Analízis alapjai

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában.

Külön köszönettel tartozom *Szép Enikőnek* a jegyzet írása során nyújtott támogatásáért és bíztatásáért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Tétel. *Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.*

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

1.2. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{lll} \neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\ p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ & p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ & & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{array}$$

teljesül.

1.3. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{llll} A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

1.4. Tétel. *(Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

1.5. Tétel. *Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.*

1.6. Tétel. *Adott A, B halmaz, valamint $a \in A$, $b \in B$ elemek esetén*

$$(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

teljesül, így létezik az

$$\{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) |\ a \in A,\ b \in B\}$$

halmaz.

1.7. Tétel. *Ha f függvény, akkor $\overset{-1}{f}$ pontosan akkor függvény, ha f injektív.*

1.8. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

1.9. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z, V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$$

teljesül.

1.10. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

1.11. Tétel. *Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a*

$$\varphi : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

1.12. Tétel. *Ha* $(A_i)_{i\in I}$ *olyan halmazrendszer, hogy* $\forall i \in I(A_i \neq \emptyset)$, *akkor* $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

1.13. Tétel. *Legyen* $R \subseteq X \times X$ *reláció.*

1. *Az* R *pontosan akkor reflexív, ha* $\mathrm{id}_X \subseteq R$.
2. *Az* R *pontosan akkor tranzitív, ha* $R \circ R \subseteq R$.
3. *Az* R *pontosan akkor szimmetrikus, ha* $\overset{-1}{R} = R$.
4. *Az* R *pontosan akkor antiszimmetrikus, ha* $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}\,R}$.

1.14. Tétel. *Legyen* $(A, \leq)$ *lineárisan rendezett halmaz és* $X \subseteq A$.

1. *Az* $y \in A$ *elemre* $\sup X = y$ *pontosan akkor teljesül, ha* y *felső korlátja az* X *halmaznak és* $\forall z \in A: \ (z < y \to (\exists x \in X : z < x))$ *teljesül.*
2. *Az* $y \in A$ *elemre* $\inf X = y$ *pontosan akkor teljesül, ha* y *alsó korlátja az* X *halmaznak és* $\forall z \in A: \ (z > y \to (\exists x \in X : z > x))$ *teljesül.*

1.15. Tétel. *(Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.*

1.16. Tétel. *Legyen* A *tetszőleges halmaz és* $\approx$ *ekvivalenciareláció az* A *halmazon. Ekkor minden* $a \in A$ *elemre az*

$$a/\approx \overset{\triangle}{=} \{x \in A |\ a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A/\approx \overset{\triangle}{=} \{X \in \mathcal{P}(A) |\ \exists a \in A: \ X = a/\approx\}.$$

Továbbá az $A/\approx$ *ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz*

$$\forall x, y \in A/\approx: \ x \neq y \to x \cap y = \emptyset, \quad \textit{és} \quad \cup\{x |\ x \in A/\approx\} = A$$

teljesül.

1.17. Tétel. *Létezik egyetlen monoton halmaz, melyet minden más monoton halmaz tartalmaz.*

1.18. Tétel. *(A teljes indukció elve.) Ha az* $A \subseteq \mathbb{N}$ *halmazra* $0 \in A$, *valamint* $\forall n \in A : n^+ \in A$ *teljesül, akkor* $A = \mathbb{N}$.

1.19. Tétel. *A*

$$\leq \overset{\triangle}{=} \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m \subseteq n\}$$

reláció jólrendezés az $\mathbb{N}$ *halmazon. Az* $(m, n) \in \leq$ *teljesülését szokásosan az* $m \leq n$ *alakban írjuk.*

1.20. Tétel. *(Az egyszerű rekurzió tétele.) Legyen* A *halmaz,* $a \in A$ *tetszőleges elem és legyen* $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times A, A)$ *tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan* $f : \mathbb{N} \to A$ *függvény melyre* $f(0) = a$ *és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f(n^+) = g(n, f(n))$ *teljesül.*

1.21. Tétel. *Minden* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $n + 0 = n$
2. $m + n = n + m$
3. $k + (m + n) = (k + m) + n$
4. $m \leq n \to m + k \leq n + k$

1.22. Tétel. *Minden* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1n = n$
2. $mn = nm$
3. $k(mn) = (km)n$
4. $k(m + n) = km + kn$
5. $(m + n)k = mk + nk$

6. $m \leq n \to mk \leq nk$

1.23. Tétel. *Minden $k, m, n \in \mathbb{N}$ elemre az alábbiak teljesülnek.*

1. $1^n = 1$

2. $k^{m+n} = k^m k^n$

3. $(k^m)^n = k^{mn}$

1.24. Tétel. *(A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele.) Legyen A halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathcal{F}(n, A)$. Tegyük fel, hogy*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f \in F_n \exists f' \in F_{n+1} (f'|_n = f)$$

teljesül. Ekkor minden $N \in \mathbb{N}$ elemre és $a \in F_N$ függvényhez létezik olyan $a' : \mathbb{N} \to A$ sorozat, hogy $a'|_N = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \geq N$ esetén $a'|_n \in F_n$.

1.25. Tétel. *(Egész számok.)*

1. *Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon az*

$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) |\ m + n' = m' + n\}$$

reláció ekvivalencia-reláció.

2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{aligned} +' &: (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (m+m', n+n') \\ \times' &: (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm'+nn', m'n+n'm) \end{aligned}$$

Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden

$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ esetén

$$\begin{aligned} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) &\approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{aligned}$$

teljesül.

3. *A $\mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\approx$ halmazon jól értelmezett a*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad & ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad & ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{aligned}$$

művelet és $\mathbb{N}$ természetes módon beágyazható a $\mathbb{Z}$ halmazba.

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad n \mapsto (n,0)/\approx$$

4. *A $(\mathbb{Z}, +)$ kommutatív csoport és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$

teljesül. Jelölje a $+$ művelet inverzét $-$.

5. *A $\times$ művelet asszociatív, kommutatív és egységelemes, disztributív a $+$ műveletre nézve és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$

teljesül.

6. *A $\mathbb{Z}$ halmazon a*

$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} |\ \exists (m_a,n_a) \in a,\ \exists (m_b,n_b) \in b\ : m_a + n_b \leq m_b + n_a\}$$

reláció lineáris rendezés. Azt a tényt, hogy $(a,b) \in \leq$ röviden az $a \leq b$ alakban írjuk.

1.26. Tétel. *(Racionális számok.)* *Legyen* $\mathbb{Z}' \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. *Az* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ *halmazon az*
$$\approx \stackrel{\triangle}{=} \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') |\ mn' = m'n\}$$
reláció ekvivalencia-reláció.
2. *Tekintsük az alábbi műveleteket.*
$$\begin{array}{ll} +' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' & ((m,n),(m',n')) \mapsto (mn' + m'n, nn') \\ \times' : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}') \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' & ((m,n),(m',n')) \mapsto (mm', nn') \end{array}$$
Ezeket a függvényeket infix jelölésmóddal írjuk. Ekkor minden
$$(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_1',n_1'),(m_2',n_2') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$$
elemre $(m_1,n_1) \approx (m_1',n_1')$, $(m_2,n_2) \approx (m_2',n_2')$ *esetén*
$$\begin{array}{l} (m_1,n_1) +' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') +' (m_2',n_2') \\ (m_1,n_1) \times' (m_2,n_2) \approx (m_1',n_1') \times' (m_2',n_2') \end{array}$$
teljesül.
3. *A* $\mathbb{Q} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')/\approx$ *halmazon jól értelmezett a*
$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) +' (m_2,n_2))/\approx \\ \times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} & ((m_1,n_1)/\approx, (m_2,n_2)/\approx) \mapsto ((m_1,n_1) \times' (m_2,n_2))/\approx \end{array}$$
művelet és $\mathbb{Z}$ *természetes módon beágyazható a* $\mathbb{Q}$ *halmazba.*
$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad n \mapsto (n,1)/\approx$$
4. *A* $(\mathbb{Q},+)$ *kommutatív csoport és minden* $m,n \in \mathbb{Z}$ *esetén*
$$j(m) + j(n) = j(m+n)$$
teljesül. Jelölje a $+$ *művelet inverzét* $-$.
5. *A* $\times$ *művelet asszociatív, kommutatív, egységelemes, disztributív a* $+$ *műveletre nézve és minden* $m,n \in \mathbb{Q}$ *esetén*
$$j(m) \times j(n) = j(mn)$$
teljesül.
6. *Minden* $p \in \mathbb{Q}$ *elemre* $p \neq j(0)$ *esetén létezik pontosan egy* $p' \in \mathbb{Q}$ *melyre* $p \times p' = j(1)$ *teljesül.*
7. *A* $\mathbb{Q}$ *halmazon a*
$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} |\ \exists (m_a,n_a) \in a,\ \exists (m_b,n_b) \in b :\ m_a \times n_b \leq m_b \times n_a\}$$
reláció lineáris rendezés, melyet $(a,b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *alakban írunk.*

1.27. Tétel. *A* $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1,\leq)$ *hatos lineárisan rendezett test, de nem teljesen rendezett test.*

1.28. Tétel. *(Műveletek valós számokkal.)*

1. *Az* $\mathbb{R}$ *halmazon a*
$$\leq \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x \subseteq y\}$$
reláció rendezés, melyet $(x,y) \in \leq$ *esetén az* $x \leq y$ *alakban írunk fel.*
2. *A*
$$j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} |\ q < x\}$$
beágyazás injektív.

3. Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + y \triangleq \{q_x + q_y |\ q_x \in x,\ q_y \in y\}$$

halmazra $x + y \in \mathbb{R}$ teljesül. Igy értelmezhető a

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y$$

összeadás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(0)$ az egységeleme.

4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$-x \triangleq \{q \in \mathbb{Q} |\ \forall r \in x :\ q < -r\}$$

Ekkor $-x \in \mathbb{R}$, így értelmezhető a

$$- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -x$$

művelet, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + (-x) = j(0)$ teljesül.

5. Legyen $\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} |\ j(0) < x\}$. Adott $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$x \times y \triangleq]-\infty, 0] \cup \left\{q_x \times q_y |\ q_x \in x \cap \mathbb{Q}^+,\ q_y \in y \cap \mathbb{Q}^+\right\}$$

halmazra $x \times y \in \mathbb{R}^+$ teljesül. Igy értelmezhető a

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x \times y & \text{ha} \quad x > j(0),\ y > j(0) \\ -(x \times (-y)) & \text{ha} \quad x > j(0),\ y < j(0) \\ -((-x) \times y) & \text{ha} \quad x < j(0),\ y > j(0) \\ (-x) \times (-y) & \text{ha} \quad x < j(0),\ y < j(0) \\ j(0) & \text{ha} \quad x = j(0),\ \text{vagy } y = j(0). \end{cases}$$

szorzás művelete, mely kommutatív, asszociatív és melynek $j(1)$ az egységeleme.

6. Az $(\mathbb{R}, +, \times, j(0), j(1), \leq)$ hatos teljesen rendezett test.

7. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ elemre

$$j(x + y) = j(x) + j(y), \quad j(x \times y) = j(x)j(y), \quad j(-x) = -j(x)$$

teljesül.

