l; \\ 0, & \text{ha} \quad 2m > n-1+l \end{array} \right\}$$

adódik.
Vagyis ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, ezért $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ha $m < \dfrac{n-1}{2}$, akkor $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ szintén teljesül.
Ha $\dfrac{n-1}{2} \leq m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(2m)}(0) = \frac{1}{(n-1)!} c_{2m-n+1} \frac{(n-1+2m-n+1)!}{1} \cdot 1 = c_{2m-n+1} \frac{(2m)!}{(n-1)!}$$

ami a $n-1 \leq 2m$ egyenlőtlenség miatt egész szám.

20.45. Tétel. *Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor e^x irracionális.*

Bizonyítás. A minden $x \in \mathbb{R}$ számra érvényes $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ összefüggés miatt elég minden $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ számra igazolni az állítást.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha = \dfrac{a}{b}$ és $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{c}{d}$ teljesül, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$.
Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} \left(\alpha^2 - (x-\alpha)^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_n''(x) + &= \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{2n} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= f_n(x) - f_n^{(4n)}(x) = f_n(x) \end{aligned}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $4n-2$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(4n)} = 0$.
Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto F_n(x)\operatorname{ch}(x) - F_n'(x)\operatorname{sh}(x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n'(x)\operatorname{ch}(x) + F_n(x)\operatorname{sh}(x) - F_n''(x)\operatorname{sh}(x) - F_n'(x)\operatorname{ch}(x) = f_n(x)\operatorname{sh}(x),$$

ezért

$$\int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x) \,\mathrm{d}\,x = \varphi_n(\alpha) - \varphi_n(0) = F_n(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha) - F_n'(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha) - F_n(0).$$

A 20.44 alapján $F_n'(\alpha) = 0$ és $F_n(\alpha), F_n(0) \in \mathbb{Z}$. Továbbá az $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{c}{d}$ feltevés miatt $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{p}{q}$ alakú, ahol $p = c^2 + d^2$, $q = 2cd$, vagyis $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ezért

$$Z_n = q \int_0^\alpha f_n(x)\operatorname{sh}(x) \,\mathrm{d}\,x \in \mathbb{Z}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel minden $0 < x < \alpha$ számra $0 < f_n(x), \operatorname{sh}(x)$, ezért $0 < Z_n$, valamint minden $0 < x < \alpha$ számra

$$f_n(x)\operatorname{sh}(x) \leq b^{3n-1} \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sh}\alpha = a^2 \operatorname{sh}(\alpha) \frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!},$$

ezért

$$Z_n \leq a^2 \alpha \operatorname{sh}(\alpha) \frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Mivel a 4.39 állítás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| a^2 \alpha \operatorname{sh}(\alpha) \frac{(\frac{a^4}{b})^{n-1}}{(n-1)!} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén Z_n olyan egész szám lenne, melyre $0 < Z_n < \dfrac{1}{2}$ teljesülne.

20.46. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén elölje $\mathcal{P}_n$ az n számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - 2.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül, ebből viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

adódik.
Ha $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, akkor a 7.42 tétel alapján

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

teljesül, aminél felhasználva, hogy $x \leq \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+3} \leq x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{2} =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + x^2$$

adódik, vagyis minden $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} \leq x + x^2.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ekkor az $f, g : [1, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[} + \frac{1}{n} \chi_{[k,k+1[}$$

függvényekre minden $x \in [1, n+1]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, ezért

$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{n+1} g.$$

Mivel

$$\int_1^{n+1} f = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \qquad \text{és} \qquad \int_1^{n+1} g = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

és a log függvény monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

teljesül.
Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 3$. Minden p prímszám esetén legyen $\mu_p(n)$ az az egyértelműen meghatározott egész szám, melyre

$$p^{\mu_p(n)-1} \leq x < p^{\mu_p(n)}$$

teljesül. Definiáljuk az

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\mu_p(n)} \frac{1}{p^k}$$

számot. A számelmélet alaptétele szerint minden pozitív természetes szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára. Ezért az

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^{\mu_{p_1}(n)}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_2^{\mu_{p_2}(n)}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_k^{\mu_{p_k}(n)}}\right)$$

szorzatban minden $\frac{1}{k}$ alakú szám előfordul $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ezért

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} > A(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log n,$$

aminek a logaritmusát véve

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p^2} > \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \log \log x.$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

20.47. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

20.48. Tétel. *Az* e *szám transzcendens.*

Bizonyítás. Minden $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetén legyen $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \, x^i$ és

$$I_p : [0, \infty[\to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \int_0^t \mathrm{e}^{t-x} \, p(x) \; \mathrm{d}\, x.$$

Parciális integrálással

$$I_p(t) = \mathrm{e}^t \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(t)$$

adódik, valamint egyszerűen becsülhető $|I_p(t)|$

$$|I_p(t)| \leq |t| \cdot \left(\sup_{x \in [0,t]} \left|\mathrm{e}^{t-x}\right|\right) \cdot \left(\sup_{x \in [0,t]} |p(x)|\right) \leq t \, \mathrm{e}^t \, \tilde{p}(t).$$

Tegyük fel, hogy e gyöke a

$$p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$$

polinomnak, ahol minden $i = 0, \ldots, r$ esetén $a_i \in \mathbb{Z}$, valamint $a_0, a_r \neq 0$. Legyen p olyan prímszám, melyre $p > \max\{r, |a_0|\}$ teljesül. Legyen $f(x) = x^{p-1} \prod_{i=1}^{r} (x-i)^p$ és tekintsük a $J = \sum_{i=0}^{r} a_i I_f(i)$ számot, melynek definíciójából adódik, hogy $J \in \mathbb{Z}$. Mivel $p(\mathrm{e}) = 0$, ezért $J = -\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$, amit átírhatunk a

$$J = -\sum_{j=p-1}^{(r+1)p-1} a_0 f^{(j)}(0) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=p}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$$

alakba. Itt a jobb oldalon minden tagnak osztója a $p!$ kivéve az $a_0 f^{(p-1)}(0) = a_0 (p-1)!(-1)^{rp}(r!)^p$ tagot. Mivel $p > |a_0|$ ezért $|J|$ olyan egész, melynek nem oszthatója a $p!$, de $(p-1)!$ már igen, ezért $(p-1)! \leq |J|$. Valamint minden $k = 0, \ldots, r$ szám esetén

$$|I_f(k)| \leq k\,\mathrm{e}^k\,\tilde{f}(k) = k\,\mathrm{e}^k\,k^{p-1} \prod_{i=1}^{r} (k+i)^p \leq \mathrm{e}^k (2r)^{(r+1)p}.$$

Vagyis

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{r} |a_k|\,|I_f(k)| \leq \sum_{k=0}^{r} |a_k|\,\mathrm{e}^k (2r)^{(r+1)p} \leq \alpha\beta^p,$$

ahol $\alpha = \sum_{k=0}^{r} |a_k|\,\mathrm{e}^k$ és $\beta = (2r)^{r+1}$. Tehát az alábbi becslésünk adódik

$$1 \leq \frac{|J|}{(p-1)!} \leq \frac{\alpha\beta^p}{(p-1)!},$$

ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\beta^n}{(n-1)!} = 0$.