1.29. Tétel. *Létezik olyan $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ nyolcas, ahol*

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;

2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ függvény, $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ függvény a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

tulajdonságokkal;

3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ függvény, $^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ függvény a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *részhalmaz, melyre minden* $(a,b) \in \leq$ *esetén az* $a \leq b$ *jelölést használjuk és mely rendelkezik a*

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a,b \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \ \rightarrow \ a = b \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq c) \ \rightarrow \ a \leq c \\ \forall a,b \in \mathbb{R} & a \leq b \ \vee \ b \leq a \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b) \ \rightarrow \ a + c \leq b + c \\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c) \ \rightarrow \ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

tulajdonságokkal;

5. *továbbá*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \leq s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \leq s') \ \rightarrow \ s \leq s')))))$$

teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.*

1.30. Tétel. *Legyen* $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : \quad x < y \ \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \rightarrow \ yz < xz$
7. $\forall x \in K : \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : \quad 0 < x < y \ \rightarrow 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

1.31. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

1.32. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

1.33. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

1.34. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha* $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, ^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ *teljesen rendezett test, akkor létezik olyan* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ *bijekció, melyre* $\varphi(0) = \mathbf{0}$*,* $\varphi(1) = \mathbf{1}$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *elem esetén*

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow \ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y \ &\Leftrightarrow \ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

1.35. Tétel. *A* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *halmazon értelmezzük az alábbi műveleteket.*

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} & ((x,y),(x',y')) \mapsto (x + x', y + y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} & ((x,y),(x',y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y) \end{array}$$

1. *Ekkor* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.*

2. A

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, 0)$$

olyan injekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $j(x) + j(y) = j(x + y)$ *és* $j(x) \cdot j(y) = j(x \cdot y)$ *teljesül.*

1.36. Tétel. *Nem létezik olyan rendezés a komplex számtest felett, mellyel a komplex számok halmaza rendezett test lenne.*

1.37. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

1.38. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra* $|A| \leq |B|$ *és* $|B| \leq |A|$ *esetén* $|A| = |B|$ *teljesül.*

1.39. Tétel. *Bármely A halmazra* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ *teljesül.*

1.40. Tétel. *Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre* $|A| = n$ *és* $|B| = m$ *teljesül, ahol* $n, m \in \mathbb{N}$.

1. *Bármely* $X \subseteq A$ *halmazra* $|X| \leq n$.
2. $|A \times B| = mn$
3. *Ha* $A \cap B = \emptyset$, *akkor* $|A \cup B| = n + m$.
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

1.41. Tétel. *(Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)*

1. *Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha* $|\mathbb{N}| \leq |A|$ *teljesül.*
3. *Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.*
4. *Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.*
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. *Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor* $|A| = |A \cup B|$.

1.42. Tétel. *Legyen A, B olyan halmaz, melyre* $|A|, |B| \geq 2$ *teljesül. Ekkor*

$$|A \cup B| \leq |A \times B|.$$

1.43. Tétel. *(Számosságaritmetika alaptétele.) Minden végtelen A halmazra* $|A| = |A \times A|$ *teljesül.*

1.44. Tétel. *(Kontinuum számosság.)*

1. *Ha* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$, *akkor* $|]a, b[| = |\mathbb{R}|$.
2. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x_1, \ldots x_n \in [-1, \infty[$ *számra, ha tetszőleges* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén* $0 \leq x_i x_j$ *teljesül, akkor*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *számra* $-1 \leq x$ *esetén*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2.2. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.*

2.3. Tétel. *Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

2.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.*

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

2.5. Tétel. *(Binomiális tétel.) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2.6. Tétel. *Legyen $(K, +, \cdot)$ test. Ekkor*

$$|\cdot|_\infty : K \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \neq 0, \\ 0 & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

abszolút érték.

2.7. Tétel. *Az*

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \quad z \mapsto \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

2.8. Tétel. *(Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

2.9. Tétel. *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.*

1. *Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$f = f_+ - f_- \qquad |f| = f_+ + f_- \qquad f_+ f_- = 0 \tag{2.1}$$

teljesül.

2. *Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor*

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

teljesül.

2.10. Tétel. *Ha A tetszőleges nem üres halmaz, akkor az $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ hármas vektortér $\mathbb{K}$ felett, valamint $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ algebra $\mathbb{K}$ felett.*

2.11. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok halmazát. Ekkor $\mathcal{P}_n$ vektortér a pontonkénti függvényműveletekkel. Továbbá a $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ polinomhalmaz algebra a pontonkénti függvényműveletekkel.*

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

3.2. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{K}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

3.3. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*

1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

3.4. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*

1. *Az üres halmaz és a $\mathbb{K}$ halmaz zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

3.5. Tétel. *Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{K}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

3.6. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

3.7. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

3.8. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

3.9. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.*

1. *Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.*
2. *Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.*

3.10. Tétel. *(A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)*

1. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*
2. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.*

3.11. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{R}$ sűrű részhalmaza a valós számok halmazának. Ekkor az $S + \mathrm{i}\, S$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.*

3.12. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

3.13. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

3.14. Tétel. *(Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

4. Sorozatok

4.1. Tétel. *Ha* $x, y \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ *az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *sorozat határértéke, akkor* $x = y$.

4.2. Tétel. *Az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *sorozat pontosan akkor konvergens, ha a* $\mathrm{Re} \circ a$ *és az* $\mathrm{Im} \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat konvergens és ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

4.3. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

4.4. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

4.5. Tétel. *Az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

4.6. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

4.7. Tétel. *Legyen* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat és* $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.
3. *Az* ab *sorozat konvergens és* $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.
4. *Az* $\overline{a}$ *sorozat konvergens és* $\lim \overline{a} = \overline{\lim a}$.
5. *Az* $|a|$ *sorozat konvergens és* $\lim |a| = |\lim a|$.
6. *Ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \neq 0$ *és* $\lim a \neq 0$, *akkor az* $\frac{1}{a}$ *sorozat konvergens és* $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$.

4.8. Tétel. *A konvergens valós- illetve komplex számsorozatok algebrát alkotnak.*

4.9. Tétel. *Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *sorozatra* $\lim |a| = 0$ *teljesül, akkor* $\lim a = 0$

4.10. Tétel. *Ha az* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *konvergens sorozatra minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n$, *akkor* $\lim a \leq \lim b$.

4.11. Tétel. *(Rendőr-elv.)* *Legyen* $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *olyan sorozat, melyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *és* $\lim a = \lim c = x$ *teljesül. Ekkor* b *konvergens és* $\lim b = x$.

4.12. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat és* $p \in \mathbb{N}$. *Az*

$$a^p : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

4.13. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *konvergens sorozat és* $p \in \mathbb{N}$. *Az*

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

4.14. Tétel. *(Sorozatok racionális hatványa.)* *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *konvergens sorozat és* $q \in \mathbb{Q}$. *Az*

$$a^q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha} \quad \lim a > 0 \ \vee \ q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha} \quad \lim a = 0 \ \wedge \ q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

4.15. Tétel. *Legyen* $A \subseteq \mathbb{K}$ *és* $x \in \mathbb{K}$.

1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$.

4.16. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

4.17. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az* $A \subseteq \mathbb{K}$ *halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatnak létezik olyan* $a' : \mathbb{N} \to A$ *részsorozata, melyre* $\lim a' \in A$ *teljesül.*

4.18. Tétel. *Minden* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozatra* $\liminf a \leq \limsup a$.

4.19. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat.*

1. *Ha* $\lim a \in \mathbb{R}$, *akkor* $\liminf a = \limsup a = \lim a$.
2. *Ha* $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ *és* $\liminf a = \limsup a$, *akkor az* a *sorozat konvergens és* $\lim a = \liminf a$ *teljesül.*

4.20. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

4.21. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

4.22. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

4.23. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Egy* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

4.24. Tétel. *Adott* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *mellett*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \textit{ha} \quad \alpha > 0, \\ 1 & \textit{ha} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \textit{ha} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

4.25. Tétel. *Adott* $q \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^{n} = \begin{cases} \infty & \textit{ha} \quad q > 1, \\ 1 & \textit{ha} \quad q = 1, \\ 0 & \textit{ha} \quad -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \leq -1$ *esetén a* q^n *sorozat divergens.*

4.26. Tétel. *Legyen* $q \in \mathbb{K}$.

1. *Ha* $|q| < 1$ *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
2. *Ha* $q = 1$ *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.
3. *Ha* $|q| \geq 1$ *és* $q \neq 1$, *akkor az* $n \mapsto q^n$ *sorozat divergens.*

4.27. Tétel. *Minden* $q \in \mathbb{R}^+$ *számra* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

4.28. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4.29. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

4.30. Tétel. *(Gyökkritérium sorozatokra.) Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *sorozatra* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *teljesül, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.31. Tétel. *(Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *sorozatra* $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ *teljesül, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.32. Tétel. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor* $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.

4.33. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{K}$ esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

4.34. Tétel. *Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

4.35. Tétel. *(Napier állandó.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az*
$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
sorozat korlátos, monoton növő, tehát konvergens.
2. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a*
$$b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
konvergens.
3. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

4.36. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

4.37. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \le a_m a_n$ teljesül. Ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}\ .$$

5. Sorok

5.1. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *A $\sum(a+b)$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. *A $\sum \overline{a}$ sor konvergens és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n}$.

5.2. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor* $\lim a = 0$.

5.3. Tétel. *(Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha*
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \to \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

5.4. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \to \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

5.5. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n$ *és a* $\sum b$ *sor konvergens, akkor a* $\sum a$ *sor is konvergens, továbbá* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. *Ha létezik olyan* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ *sorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \geq b_n$ *és a* $\sum b$ *sor divergens, akkor a* $\sum a$ *sor is divergens.*

5.6. Tétel. *A* $\sum\limits_n \frac{1}{n+1}$ *sor divergens, a* $\sum\limits_n \frac{1}{(n+1)^2}$ *sor konvergens.*

5.7. Tétel. *Ha a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens, akkor konvergens is és*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

5.8. Tétel. *Legyen* $q \in \mathbb{K}$. *A* $\sum\limits_n q^n$ *sor*

1. *divergens, ha* $|q| \geq 1$;
2. *abszolút konvergens, ha* $|q| < 1$ *és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

5.9. Tétel. *(Kondenzációs kritérium.)* *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha a* $\sum\limits_n a_n$ *és a* $\sum\limits_n 2^n a_{2^n}$ *sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.*

5.10. Tétel. *Legyen* $q \in \mathbb{Q}$. *A* $\sum\limits_n \frac{1}{n^q}$ *sor pontosan akkor konvergens, ha* $q > 1$.

5.11. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium.)* *Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor divergens.*

5.12. Tétel. *Minden* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *sorozatra*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.13. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *olyan, melyre létezik a* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{K}$ *határérték. Ekkor létezik a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *határérték és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

5.14. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium.)* *Ha az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ *sorozat esetén*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens;*
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *akkor a* $\sum a$ *sor divergens.*

5.15. Tétel. *Ha* $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ *Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$|H_n| \leq a_{n+1}.$$

5.16. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

5.17. Tétel. *(Riemann-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy a $\sum a$ sor feltételesen konvergens. Ekkor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemre $\alpha \leq \beta$ esetén létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy*

$$\liminf \sum a \circ \sigma = \alpha \quad \textit{és} \quad \limsup \sum a \circ \sigma = \beta$$

teljesül.

5.18. Tétel. *Egy sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha feltétlen konvergens.*

5.19. Tétel. *(Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum (a * b)$ sor is abszolút konvergens.

5.20. Tétel. *(Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \right)$$

teljesül.

5.21. Tétel. *(Dirichlet-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens,*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}.$$

5.22. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \operatorname{Dom} P_a$.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \operatorname{Dom} P_a$.*

5.23. Tétel. *Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

5.24. Tétel. *(Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\exp(\mathrm{i}\, z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

5.25. Tétel. *(Az exponenciális függvény.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$.*
2. *Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.*

3. *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *számra* $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.
4. *Minden* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *számra* $x_1 < x_2$ *esetén* $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ *teljesül, vagyis az*

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$$

függvény injektív.

5.26. Tétel. *Minden* $z \in \mathbb{C}$ *számra* $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

5.27. Tétel. *Legyen* $x, y \in \mathrm{Dom}\log$ *olyan szám, melyre* $x^y \in \mathrm{Dom}\log$ *és legyen* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Ekkor*

$$x^0 = 1, \qquad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \qquad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \qquad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1}$$

teljesül.

5.28. Tétel. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén az* $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *és* $b(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *sorozatok határértéke megegyezik.*

5.29. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

1. *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *számra az alábbiak teljesülnek.*

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2\,\mathrm{i}} \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

2. *Minden* $x, y \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x) \\
\mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y).
\end{aligned}$$

3. *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\sin(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\, x, \qquad \cos(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{ch}\, x, \qquad \mathrm{sh}(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\sin x, \qquad \mathrm{ch}(\mathrm{i}\,x) = \cos x.$$

4. *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

5. *Ha* $x \in \mathbb{R}$, *akkor* $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}| = 1$.

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Tétel. *(Jensen-egyenlőtlenség.)* *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallum és* $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *Az* f *függvény pontosan akkor konvex az* I *intervallumon, ha minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *mellett, minden* $(x_i)_{1 \le i \le n} \in I^n$ *és minden* $(a_i)_{1 \le i \le n} \in [0,1]^n$ *esetén, ha* $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, *akkor*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

2. *Az* f *függvény pontosan akkor konkáv az* I *intervallumon, ha minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *mellett, minden* $(x_i)_{1 \le i \le n} \in I^n$ *és minden* $(a_i)_{1 \le i \le n} \in [0,1]^n$ *esetén, ha* $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, *akkor*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

6.2. Tétel. *(A határérték egyértelműsége.)*

1. *Legyen* $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ *a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja, és* $A, B \in \mathbb{K}$ *legyen az* f *függvény határértéke az* a *pontban. Ekkor* $A = B$.
2. *Legyen* $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ *a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja és* $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ *legyen az* f *függvény határértéke az* a *helyen. Ekkor* $A = B$.

6.3. Tétel. *Legyen* $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ *és legyen* $a \in \mathbb{K}$ *a* $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ *halmaz torlódási pontja. Ha létezik* $r \in \mathbb{R}^+$, *melyre* $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ *korlátos és* $\lim\limits_a f = 0$, *akkor* $\lim\limits_a fg = 0$.

6.4. Tétel. *Legyen* $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \mathbb{K}$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ *halmaznak. (A* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *esetben* $a = \pm\infty$ *is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik* $\lim\limits_a f$ *és* $\lim\limits_a g$, *valamint* $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g \notin \{\infty, -\infty\}$. *Akkor az* a *pont*

1. *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(f+g)$ *halmaznak,* $\lim\limits_a (f+g)$ *létezik és*
$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g;$$
2. *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(fg)$ *halmaznak,* $\lim\limits_a (fg)$ *létezik és*
$$\lim_a (fg) = \left(\lim_a f\right)\left(\lim_a g\right);$$
3. *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(\lambda f)$ *halmaznak,* $\lim\limits_a (\lambda f)$ *létezik, és*
$$\lim_a (\lambda f) = \lambda (\lim_a f);$$
4. *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(|f|)$ *halmaznak,* $\lim\limits_a |f|$ *létezik és*
$$\lim_a |f| = \left|\lim_a f\right|;$$
5. *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(\overline{f})$ *halmaznak,* $\lim\limits_a \overline{f}$ *létezik és*
$$\lim_a \overline{f} = \overline{\lim_a f}.$$
6. *Ha az* a *pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)$ *halmaznak és* $\lim\limits_a f \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_a \frac{1}{f}$ *létezik és*
$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_a f}.$$

6.5. Tétel. *Ha az* $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *függvényre* $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ *és minden* $x \in \operatorname{Dom} f$ *esetén* $f(x) \le g(x)$ *teljesül, valamint az* $a \in \mathbb{R}$ *pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaznak és létezik a* $\lim\limits_a f, \lim\limits_a g$ *határérték, akkor* $\lim\limits_a f \le \lim\limits_a g$.

6.6. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.)* *Ha az* $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *függvényre* $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ *és minden* $x \in \operatorname{Dom} f$ *esetén* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *teljesül, valamint az* $a \in \mathbb{R}$ *pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaznak és valamely* $A \in \mathbb{R}$ *esetén* $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$ *teljesül, akkor létezik a* $\lim\limits_a g$ *határérték és* $\lim\limits_a g = A$.

6.7. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen* $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ *és* $z \in \mathbb{K}$ *a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. A* $\lim\limits_z f$ *határérték pontosan akkor létezik, ha* $\lim f \circ a$ *létezik minden* $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$, z *ponthoz konvergáló sorozat esetén.*

6.8. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *és legyen* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. *Pontosan akkor létezik az* f *függvénynek határértéke az* a *pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke és* $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$ *teljesül.*

6.9. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{K}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f+g, fg, cf, |f|, \overline{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

6.10. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{K}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{K})$ elemre és minden $c \in \mathbb{K}$ számra*

$$f+g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{K}).$$

6.11. Tétel. *Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

6.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.*

6.13. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ és $a, b, c \in \mathbb{K}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \operatorname{Dom} g$;*
2. *$b \in \operatorname{Dom} g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

6.14. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.*

6.15. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

6.16. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

6.17. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

6.18. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.*

6.19. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.*

6.20. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in \,]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

6.21. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor $\operatorname{Ran} f$ nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.*

6.22. Tétel. *Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

6.23. Tétel. *(Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

6.24. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha az a sorozat által meghatározott P_a hatványsor konvergenciasugara R_a, akkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara is R_a.

6.25. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \qquad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in \,]0, R_a - |z_0|[$, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

6.26. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim\limits_{x \to z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.*

6.27. Tétel. *Az* exp, sin, cos, tg, ctg, sh, ch, th *és* cth *függvény folytonos.*

6.28. Tétel. *(Nevezetes határértékek.)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

6.29. Tétel. *Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvényre $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ teljesül és a $\log$ függvényre pedig $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$.*

6.30. Tétel. *(A logaritmus függvény.) A $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, szigorúan monoton növő bijektív függvény.*

6.31. Tétel. *(A hatványfüggvény folytonossága.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^\alpha$$

függvény folytonos.

6.32. Tétel. *(A π szám bevezetése.)*

1. *Minden $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ esetén $\sin x > 0$.*
2. *A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left]0, \sqrt{3}\right[$ intervallumon.*
3. $\cos\sqrt{3} < -\dfrac{1}{8}$
4. *Létezik egyetlen olyan $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.*

6.33. Tétel. *(Nevezetes szögek.)*

1. *A $\dfrac{\pi}{2}$ és a π szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

2. *Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

3. *Minden* $x \in \mathbb{C}$ *számra*

$$\mathrm{e}^{x+2\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x}, \qquad \operatorname{sh}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}(x+2\pi\,\mathrm{i}) = \operatorname{ch} x.$$

4. *A* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *és a* $\frac{\pi}{3}$ *szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.34. Tétel. *(Euler képlet.)* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$

6.35. Tétel. *(Trigonometrikus függvények periódusa.)*

1. *Minden* $x \in \,]0,\pi[$ *esetén* $\sin x > 0$, *minden* $x \in \,]\pi, 2\pi[$ *esetén* $\sin x < 0$.
2. *A* $\sin x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \{0, \pi\}$ *az összes megoldása.*
3. *A* $\sin$ *függvény periódusa* 2π.
4. *Minden* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x > 0$, *minden* $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ *esetén* $\cos x < 0$.
5. *A* $\cos x = 0$ *egyenletnek* $x \in [0, 2\pi[$ *esetén* $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *az összes megoldása.*
6. *A* $\cos$ *függvény periódusa* 2π.

6.36. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* $\cos$ *függvény szigorúan monoton csökkenő a* $[0,\pi]$ *intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1] \qquad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. *A* $\sin$ *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon és*

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \qquad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. *A* tg *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, valamint szigorúan monoton növő a* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *intervallumon és*

$$\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

bijekció.

6.37. Tétel. *Az* arcsin *az* arccos *és az* arctg *függvény folytonos.*

6.38. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. *A* ch *függvény szigorúan monoton növő a* $[0,\infty[$ *halmazon és*

$$\operatorname{ch}|_{[0,\infty[} : [0,\infty[\to [1,\infty[\qquad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

bijekció.

2. *Az* sh *függvény szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{sh} x$$

bijekció.

3. *A* th *függvény értelmezési tartománya a* $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} + k\pi\,\mathrm{i} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz, szigorúan monoton növő az* $\mathbb{R}$ *halmazon és*

$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \,]-1,1[\qquad x \mapsto \operatorname{th} x$$

bijekció.

6.39. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\operatorname{arsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. *Minden* $x \in [1, \infty[$ *esetén* $\operatorname{arch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
3. *Minden* $x \in]-1, 1[$ *esetén* $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

6.40. Tétel. *Az* arsh *az* arch *és az* arth *függvény folytonos.*

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$*. Az* f *függvény pontosan akkor differenciálható az* a *pontban, ha létezik olyan* $c \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|} = 0.$$

Ha az f *függvény differenciálható az* a *pontban akkor a fenti határértékben szereplő* c *konstansra* $f'(a) = c$ *teljesül.*

7.2. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$*. Az* f *függvény pontosan akkor differenciálható az* a *pontban, ha létezik olyan* $c \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(|x-a| < \delta \;\to\; |f(x) - f(a) - c(x-a)| \leq \varepsilon \cdot |x-a|\big).$$

Ha az f *függvény differenciálható az* a *pontban akkor a fenti határértékben szereplő* c *konstansra* $f'(a) = c$ *teljesül.*

7.3. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

7.4. Tétel. *Legyen* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$ *és legyen* f *és* g *differenciálható az* a *pontban. Ekkor*

1. $f + g$ *differenciálható az* a *pontban és* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*;*
2. *minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* cf *differenciálható az* a *pontban és* $(cf)'(a) = cf'(a)$*;*
3. fg *differenciálható az* a *pontban és* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*;*
4. *ha* $g(a) \neq 0$*, akkor* $\frac{f}{g}$ *differenciálható az* a *pontban és* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

7.5. Tétel. *Legyen* $A \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt halmaz,* $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ *és* $c \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R})$$

teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ *algebra.*

7.6. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Ha* g *differenciálható az* a *pontban és* f *differenciálható a* $g(a)$ *pontban, akkor* $f \circ g$ *differenciálható az* a *pontban és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

7.7. Tétel. *Legyen* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *olyan sorozat, hogy* P_a *hatványsor konvergenciasugarára* $R_a > 0$ *teljesüljön. Legyen*

$$a' : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ *hatványsor konvergenciasugara szintén* R_a*, a* P_a *hatványsor differenciálható a* $B_{R_a}(0)$ *halmazon, és ezen a halmazon* $(P_a)' = P_{a'}$ *teljesül.*

7.8. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n})' = -n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{-n-1}$.)*

7.9. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

7.10. Tétel. *(Elemi függvények deriváltja.)* $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

7.11. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

7.12. Tétel. *(Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

7.13. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

7.14. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \le \left(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|\right) \cdot |b - a|\,.$$

7.15. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \ge 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \le 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

7.16. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható és minden $b \in f(I)$ pontra*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

7.17. Tétel. *(Elemi függvények inverzének a deriváltja.)*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$.*
2. *Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.*

3. *Minden* $x \in]-1,1[$ *esetén* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathrm{arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. *Minden* $x \in]1,\infty[$ *esetén* $\mathrm{arch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathrm{arth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7.18. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a* $\mathrm{Ran}\, f$ *halmazon és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in$* $\mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}\, f^{-1}$ *elemre.*

f	$\mathrm{Dom}\, f$	$\mathrm{Ran}\, f$	f'	f^{-1}	$\mathrm{Dom}\, f^{-1}$	$\mathrm{Ran}\, f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	exp	log	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x}$
sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	cos	arcsin	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1,\infty[$	sh	arch	$[1,\infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$	arth	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

7.19. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*
1. *Ha $a \in [1,\infty[$, akkor az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^a$ függvény deriváltja $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.*
2. *Ha $a \in]-\infty,1[$, akkor az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^a$ függvény deriváltja $a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{a-1}$.*

7.20. Tétel. *(L'Hospital szabály.) Legyen $a,b \in \mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$, $a<b$ és $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g'(]a,b[)$.*

1. *Ha $\lim_{b-} f = \lim_{b-} g \in \{-\infty,0,\infty\}$ és létezik a $\lim_{b-} \dfrac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{b-} \dfrac{f}{g}$ határérték is és*
$$\lim_{b-} \frac{f}{g} = \lim_{b-} \frac{f'}{g'}.$$
2. *Ha $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g \in \{-\infty,0,\infty\}$ és létezik a $\lim_{a+} \dfrac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{a+} \dfrac{f}{g}$ határérték is és*
$$\lim_{a+} \frac{f}{g} = \lim_{a+} \frac{f'}{g'}.$$

7.21. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*
1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.*

7.22. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*
2. *Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.*

7.23. Tétel. *(Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

7.24. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^{\beta}.$$

7.25. Tétel. *(Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7.26. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p.$$

7.27. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{(n)}$ és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, mely n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T_{n,a}^f$.*

7.28. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

7.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) < 0$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) > 0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

7.30. Tétel. *Legyen $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy*

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \forall x \in B_r(a).$$

7.31. Tétel. *Legyen $c \in \mathbb{K}$ és $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén*

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

7.32. Tétel. *Ha $x \in]-1, 1[$, akkor*

$$\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

7.33. Tétel. *(Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1, 1[$ esetén*

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

8. Határozatlan integrál

8.1. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor*

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

8.2. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra*

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

8.3. Tétel. *(Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \exp = \exp + C \qquad \int \sin = -\cos + C \qquad \int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x = \log|x| + C \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + C \qquad \int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + C$$

$$\int x^a \,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C$$

8.4. Tétel. *(Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

8.5. Tétel. *(Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \to I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi.$$

8.6. Tétel. *(Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.*

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \arccos(x)\,\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arsh}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arsh} x - \sqrt{1+x^2} + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{arch}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C \qquad x \in]1,\infty[$$

$$\int \operatorname{arth}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arth} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C \qquad x \in]-1,1[$$

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x + C \qquad x \in]0,\infty[$$

8.7. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az*

$$\int \sin^n \cos^m$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. *Ha $m = 0$, akkor*

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}\displaystyle\int (1-\cos t)^k\,\mathrm{d}t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad n = 2k\ (k \in \mathbb{N}), \\ -\displaystyle\int (1-t^2)^k\,\mathrm{d}t, & t = \cos x \quad \text{ha} \quad n = 2k+1\ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. *Ha $n = 0$, akkor*

$$\int \cos^m x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}\displaystyle\int (1+\cos t)^k\,\mathrm{d}t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad m = 2k\ (k \in \mathbb{N}), \\ \displaystyle\int (1-t^2)^k\,\mathrm{d}t, & t = \sin x \quad \text{ha} \quad m = 2k+1\ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. *Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.*
4. *Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, akkor*

$$\int \sin^n x \cos^m x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l+1}}\displaystyle\int (\sin^{2k} t)(1+\cos t)^{l-k}\,\mathrm{d}t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad n \le m, \\ \dfrac{1}{2^{k+l+1}}\displaystyle\int (\sin^{2l} t)(1-\cos t)^{k-l}\,\mathrm{d}t, & t = 2x \quad \text{ha} \quad n > m. \end{cases}$$

8.8. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.*

1. *Ekkor az $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ halmaz nyílt intervallumain*

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\log|ax+b| + C, & \text{ha } n = 1; \\ \dfrac{1}{a(1-n)} \cdot \dfrac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. Ha $b^2-4ac<0$, akkor az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C,$$

és ha $b^2-4ac>0$ akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$$

teljesül.

3. Ha $n>1$ és $b^2-4ac\neq 0$, akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2ax+b}{(1-n)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+ \\ +\frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

4. Az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x.$$

5. Ha $n>1$ és $b^2-4ac\neq 0$, akkor az $\{x\in\mathbb{R}|\ ax^2+bx+c\neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+ \\ +\frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

8.9. Tétel. *(Parciális törtekre bontás.) Legyen $P_n(x)$ egy tetszőleges n-ed fokú-, $Q_m(x)$ pedig egy olyan m-ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója 1.*

1. Ha $n\geq m$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{P}(x)$ $(n-m)$-ed fokú- és m-nél kisebb fokú $\tilde{P}(x)$ polinom, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\bar{P}(x)+\frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. A Q_m polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $(\lambda_i)_{i=1,\dots,k}$, $(p_i,q_i)_{i=1,\dots,l}$ páronként különböző valós számok és számpárok, valamint $(z_i)_{i=1,\dots,k}$, $(v_i)_{i=1,\dots,l}$ természetes számok, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$Q_m(x)=\left(\prod_{i=1}^{k}(x+\lambda_i)^{z_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{v_i}\right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1\leq i\leq l$ esetén sem létezik valós gyöke az $x^2+p_ix+q_i$ polinomnak. Ha $n<m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,z_i}$, $(\alpha_{ij},\beta_{ij})_{i=1,\dots,l;j=1,\dots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{z_i}\frac{\mu_{ij}}{(x+\lambda_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{v_i}\frac{\alpha_{ij}x+\beta_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

teljesül minden $x\in\operatorname{Dom}\dfrac{P_n}{Q_m}$ elemre.

8.10. Tétel. *(Csebisev-tétel.) Legyen $a,b\in\mathbb{R}$ és $m,n,p\in\mathbb{Q}$, ahol $p=\dfrac{q}{r}$ valamilyen q egészre. Az*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}\,x$$

integrál csak az alábbi három esetben fejezhető ki elemi függvények segítségével.

1. *Ha $p \in \mathbb{Z}$. Az integrál meghatározásához a binomiális kifejtés alkalmazandó az $(a + bx^n)^p$ kifejezésre.*
2. *Ha $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*
3. *Ha $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $t = \sqrt[r]{b + ax^{-n}}$ helyettesítéssel racionális függvényre vezethető vissza az integrandus.*

8.11. Tétel. *Legyen R kétváltozós racionális törtfüggvény. Ekkor az alábbi integrálok a megadott helyettesítések rekurzív alkalmazásával racionális törtfüggvények integráljává transzformálhatók. Az integráloknál $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ továbbá $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\ \mathrm{d}\,x \qquad x = a\,\mathrm{sh}\,t \text{ vagy } x = a\,\mathrm{tg}\,t$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\ \mathrm{d}\,x \qquad x = a\,\mathrm{ch}\,t \text{ vagy } x = a\frac{1}{\cos t}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\ \mathrm{d}\,x \qquad x = a\sin t \text{ vagy } x = a\cos t$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}\,x \qquad t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

Az $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\ \mathrm{d}\,x$ *integrálnál*

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x, & \text{ha} \quad a > 0; \\ \sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}, & \text{ha} \quad c > 0; \\ \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - \lambda_1), & \text{ha} \quad ax^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \end{cases}$$

alkalmazandó.

9. Határozott integrál

9.1. Tétel. *Ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ teljesül, akkor $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{I}_0$ és*

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) \leq \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

9.2. Tétel. *(Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy*

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon$$

   teljesül.
2. *Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.*
3. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is nulla mértékű.*
4. *Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.*

9.3. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]\,, [a, b[\,,]a, b]\,,]a, b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.*

9.4. Tétel. *(A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.*

9.5. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.*

9.6. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.*

1. *Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \le S_x(f)$.*
2. *Ha z jelöli az $[a,b]$ intervallum triviális folsztását, azaz $z = (a,b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \le s_x(f)$ és $S_x(f) \le S_z(f)$.*
3. *Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \le y$ teljesül, akkor $s_x(f) \le s_y(f)$ és $S_y(f) \le S_x(f)$.*
4. *Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \le S_y(f)$ teljesül.*
5. *Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.*

9.7. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

teljesül.

9.8. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

9.9. Tétel. *Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre*

$$f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a,b]} : \ \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

9.10. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\omega\left(f, [a,b]\right) = \sup_{u,v \in [a,b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

9.11. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ algebra, valamint*

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$$

teljesül.

9.12. Tétel. *Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a,c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c,b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

9.13. Tétel. *Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a,b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ teljesül.*

9.14. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

9.15. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.*

9.16. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvényre*

1. *ha $f \ge 0$, akkor $\int_a^b f \ge 0$;*
2. *ha $f \ge g$, akkor $\int_a^b f \ge \int_a^b g$;*
3. $\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$.

9.17. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.)* *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ és $F \in C([a,b],\mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a).$$

9.18. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon, akkor*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

9.19. Tétel. *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Az I_f függvény folytonos.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in]a,b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I'_f(x_0) = f(x_0)$.*
3. *Ha $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.*

9.20. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, akkor*

$$\int\limits_a^b f = \lim_{x \to a+} \int\limits_x^b f = \lim_{x \to b-} \int\limits_a^x f$$

teljesül.

9.21. Tétel. *(Lebesgue-tétel.) Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.*

9.22. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a,b \in \mathbb{R}$, melyre $a < b$ és $[a,b] \subseteq I$, legyen valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Ekkor*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

9.23. Tétel. *(Az integrálszámítás középértéktételei.)* *Legyen $f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$.*

1. *Ha $g \geq 0$, akkor létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\int\limits_a^b fg = f(\xi) \int\limits_a^b g.$$

2. *Létezik $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f = f(\xi).$$

9.24. Tétel. *A*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : C([a,b],\mathbb{R}) \times C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle \triangleq \int\limits_a^b fg$$

leképezés skaláris szorzás.

9.25. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Ha $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, akkor*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

teljesül.

9.26. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ függvényt.*

1. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a, \infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és ebben az esetben*
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha-1)}.$$
2. *Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0, a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$ és ebben az esetben*
$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

10. Véges dimenziós terek topológiája

10.1. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

10.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$
5. $\forall x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} : \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

10.3. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

teljesül.

10.4. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

10.5. Tétel. *A $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ teljesül.*

10.6. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^\mathfrak{n} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y\rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos\alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

10.7. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

10.8. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $x \in \mathbb{K}^n$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$*. Ekkor minden* $y \in B_r(x)$ *pontra és* $\rho \in]0, r - \|x-y\|[$ *számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

10.9. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

10.10. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

10.11. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *pont és* $r \in \mathbb{R}^+$ *szám esetén* $B_r(x)$ *korlátos, nyílt halmaz.*

10.12. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

10.13. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Az üres halmaz és* $\mathbb{K}^n$ *zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

10.14. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$*. Ha* Z *zárt halmaz és* U *nyílt halmaz, akkor* $Z \setminus U$ *zárt halmaz és* $U \setminus Z$ *nyílt halmaz.*

10.15. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*

1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet* X *tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza* X*-et.*

10.16. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Tetszőleges* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz esetén*

1. *az* X *halmaz pontosan akkor nyílt, ha* $X = \operatorname{Int} X$*;*
2. *az* X *halmaz pontosan akkor zárt, ha* $X = \overline{X}$*.*

10.17. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér. Az* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

10.18. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$*. Ekkor*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} X &= \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X}, \\ \overline{X} &= \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X). \end{aligned}$$

10.19. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

10.20. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

10.21. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

10.22. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $A \subseteq \mathbb{K}^n$ *és* $x \in \mathbb{K}^n$.

1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$.

10.23. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* ca *sorozat konvergens és* $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. *Az* $\|a\|$ *sorozat konvergens és* $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

10.24. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, *és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens a* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ *térben, ha minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén az* $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *indexre*

$$\mathrm{pr}_i (\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

10.25. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

10.26. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

10.27. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

10.28. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér teljes, továbbá minden* $A \subseteq \mathbb{K}^n$ *zárt halmaz teljes.*

10.29. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér Banach-tér.*

10.30. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

10.31. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz.*

1. *Ekkor* X *korlátos és zárt.*
2. *Az* $Y \subseteq X$ *halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

10.32. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $(K_i)_{i \in I}$ *a* $\mathbb{K}^n$ *kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden* $i, j \in I$ *esetén létezik olyan* $k \in I$ *index, hogy* $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ *teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

10.33. Tétel. *Minden* $R \in \mathbb{R}^+$ *esetén a* $[-R, R]^n$ *halmaz kompakt az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált térben.*

10.34. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

10.35. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált térben az* A *halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden* A *halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az* A *halmaznak.*

10.36. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *függvény, az* $a \in \mathbb{K}^n$ *pont az* f *függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen* $A, B \in \mathbb{K}^m$ *az* f *függvény határértéke az* a *pontban. Ekkor* $A = B$.

10.37. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *függvény és a* $z \in \mathbb{K}^n$ *pont a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. A* $\lim\limits_z f$ *határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan* $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ *sorozatra, mely a* z *ponthoz konvergál, létezik a* $\lim f \circ a$ *határérték.*

10.38. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \mathbb{K}^n$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ *halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik* $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$ *és* $\lim\limits_a \varphi$*. Akkor az* a *pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(f+g)$*, a* $\operatorname{Dom}(\lambda f)$*, a* $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ *és a* $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ *halmaznak, valamint*

1. $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$;
2. $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda(\lim\limits_a f)$;
3. $\lim\limits_a (\varphi f) = (\lim\limits_a \varphi)(\lim\limits_a f)$;
4. $\lim\limits_a \|f\| = \left\|\lim\limits_a f\right\|$.

10.39. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *és* $z \in \operatorname{Dom} f$*. A* f *függvény pontosan akkor folytonos a* z *pontban, ha minden olyan* $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ *sorozatra, mely a* z *ponthoz konvergál, létezik a* $\lim f \circ a$ *határérték és megegyezik az* $f(z)$ *elemmel.*

10.40. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$*, és az* $a \in \operatorname{Dom} f$ *pont a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. Az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* a *pontban, ha* $\lim\limits_a f$ *létezik és* $\lim\limits_a f = f(a)$.

10.41. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$*. Tegyük fel,* f*,* g *és* φ *folytonos az* a *pontban. Ekkor az* a *pontban*

1. $f+g$;
2. λf;
3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

10.42. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $\lambda \in \mathbb{K}$*, valamint* $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *és* $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *folytonos függvény. Ekkor* $f+g$*,* λf*,* φf *és* $\|f\|$ *is folytonos.*

10.43. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra létezik olyan* $U \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra létezik olyan* $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ *zárt halmaz, melyre* $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ *teljesül.*

10.44. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény folytonos.*
2. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *nyílt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *nyílt.*
3. *Minden* $A \subseteq \mathbb{K}^m$ *zárt halmazra* $\overset{-1}{f}(A)$ *zárt.*

10.45. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

10.46. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *bijekció. Az* f *függvény pontosan akkor nyílt, ha* f^{-1} *folytonos.*

10.47. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér* $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *folytonos függvény. Ekkor az* $f(K)$ *halmaz is kompakt.*

10.48. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor létezik* $x, y \in K$*, melyekre* $f(x) = \inf f(K)$ *és* $f(y) = \sup f(K)$ *teljesül.*

10.49. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

10.50. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor* f *homeomorfizmus.*

10.51. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

10.52. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *folytonos függvény. Ekkor* f *egyenletesen folytonos.*

10.53. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $\|\cdot\|$ *norma szerinti* $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz nyílt a* $\|\cdot\|'$ *norma szerint is.*
2. *Minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$ *paraméterekhez létezik olyan* $R \in \mathbb{R}^+$*, melyre* $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.
3. *Létezik olyan* $K \in \mathbb{R}^+$ *szám, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra* $\|x\| \leq K\,\|x\|'$.

10.54. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortéren. A* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan* $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ *paraméterek, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra* $\|x\| \leq K_1\,\|x\|'$ *és* $\|x\|' \leq K_2\,\|x\|$ *teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *paraméterek, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra* $\alpha\,\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\,\|x\|$.

10.55. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $p \in [1, \infty[$ *esetén a* $\|\cdot\|_p$ *és a* $\|\cdot\|_\infty$ *normák ekvivalensek a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *téren.*

10.56. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

10.57. Tétel. *Az* $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *tér milyen normával van ellátva.*

10.58. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *függvény és* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$*. Az* f *függvény a pontbeli folytonossága független az* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *és* $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *tereken választott normától.*

10.59. Tétel. *Az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *sorozat konvergenciája és határértéke független a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *téren választott normától.*

10.60. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

10.61. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$*. Az* A *halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden* A *halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az* A *halmaznak.*

10.62. Tétel. *Az* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

10.63. Tétel. *Ha* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *lineáris altér, akkor* L *teljes.*

10.64. Tétel. *Ha* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$*, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

10.65. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *és* $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaznak. Pontosan akkor létezik a* $\lim\limits_a f$ *határérték, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén létezik a* $\lim\limits_a f_i$ *határérték és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

10.66. Tétel. *Ha* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *és* $a \in \operatorname{Dom} f$*. Az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* a *pontban, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén az* f_i *függvény folytonos az* a *pontban.*

10.67. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *olyan sorozat, melyre a* $\sum a$ *sor konvergens. Ekkor* $\lim a = 0$ *teljesül.*

10.68. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *sorozat. Ha a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens, akkor a* $\sum a$ *sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| .$$

10.69. Tétel. *Legyen* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden* $\lambda \in \mathbb{K}$ *esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

10.70. Tétel. *Ha* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$*, akkor a*

$$\operatorname{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

10.71. Tétel. *Legyen* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *és minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$*,* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén legyen* $A_{ji} = (Ae_i)_j$*. Ekkor minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

10.72. Tétel. *Minden* $\varphi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ *esetén létezik egyetlen olyan* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$*, hogy minden* $y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

teljesül.

10.73. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x\| \leq 1 \right\}$$
jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|Ax\|' < \infty$ *teljesül;*
2. *minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*
$$\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot \sup_{x \in X} \|Ax\|' ;$$
3. *A folytonos.*

10.74. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér. A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

10.75. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér, valamint legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *és* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$*. Ekkor*

$$\|Ax\|' \le \|A\| \cdot \|x\| .$$

10.76. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ *normált tér minden* $i = 1, 2, 3$ *esetén, legyen* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ *és* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$*. Ekkor*

$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

10.77. Tétel. *A* $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *tér Banach-tér.*

10.78. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ *leképezésre* $\|A\| < 1$ *teljesül, akkor a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ *sor konvergens, az* $\mathrm{id} - A$ *elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathrm{id} - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a* $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *identitásfüggvényt.*

10.79. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \triangleq \left\{ a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}) \middle| \ \exists a^{-1} \right\} .$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor*

1. *minden* $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *elemre* $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*;*
2. *a* $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ *halmaz nyílt;*
3. *az* $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$*,* $i(a) = a^{-1}$ *leképezés folytonos.*

10.80. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*, valamint* $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \right)$*. Minden* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén legyen* $A_{ji_1 \ldots i_k} = A(e_{i_1} \ldots e_{i_k})_j$*. Ekkor minden* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektor és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *index esetén*

$$A(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1, \ldots, i_k} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_k}^{(k)} \tag{10.1}$$

teljesül.

10.81. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ *multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \ \middle| \ \|x_i\| \le 1 \right\}$$

jelölés mellett $\sup\limits_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ *teljesül;*

2. *minden* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$\|A(x_1, \ldots, x_k)\|' \le \|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|' ;$$

3. A folytonos.

10.82. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{\|Ax\|' \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^k \{x_i \in \mathbb{K}^n |\; \|x_i\| \le 1\}\right\}$$

leképezés norma.

10.83. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

10.84. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. A*

$$\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right) \to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^n)^{k+1}, \mathbb{K}^m\right)$$
$$A \mapsto \left((x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_{k+1})\right)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

10.85. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \ge K\,\|v\|^k$; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan $K' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $A(v^{[k]}) \le -K'\,\|v\|^k$.*

10.86. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

10.87. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ egy teljes részhalmaz és $f : \Omega \to \Omega$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in \Omega$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

10.88. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén*
$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \le d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. *$\overline{A} = \{z \in M |\; \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$.*

10.89. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a, b) = \mathrm{dist}(K, Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

10.90. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p\rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x\rangle < c$.*

10.91. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\; \forall x \in Z : \; \langle z, x\rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c) \in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\; \langle z, y\rangle < c\}$$

teljesül.

10.92. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C} : \; r < |x| \;\to\; C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C} : \; f(x) \neq 0 \;\to\; \exists y \in \mathbb{C} : \; |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

10.93. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

10.94. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

10.95. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

11. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

11.1. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \; (N < n, m \;\to\; \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

11.2. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

11.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és a $\sum\limits_{n} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^m)$.*

11.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

11.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m)$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m) : \; \|f\|_{\sup} = 0 \;\leftrightarrow\; f = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m) : \; \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;
3. $\forall f, g \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m) : \; \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.

11.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \; \Big(N < n \;\to\; \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

11.7. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ \big(N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon\big),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$, melyre

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\big).$$

11.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

11.9. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M,\mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

11.10. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

11.11. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

11.12. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n f_n'$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;*
2. *az $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén*
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

11.13. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

11.14. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C([a,b],\mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

11.15. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x\in\mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x|<R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x|>R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r\in[0,R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in B_r(0)}\|a_n t^n\|<\infty$$

teljesül.

4. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

11.16. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x\in\mathbb{R}$, $|x|<R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k x^{k-1}.$$

11.17. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, $[\alpha,\beta]\subseteq\,]-R_a,R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)\mathrm{d}\,x=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta}a_k x^k\,\mathrm{d}\,x.$$

11.18. Tétel. *Ha $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=n}^{n+m}a_k\right|=0.$$

11.19. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0<R_a<\infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0\in\{R_a,-R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0,x_0\rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0,x_0\rfloor}$ függvény folytonos.*

11.20. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]}\left|B_n^f(t)-f(t)\right|\right)=0.$$

11.21. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

12. Differenciálszámítás véges dimenzióban

12.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$, melyre*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x - a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

12.2. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} : \Big(\|x - a\| < \delta \ \to \ \|f(x) - f(a) - A(x - a)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - a\| \Big)$$

teljesül.

12.3. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ és $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ tereken választott normától.*

12.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x - a)}{|x - a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

12.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

12.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \operatorname{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

12.7. Tétel. *Legyen* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a* $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ *halmaznak és legyen* f, g *és* φ *differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. $f + g$ *differenciálható az a pontban és* $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;
2. *minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* cf *differenciálható az a pontban és* $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;
3. φf *differenciálható az a pontban és* $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.

12.8. Tétel. *Minden* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz esetén* $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *vektortér.*

12.9. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen* $g : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$, $f : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_3}$ *és* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \circ g$. *Ha* g *differenciálható az a pontban és* f *differenciálható a* $g(a)$ *pontban, akkor* $f \circ g$ *differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

12.10. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény, valamint* $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. *Ha* f *differenciálható az a pontban, akkor minden* $e \in U$ *vektorra létezik az* f *függvény* e *iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá* $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ *teljesül.*

12.11. Tétel. *Az* $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

12.12. Tétel. *Ha* $u = (u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i}$, *és* $j \in \{1, \dots, k\}$, *akkor az*

$$\operatorname{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{n_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i} \qquad x \mapsto (u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{n_j}$ *pontban*

$$(\mathrm{D}\operatorname{in}_{u,j})(a) = \operatorname{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\operatorname{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{n_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i} \qquad x \mapsto (0, \dots, 0, \underbrace{x}_{j.\ \text{hely}}, 0, \dots, 0).$$

12.13. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$, $f(a) = a^k$. *Ekkor minden* $a \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n)$ *esetén*

$$(\mathrm{D}f)(a) : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

12.14. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \left\{ a \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n) \mid \exists a^{-1} \right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ *függvényére minden* $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pontban*

$$(\mathrm{D}i)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}$$

teljesül.

12.15. Tétel. *Ha az* $f:\prod_{i=1}^{k}\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *függvény differenciálható az* $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$ *pontban, akkor minden* $x\in\prod_{i=1}^{k}\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x)=\sum_{i=1}^{k}((\partial_i f)(a))(x_i)$$

teljesül.

12.16. Tétel. *Ha az* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$ *pontban, akkor minden* $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x)=\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}}((\partial_i f)(a))x_i$$

teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén

$$(\mathrm{D}f)(a)=\begin{pmatrix}(\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \ldots & (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a)\end{pmatrix}.$$

12.17. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban. Ekkor a* $(\mathrm{D}f)(a)\in\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}},\mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ *lineáris leképezés mátrixa*

$$(\mathrm{D}f)(a)=\begin{pmatrix}(\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a)\\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a)\end{pmatrix}.$$

12.18. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$ *és legyen* $k\in\{1,\ldots,\mathfrak{n}\}$ *tetszőleges index. Ekkor az* f *függvénynek pontosan akkor létezik a* k*-adik változó szerinti parciális deriváltja az* a *pontban, ha létezik az* e_k *iránymenti deriváltja az* a *pontban és ebben az esetben* $(\partial_k f)(a)=(\mathrm{D}_{e_k}f)(a)$ *teljesül.*

12.19. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban. Ekkor minden* $x\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x)=\langle(\operatorname{grad}f)(a),x\rangle$$

teljesül.

12.20. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}$ *tetszőleges függvény és legyen* $a,e\in\mathbb{R}^{n}$*. Ha az* f *függvény differenciálható az* a *pontban, akkor létezik az* f *függvény* a *pontbeli* e *iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a)=\langle(\operatorname{grad}f)(a),e\rangle.$$

12.21. Tétel. *Ha* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *differenciálható az* $a\in\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *pontban, akkor*

$$(\operatorname{div}f)(a)=\sum_{i=1}^{n}(\partial_i f_i)(a).$$

12.22. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}$ *tetszőleges függvény. Ekkor minden* $a\in\operatorname{Dom}(\Delta f)$ *elemre*

$$(\Delta f)(a)=\sum_{k=1}^{n}(\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

12.23. Tétel. *Legyen* $f:\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $[a,b]$ *szakaszon. Ekkor létezik olyan* $c\in\,]a,b[$*, hogy*

$$\|f(b)-f(a)\|_2\le\|(\mathrm{D}f)(c)\|\cdot\|b-a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\|=\sup_{\|x\|_2\le 1}\|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2.$$

12.24. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D}f)(c)\| \right) \cdot \|b - a\|_2 \,,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D}f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|((\mathrm{D}f)(c))x\|_2 \,.$$

12.25. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D}f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

12.26. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

12.27. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

12.28. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim\limits_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*
$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x).$$

12.29. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

12.30. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum\limits_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

12.31. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.)* *Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *tetszőleges függvény és* $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$*. Ha* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$*,* $\mathrm{D}f$ *folytonos az* a *pontban és* $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$*, akkor létezik olyan* $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ *nyílt környezete az* a *pontnak, melyre*

1. $f|_\Omega$ *injektív;*
2. $f(\Omega)$ *nyílt halmaz;*
3. $f|_\Omega$ *homeomorfizmus* Ω *és* $f(\Omega)$ *között;*
4. *az* $(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény differenciálható;*
5. *minden* $x \in \Omega$ *pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a* $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény folytonos az* $f(a)$ *pontban.*

12.32. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *tetszőleges függvény. Ha* $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$*,* $\mathrm{D}f$ *folytonos az* (a_1, a_2) *pontban és* $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$*, akkor létezik olyan* Ω_1*,* Ω_2 *nyílt környezete az* a_1*,* a_2 *pontnak, melyre*

1. $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$*;*
2. *létezik egyetlen olyan* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *differenciálható függvény, melyre* $\varphi(a_1) = a_2$*, minden* $x \in \Omega_1$ *esetén*
$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$
teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ *folytonos az* a_1 *pontban.*

12.33. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz,* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k*-szor differenciálható függvény. Ekkor minden* $a \in \Omega$ *és* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *esetén*
$$((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(k)}_{i_k}.$$

12.34. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, hogy minden* $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *index esetén a* $\partial_i \partial_j f$ *függvény folytonos az* Ω *halmazon. Ekkor minden* $i, j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *indexre* $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ *teljesül az* Ω *halmazon.*

12.35. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *nyílt halmaz,* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, hogy minden* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *index esetén a* $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$ *függvény folytonos az* Ω *halmazon. Ekkor* f k*-szor folytonosan differenciálható és minden* $a \in \Omega$ *pontban* $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ *szimmetrikus* k*-lineáris leképezés.*

12.36. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.)* *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *és* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *olyan függvény melyre* $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvény* k*-szor folytonosan differenciálható az* $[a, b]$ *halmazon és* $(k+1)$*-szer differenciálható az* $]a, b[$ *nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan* $\xi \in\,]a, b[$*, melyre*
$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} ((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b-a)^{[i]} + \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b-a)^{[k+1]}.$$

12.37. Tétel. *(Taylor-formula.)* *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $a, b \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ *és* $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ *olyan függvény melyre* $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvény* k*-szor folytonosan differenciálható az* $[a, b]$ *halmazon és* $(k+1)$*-szer differenciálható az* $]a, b[$ *nyílt szakaszon. Ekkor*
$$\left| f(b) - T^f_{k,a}(b) \right| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

12.38. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0.$$

12.39. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

12.40. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha k páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

12.41. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, valamint minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ halmazt. Tegyük fel, hogy az $a \in H \cap \mathrm{Dom}\, f$ olyan pont, hogy a $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

13. Metrikus terek

13.1. Tétel. *Tetszőleges M nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{ha} \quad x = y \end{cases}$$

metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.

13.2. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in \,]0, r - d(x, y)[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

13.3. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

13.4. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $x \in M$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

13.5. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

13.6. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen (M,d) metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és M zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

13.7. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

13.8. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. *$\operatorname{Int} X$ halmaz nyílt;*
2. *$\operatorname{Int} X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. *$\overline{X}$ halmaz zárt;*
4. *$\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

13.9. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

13.10. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

13.11. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} X &= M \setminus \overline{M \setminus X}, \\ \overline{X} &= M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X). \end{aligned}$$

13.12. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A\times A})$ is metrikus tér.*

13.13. Tétel. *(Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A\times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A B halmaz pontosan akkor nyílt az (A,d') metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.*
2. *A B halmaz pontosan akkor zárt az (A,d') metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.*

13.14. Tétel. *(Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a B halmaz lezártját az (M,d) metrikus térben és $\tilde{B}$ a B halmaz lezártját az (A,d') metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra*

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A$$

teljesül.

13.15. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1,\infty[$.*

1. *A*

$$\begin{aligned} d_p &: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x,y) \mapsto d_p(x,y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ d_\infty &: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x,y) \mapsto d_\infty(x,y) \triangleq \max\left\{ |x_k - y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\} \right\} \end{aligned}$$

leképezés metrika.

2. *Minden* $p \in [1, \infty[$ *esetén a* d_p *és a* d_∞ *metrikák ekvivalensek.*

13.16. Tétel. *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

13.17. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

13.18. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

13.19. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér,* $A \subseteq M$ *és* $x \in M$.

1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$.

13.20. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, *és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens a* $(\mathbb{K}^n, d_p)$ *térben, ha minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén az* $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *indexre*

$$\mathrm{pr}_i (\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

13.21. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

13.22. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

13.23. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

13.24. Tétel. *Legyen* (M, d) *teljes metrikus tér és* $X \subseteq M$ *zárt halmaz. Ekkor az* $(X, d|_{X \times X})$ *metrikus altér is teljes.*

13.25. Tétel. *Metrikus térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

13.26. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $X \subseteq M$ *kompakt halmaz.*

1. *Ekkor* X *korlátos és zárt.*
2. *Az* $Y \subseteq X$ *halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

13.27. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $(K_i)_{i \in I}$ *az* M *kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden* $i, j \in I$ *esetén létezik olyan* $k \in I$ *index, hogy* $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ *teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

13.28. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $A \subseteq M$. *Az* A *halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha* $\overline{A}$ *kompakt halmaz.*

13.29. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $K \subseteq M$ *kompakt halmaz. Ekkor minden* $a : \mathbb{N} \to K$ *sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a* K *halmaznak.*

13.30. Tétel. *(Lebesgue-lemma.) Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $K \subseteq M$ *olyan halmaz, hogy minden* K *halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a* K *halmaznak. Ekkor a* K *halmaz bármely* $(U_i)_{i \in I}$ *nyílt befedéséhez létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$ *szám, hogy minden* $x \in K$ *ponthoz van olyan* $i \in I$, *amelyre* $B_r(x) \subseteq U_i$ *teljesül.*

13.31. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $K \subseteq M$ *olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a* K *halmaznak. Ekkor minden* $r \in \mathbb{R}^+$ *számhoz létezik olyan* $H \subseteq K$ *véges halmaz, amelyre* $K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ *teljesül.*

13.32. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

13.33. Tétel. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.*

13.34. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.*

13.35. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek szeparábilisek.*

13.36. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.*

13.37. Tétel. *(Teljesen korlátos halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.*
2. *Véges sok teljesen korlátos halmaz uniója is teljesen korlátos.*
3. *Metrikus térben minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

13.38. Tétel. *Minden kompakt halmaz teljesen korlátos.*

13.39. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ekkor A teljesen korlátos halmaz.*

13.40. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

13.41. Tétel. *(Hausdorff-tétel.) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden benne haladó sorozatnak van olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

13.42. Tétel. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

13.43. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen $A, B \in M'$ az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.*

13.44. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény és a $z \in M$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

13.45. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

13.46. Tétel. *Legyen (M,d) és (M',d') metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.*

13.47. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, $\varphi : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. Ekkor*

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \to \infty} d_2(\varphi(a_n), \varphi(b_n)).$$

13.48. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = d\left(\lim a, \lim b\right)$$

teljesül.

13.49. Tétel. *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) és (M_3, d_3) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \mathrm{Dom}\, g$;*
2. *$b \in \mathrm{Dom}\, g$ és g folytonos a b pontban;*

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

13.50. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*

13.51. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

13.52. Tétel. *(Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

13.53. Tétel. *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

13.54. Tétel. *Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. Az f függvény pontosan akkor nyílt, ha f^{-1} folytonos.*

13.55. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

13.56. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

13.57. Tétel. *Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény is folytonos.*

13.58. Tétel. *Ha (M_1, d_1) kompakt metrikus tér, és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

13.59. Tétel. *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

13.60. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

13.61. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Tegyük fel, hogy (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\mathrm{Dom}\, f} \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

13.62. Tétel. *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) tetszőleges metrikus tér, (M_2, d_2) pedig teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \to M_2$ függvény, mely az f függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a g függvény is egyenletesen folytonos.*

13.63. Tétel. *Minden izometria egyenletesen folytonos.*

13.64. Tétel. *(Izometria kiterjesztése.) Legyen (M_1, d_1) metrikus tér, (M_2, d_2) teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az f függvény folytonos $g : M_1 \to M_2$ kiterjesztése is izometria.*

13.65. Tétel. *Minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos.*

13.66. Tétel. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér, akkor az $f : M_1 \to M_2$ függvények tulajdonságai között az alábbi reláció teljesül.*

$$\textit{kontrakció} \Rightarrow \textit{Lipschitz-folytonos} \Rightarrow \textit{egyenletesen folytonos} \Rightarrow \textit{folytonos}$$

13.67. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel.) Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

13.68. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

13.69. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in M$ esetén*
$$|\operatorname{dist}_A(x) - \operatorname{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a dist_A függvény egyenletesen folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M |\ \operatorname{dist}_A(z) = 0\}$.

13.70. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.*

1. *Létezik olyan $f : M \to [0, 1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$ és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.*
2. *Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.*

13.71. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér.*

1. *Létezik olyan (M', d') teljes metrikus tér és $j : M \to M'$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül.*
2. *Ha (M_1, d_1) és (M_2, d_2) teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \to M_1$ és $j_2 : M \to M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.*

13.72. Tétel. *Minden metrikus térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

13.73. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subseteq M$.*

1. *Az A halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér összefüggő.*
2. *Az A halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A \times A})$ altér ívszerűen összefüggő.*

13.74. Tétel. *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

13.75. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az M halmaz összefüggő.*
2. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.*
3. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.*

13.76. Tétel. *(Metrikus altér összefüggősége.) Legyen (M, d) metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az A halmaz összefüggő az (M, d) térben.*
2. *Az (A, d') metrikus altér összefüggő.*

3. *Nem létezik olyan* $U, V \subseteq M$ *nyílt halmaz, melyre* $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ *és* $A \subseteq U \cup V$.
4. *Nem létezik olyan* $X, Y \subseteq M$ *zárt halmaz, melyre* $X \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap A \neq \emptyset$, $X \cap Y \cap A = \emptyset$ *és* $A \subseteq X \cup Y$.

13.77. Tétel. *Legyen* (M, d) *összefüggő metrikus tér és* $A \subseteq M$ *olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor* $A = \emptyset$ *vagy* $A = M$ *teljesül.*

13.78. Tétel. *Legyen* (M_1, d_1) *és* (M_2, d_2) *metrikus tér, valamint legyen* $A \subseteq M_1$ *és* $f : A \to M_2$ *folytonos függvény.*
1. *Ha* A *összefüggő, akkor* $f(A)$ *is összefüggő.*
2. *Ha* A *ívszerűen összefüggő, akkor* $f(A)$ *is ívszerűen összefüggő.*

13.79. Tétel. *Ha* I *véges halmaz és minden* $i \in I$ *esetén* (M_i, d_i) *metrikus tér, akkor* $M = \prod_{i \in I} M_i$ *esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \max \{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

metrika.

13.80. Tétel. *Legyen* $(M_i, d_i)_{i \in I}$ *metrikus terek véges rendszere és* (M, d) *ezek szorzata. Ekkor minden* $j \in I$ *esetén a*

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j \qquad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

projekció folytonos és nyílt.

13.81. Tétel. *Legyen* $(M_i, d_i)_{i \in I}$ *metrikus terek véges rendszere,* (M, d) *ezek szorzata és* $a : \mathbb{N} \to M$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden* $i \in I$ *esetén a* $\mathrm{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in I$ *indexre*

$$\mathrm{pr}_i (\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

13.82. Tétel. *Legyen* $(M_i, d_i)_{i \in I}$ *metrikus terek véges rendszere,* (M, d) *ezek szorzata,* (M', d') *metrikus tér és* $f : M' \to M$ *függvény.*
1. *Az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* $a \in \mathrm{Dom}\, f$ *pontban, ha minden* $i \in I$ *esetén a* $\mathrm{pr}_i \circ f : M' \to M_i$ *függvény folytonos az* a *pontban.*
2. *Az* f *függvény pontosan akkor folytonos, ha minden* $i \in I$ *esetén a* $\mathrm{pr}_i \circ f$ *függvény folytonos.*

13.83. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ *metrikus terek véges rendszere és* (M, d) *ezek szorzata. Minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén legyen* $K_i \subseteq M_i$ *kompakt halmaz és legyen* $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. *Ekkor a* K *halmaz kompakt az* M *metrikus térben.*

13.84. Tétel. *Legyen* (M, d) *metrikus tér.*
1. *Az* $X \subseteq M$ *halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az* $M \setminus \overline{X}$ *halmaz sűrű.*
2. *Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.*
3. *Az* $X \subseteq M$ *halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az* M *sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *rendszere, melyre* $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ *teljesül.*

13.85. Tétel. *(Baire-féle kategóriatétel.) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

14. Normált terek

14.1. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér. Minden* $x, y \in V$ *esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

14.2. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér. Ekkor a*

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ *metrikus tér.*

14.3. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Legyen* $x \in V$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$. *Az* x *középpontú* r *sugarú nyílt gömb*

$$B_r(x) = \{y \in V |\ \|x - y\| < r\}\,.$$

2. *Az* $X \subseteq V$ *halmaz nyílt, ha minden* $x \in X$ *ponthoz létezik* $r \in \mathbb{R}^+$, *hogy* $B_r(x) \subseteq X$ *teljesül.*
3. *Az* $X \subseteq V$ *halmaz zárt, ha* $V \setminus X$ *nyílt.*
4. *Az* $X \subseteq V$ *halmaz korlátos, ha létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$ *és* $x \in V$, *hogy* $X \subseteq B_r(x)$ *teljesül.*

14.4. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $p \in [1, \infty[$. *A* $\mathbb{K}^n$ *téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k|\,|\ k \in \{1, \dots, n\}\}$$

leképezések normák (melyet p*-normának, illetve* sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

14.5. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to V$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* ca *sorozat konvergens és* $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. *Az* $\|a\|$ *sorozat konvergens és* $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

14.6. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to V$ *olyan sorozat, melyre a* $\sum a$ *sor konvergens. Ekkor* $\lim a = 0$ *teljesül.*

14.7. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to V$ *olyan sorozat, melyre a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens.*

1. *Ha* V *Banach-tér, akkor a* $\sum a$ *sor konvergens.*
2. *Ha a* $\sum a$ *sor konvergens, akkor*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\,.$$

14.8. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér. A* $(V, \|\cdot\|)$ *pár pontosan akkor Banach-tér, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

14.9. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* V *vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $\|\cdot\|$ *norma szerinti* $X \subseteq V$ *nyílt halmaz nyílt a* $\|\cdot\|'$ *norma szerint is.*
2. *Minden* $x \in V$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$ *paraméterekhez létezik olyan* $R \in \mathbb{R}^+$, *melyre* $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.
3. *Létezik olyan* $K \in \mathbb{R}^+$ *szám, hogy minden* $x \in V$ *vektorra* $\|x\| \leq K \|x\|'$.

14.10. Tétel. *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.*

14.11. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. *Az A leképezés egyenletesen folytonos.*

14.12. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

14.13. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \,.$$

14.14. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathscr{L}(V_1, V_3)$, továbbá*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

14.15. Tétel. *Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az*

$$\begin{aligned} M_c &: V \to V \qquad x \mapsto cx, \\ L_z &: V \to V \qquad x \mapsto z + x \end{aligned}$$

leképezés homeomorfizmus.

14.16. Tétel. *Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.*

14.17. Tétel. *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.*

14.18. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \to V$ identitásfüggvényt.

14.19. Tétel. *Legyen U és V Banach-tér és legyen*

$$G(\mathscr{L}(U, V)) \triangleq \{a \in \mathscr{L}(U, V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V, U) :\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\} \,.$$

(Vagyis $G(\mathscr{L}(U, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. *minden $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathscr{L}(U,V))$;*
2. *a $G(\mathscr{L}(V,V))$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : G(\mathscr{L}(U,V)) \to G(\mathscr{L}(V,U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

14.20. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

leképezést.

1. *A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.*
2. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.*
3. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.*

14.21. Tétel. *Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

14.22. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér és legyen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor*

1. *a V tér teljes;*
2. *a V egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

14.23. Tétel. *Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.*

14.24. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *A V vektortér véges dimenziós.*
2. *A V valamely nem nulla sugarú zárt gömbje kompakt.*
3. *A V lokálisan kompakt tér.*

14.25. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér, a*

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés pedig norma az $l^p_{\mathbb{K}}$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ normált-tér.

14.26. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a*

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0)$$

függvény folytonos.

2. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a*

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\} \left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]} \right)$$

függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0,1]$ számra

$$\gamma_{x_k,x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$$

teljesül.

14.27. Tétel. *Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.*

14.28. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A V halmaz ívszerűen összefüggő.*

2. *A V halmaz összefüggő.*
3. *Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.*

14.29. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.*

14.30. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*
1. *Az A halmaz összefüggő.*
2. *Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.*
3. *Az A halmaz ívszerűen összefüggő.*

14.31. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^{n} V_k$ halmazon értelmezzük a*

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\left\{\|x_k\|_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\right\}$$

$$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.
1. *A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.*
2. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.*
3. *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.*

14.32. Tétel. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor létezik olyan $(V', \|\cdot\|')$ Banach-tér és $j : V \to V'$ lineáris izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = V'$ teljesül.*

14.33. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, $X \subseteq U$ sűrű lineáris altér és $A : X \to V$ lineáris leképezés, mely folytonos az $(X, \|\cdot\| |_X)$ normált téren. Ekkor létezik egyetlen olyan $A' : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, mely az A kiterjesztése, vagyis $A'|_{\operatorname{Dom} A} = A$, valamint $\|A'\| = \|A\|$.*

14.34. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek teljes burka (U', j). Minden $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-térhez és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $A' : U' \to V$ folytonos lineáris leképezés, melyre $A' \circ j = A$ teljesül, továbbá $\|A'\| = \|A\|$.*

14.35. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, melynek $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ a teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $A : V_1 \to V_2$ lineáris izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = A \circ j_1$ teljesül.*

14.36. Tétel. *Minden normált térnek létezik teljes burka és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

14.37. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ multilineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*
1. *Az A leképezés folytonos.*
2. *Az A leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. *A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i \mid \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett $\sup_{x \in B} \|A(x)\|_W < \infty$ teljesül.*

14.38. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Az $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{\|Ax\|_W \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^n \{x_i \in V_i | \; \|x_i\|_i \leq 1\}\right\}$$

leképezés norma.

14.39. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ és $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$. Ekkor*

$$\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \prod_{i=1}^n \|x_i\|_i \,.$$

14.40. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér. Ekkor $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ is Banach-tér.*

14.41. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^n V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Ekkor $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)$.*

14.42. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Ekkor ${\mathscr{L}_s}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)$ térnek.*

14.43. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. A*

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ bijekció és minden $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right)$ elemre

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

14.44. Tétel. *(Polarizációs formula.) Legyen V és W vektortér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. Minden $x_1, \dots, x_n \in V$ vektorra*

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_1, \dots, t_n \in \{-1, 1\}} t_1 \dots t_n \cdot A\left(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n\right)^{[n]}$$

teljesül.

14.45. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n\left(V^n, \mathbb{R}\right)$.*

1. *Ha A szimmetrikus pozitív vagy negatív multilineáris leképezés, akkor n páros szám.*
2. *Ha A szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.*
3. *Ha A szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.*

4. *Ha* $\dim V < \infty$ *és* A *pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.*
5. *Ha* $\dim V < \infty$ *és* A *negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.*

14.46. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *Banach-tér és legyen* $Z \subseteq V$ *zárt, konvex és elnyelő halmaz. Ekkor létezik olyan* $r \in \mathbb{R}^+$ *melyre* $B_r(0) \subseteq Z$ *teljesül.*

14.47. Tétel. *Legyen* V *valós vektortér,* $M \subseteq V$ *lineáris altér,* $\varphi : V \to \mathbb{R}$ *szublineáris leképezés és* $f : M \to \mathbb{R}$ *olyan lineáris leképezés, melyre* $f \leq \varphi|_M$*. Ha* $x \in V \setminus M$*, akkor létezik olyan* $\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés, melyre* $f \subseteq \tilde{f}$ *és* $\tilde{f} \leq \varphi|_{M \oplus \mathbb{R}x}$ *teljesül.*

14.48. Tétel. *Legyen* V *valós vektortér,* $M \subseteq V$ *lineáris altér,* $\varphi : V \to \mathbb{R}$ *szublineáris leképezés és* $f : M \to \mathbb{R}$ *olyan lineáris leképezés, melyre* $f \leq \varphi|_M$*. Ha* $x \in V \setminus M$*, akkor létezik olyan* $F : V \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés, melyre* $f \subseteq F$ *és* $F \leq \varphi$ *teljesül.*

14.49. Tétel. *Komplex vektortér feletti lineáris funkcionált egyértelműen meghatároz a valós része. Legyen* V *komplex vektortér és jelölje* V_R *a* V *vektorteret az összeadással és a* $\mathbb{C} \times V \to V$ *szorzás* $\mathbb{R} \times V \to V$ *megszorításával.*

1. *Ha* $f : V \to \mathbb{C}$ *lineáris leképezés akkor az* $f_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re} \circ f$ *leképezés olyan* $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés, melyre minden* $x \in V$ *esetén* $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)$ *teljesül.*
2. *Ha* $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés, akkor az* $f : V \to \mathbb{C}$*,* $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)$ *olyan lineáris leképezés, melyre* $f_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re} \circ f$ *teljesül.*

14.50. Tétel. *(Hahn–Banach-tétel.) Legyen* V *vektortér* $\mathbb{K}$ *felett,* $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ *félnorma,* $M \subseteq V$ *lineáris altér és* $f : M \to \mathbb{K}$ *olyan lineáris leképezés, melyre* $|f| \leq p_M$*. Ekkor létezik olyan* $F : M \to \mathbb{K}$ *lineáris leképezés, melyre* $f \subseteq F$ *és* $|F| \leq p$ *teljesül.*

14.51. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ *felett,* $M \subseteq V$ *lineáris altér és* $f : M \to \mathbb{K}$ *folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik olyan* $F : V \to \mathbb{K}$ *folytonos lineáris leképezés, mely* f *kiterjesztése és* $\|f\| = \|F\|$ *teljesül.*

14.52. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ *felett,* $n \in \mathbb{N}^+$*,* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *lineárisan független vektorrendszer és* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *tetszőleges paraméterek. Ekkor létezik olyan* $F : V \to \mathbb{K}$ *lineáris leképezés, hogy minden* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén* $F(x_k) = a_k$*.*

14.53. Tétel. *Ha* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér, akkor* V' *szétválasztó.*

14.54. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. *Minden* $x \in V$ *esetén legyen*
$$j_x : V' \to \mathbb{K} \qquad \varphi \mapsto \varphi(x).$$
Ekkor j_x *folytonos lineáris leképezés.*
2. *A*
$$j : V \to V'' \qquad x \mapsto j_x$$
leképezés lineáris és injektív.
3. *A* $j : V \to V''$ *leképezés izometria, azaz minden* $x \in V$ *esetén*
$$\|x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|\,.$$

14.55. Tétel. *Legyen* $(V, \|\cdot\|)$ *normált tér.*

1. $\overline{B_1(0)} = \{x \in V \mid \ \|x\| \leq 1\}$
2. *Ha* $\Omega \subseteq V$ *konvex halmaz,* W *vektortér és* $A : V \to W$ *lineáris leképezés, akkor* $A(\Omega)$ *is konvex.*
3. *Ha* $\Omega \subseteq V$ *konvex halmaz, akkor* $\overline{\Omega}$ *is konvex halmaz.*
4. *A* $B_1(0)$ *és a* $\overline{B_1(0)}$ *halmaz konvex.*

14.56. Tétel. *(Banach egyenletes korlátosság tétele.) Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$. A H halmaz pontosan akkor korlátos pontonként, ha korlátos az operátornomában, azaz*

$$\forall x \in U: \sup_{A \in H} \|Ax\|_V < \infty \quad \leftrightarrow \quad \sup_{A \in H} \|A\| < \infty.$$

14.57. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az U halmazon. Ekkor $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, valamint az $A = \lim_{n \to \infty} a_n$ határérték folytonos lineáris operátor, melyre $\|A\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|a_n\|$ teljesül.*

14.58. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre*

$$B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))},$$

akkor minden $r \in]0, R[$ esetén

$$B_r(0) \subseteq A(B_1(0)).$$

14.59. Tétel. *(Banach nyílt leképezés tétele.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, akkor az A operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

14.60. Tétel. *(Banach tétele a folytonos inverz létezéséről.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} is folytonos.*

14.61. Tétel. *Legyen V vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a V vektortéren, mellyel V Banach-tér. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható, akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák.*

14.62. Tétel. *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Az A leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozatra, melyre az $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens teljesül, hogy $\lim_{n \to \infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$ és*

$$A\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \lim_{n \to \infty} Ax_n.$$

14.63. Tétel. *Zártgráf-tétel Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés. Ekkor az alábbi állítások közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat.*

i. $\operatorname{Dom} A$ *zárt;*

ii. $\Gamma(A)$ *zárt;*

iii. A *folytonos.*

15. Hilbert-terek

15.1. Tétel. *Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra*

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \qquad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

teljesül.

15.2. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

15.3. Tétel. *Legyen V vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

norma.

15.4. Tétel. *(Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorzatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

15.5. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a*

$$\begin{aligned} \langle\cdot, z\rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle x, z\rangle \\ \langle z, \cdot\rangle &: \mathscr{H} \to \mathbb{K} \qquad x \mapsto \langle z, x\rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

15.6. Tétel. *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *(Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra*

$$\sum_{n\in J} |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 .$$

2. *Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n .$$

3. *(Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 .$$

15.7. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathscr{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre*

$$\operatorname{dist}_W(x) = \inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

15.8. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathscr{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z\in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.*

15.9. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér.*

1. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L^\perp$ zárt lineáris altér.*
2. *Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.*
3. *Minden nem üres $L \subseteq \mathscr{H}$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.*

15.10. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér. Ekkor W és $W^\perp$ zárt ortogonális kiegészítő alterek, vagyis $W \cap W^\perp = \{0\}$ és $W + W^\perp = \mathscr{H}$ teljesül.*

15.11. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.*

15.12. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $L \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér, akkor $\overline{L} = L^{\perp\perp}$.*

15.13. Tétel. *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, tekintsük a*

$$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \qquad x \mapsto x_W$$

leképezést.

1. *A P leképezés lineáris.*
2. *A P leképezésre $\operatorname{Ran} P = W$ és $\operatorname{Ker} P = W^\perp$.*
3. *$P^2 = P$*
4. *Ha $W \neq \{0\}$, akkor $\|P\| = 1$.*

15.14. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel.) Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\varphi \in \mathscr{H}'$, azaz $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $z \in \mathscr{H}$ vektor, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén*

$$\varphi(x) = \langle z, x \rangle$$

teljesül.

16. Függvénysorozatok, függvénysorok

16.1. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : \; (N < n, m \;\; \rightarrow \;\; d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

16.2. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.*

16.3. Tétel. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.*

16.4. Tétel. *Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

16.5. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, V) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t\in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ vektortéren, így $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált tér.

16.6. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben.*

16.7. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M, d) metrikus tér. Ekkor $(C^{\mathrm{b}}(M, V), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér.*

16.8. Tétel. *Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

16.9. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T,V)$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysorra*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

16.10. Tétel. *(Dini-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan, a $C(M,\mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ teljesül. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon és a $\lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.*

16.11. Tétel. *Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : A \to V$ olyan függvény, mely egyenletesen konvergál az $f : A \to V$ függvényhez, valamint legyen $a \in M$ olyan pont, mely torlódási pontja az A halmaznak. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim_a f_n$ határérték, akkor a $\lim_a f$ határérték is létezik, valamint*

$$\lim_a f = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_a f_n\right)$$

teljesül.

16.12. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. *Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.*
2. *Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.*
3. *Ha $r \in [0, R_a[$, akkor*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$
4. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*
5. *Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.*

16.13. Tétel. *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n < \infty$ és $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ teljesül.*

16.14. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,z]$ szakaszon és a $P_a|_{[0,z]}$ függvény folytonos.*

16.15. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathscr{L}(V,V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a*

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

16.16. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.*

1. *Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol*

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. *Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \tag{16.1}$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \dfrac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$\text{ha} \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & \text{ha} \quad i = j; \\ 1, & \text{ha} \quad j - i = 1, \end{cases} \qquad \text{akkor} \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i > j; \\ \dfrac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & \text{ha} \quad i \le j. \end{cases}$$

3. *Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.*

16.17. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \right) = 0.$$

16.18. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak.*

16.19. Tétel. *Legyen T halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \dots, f_n \in A$, akkor*

$$\sup\{f_1, \dots, f_n\}, \inf\{f_i, \dots, f_n\} \in A$$

teljesül.

16.20. Tétel. *(Stone-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M,\mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.21. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus-tér és $A \subseteq C(M,\mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Ekkor A sűrű a $(C(M,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.22. Tétel. *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(M,\mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\overline{f} \in A$. Ekkor A sűrű a $(C(M,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

16.23. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K,\mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

17. Differenciálszámítás

17.1. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathscr{L}(U,V)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

17.2. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \mathscr{L}(U,V)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \Big(\|x-a\| < \delta \ \to \ \|f(x)-f(a)-A(x-a)\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big)$$

teljesül.

17.3. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

17.4. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

17.5. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$;*
4. *ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{\varphi}$ differenciálható az a pontban és*

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \frac{\varphi(a)(\mathrm{D}f)(a) - f(a)(\mathrm{D}\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}.$$

17.6. Tétel. *Legyen U és V normált tér és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A, V)$ vektortér.*

17.7. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen U, V és W normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

17.8. Tétel. *Legyen U és V normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

17.9. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $a \in U$, $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ és $\beta : U \to V$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha\beta : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(\beta(u))$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))\beta(a) + \alpha(a)((\mathrm{D}\beta)(a)(u))$$

leképezés.

17.10. Tétel. *Legyen U, V és W normált tér, $v \in V$, $a \in U$ és $\alpha : U \to \mathscr{L}(V, W)$ az a pontban differenciálható függvény. Ekkor az*

$$\alpha v : U \to W \qquad u \mapsto (\alpha(u))(v)$$

függvény deriváltja az a pontban a

$$\tau : U \to V \qquad u \mapsto ((\mathrm{D}\alpha)(a)(u))v$$

leképezés.

17.11. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $W \subseteq V$ zárt lineáris altér, $a \in U$ és $f : U \to W$ olyan függvény, mely differenciálható az a pontban. Ekkor $\operatorname{Ran}((\mathrm{D}f)(a)) \subseteq W$, vagyis a $(\mathrm{D}f)(a)$ derivált $U \to W$ lineáris leképezésnek is tekinthető.*

17.12. Tétel. *Legyen U normált tér, $c \in U$ és*

$$L_c : U \to U \qquad x \mapsto x - c.$$

Ekkor L_c minden pontban differenciálható és

$$\mathrm{D}L_c : U \to \mathscr{L}(U, U) \qquad a \mapsto \mathrm{id}_U$$

teljesül.

17.13. Tétel. *Legyen U és V normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U, V)$. Ekkor A minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathscr{L}(U, V) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

17.14. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\rho : U \to V \qquad x \mapsto A(x, \ldots, x),$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\rho : U \to \mathscr{L}(U, V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a, \ldots, a))$$

teljesül.

17.15. Tétel. *Legyen U, V normált tér, $c \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n, V)$ szimmetrikus n-lineáris leképezés. A*

$$\eta : U \to V \qquad x \mapsto A\,(x-c, \ldots, x-c)\,,$$

függvény deriváltjára

$$\mathrm{D}\eta : U \to \mathscr{L}(U, V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x, a-c, \ldots, a-c))$$

teljesül.

17.16. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V, V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A, A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}\right)$$

teljesül.

17.17. Tétel. *Legyen V Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V, V)$ és*

$$G(A) = \left\{a \in \mathscr{L}(V, V) |\ \exists a^{-1},\ a^{-1} \in \mathscr{L}(V, V)\right\}.$$

Az inverzképzés $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor

$$\mathrm{D}i : G(A) \to \mathscr{L}(A, A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}\right)$$

teljesül.

17.18. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, U normált tér, $f : U \to \prod_{i=1}^{n} V_i$ és $a \in U$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén az $\mathrm{pr}_i \circ f : U \to V_i$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül.

17.19. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ és $a \in U_k$. Ekkor*

$$(\mathrm{D}\,\mathrm{in}_{u,k})(a) = \mathrm{in}_{0,k}$$

teljesül.

17.20. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, V normált tér és $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban. Ekkor minden $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ vektorra*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_i)$$

teljesül.

17.21. Tétel. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(U_i)_{i=1,\ldots,m}$ és $(V_j)_{j=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere és $f : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ pontban. Minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen*

$$A_{ji} = (\partial_i f_j)(a),$$

ahol $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, *valamint értelmezzük az*

$$A : \prod_{i=1}^{m} U_i \to \prod_{j=1}^{n} V_j \qquad (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} A_{ni} x_i \right)$$

leképezést. Ekkor $(\mathrm{D}f)(a) = A$ *teljesül, vagyis minden* $x = (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} U_i$ *vektorra és* $j \in \{1, \dots, n\}$ *indexre*

$$((\mathrm{D}f)(a)x)_j = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f_j)(a) x_i.$$

17.22. Tétel. *Legyen* U *normált tér,* $a, b \in U$ *és legyen* $f : U \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, mely folytonos az* $[a, b]$ *szakaszon és differenciálható az* $]a, b[$ *halmazon. Ekkor létezik olyan* $c \in]a, b[$*, melyre*

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$$

teljesül.

17.23. Tétel. *Legyen* V *normált tér és legyen* $f : [0, 1] \to V$ *és* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvény, mely differenciálható a* $]0, 1[$ *halmazon, továbbá minden* $t \in]0, 1[$ *elemre* $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq g'(t)$ *teljesül. Ekkor*

$$\|f(1) - f(0)\| \leq g(1) - g(0).$$

17.24. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Legyen* U *és* V *normált tér,* $f : U \to V$*. Továbbá legyen* $a, b \in U$*,* $a \neq b$*, olyan pont, melyre* $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}\, f$*,* f *folytonos az* $[a, b]$ *halmazon és* f *differenciálható az* $]a, b[$ *intervallumon. Ekkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in]a, b[} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \right) \cdot \|b - a\| .$$

17.25. Tétel. *Legyen* U *és* V *normált tér,* $A \subseteq U$ *összefüggő nyílt halmaz és* $f : A \to V$ *differenciálható függvény. Ha minden* $a \in A$ *esetén* $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ *teljesül, akkor az* f *függvény állandó.*

17.26. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$*,* $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ *normált terek rendszere,* V *normált tér és* $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ *függvény. Tegyük fel, hogy* $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Int}\,\mathrm{Dom}(\partial_i f)$ *olyan pont, hogy minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *esetén a* $\partial_i f$ *függvény folytonos az* a *pontban. Legyen*

$$A : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} ((\partial_i f)(a))(x_i).$$

Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *számhoz létezik olyan* $\delta \in \mathbb{R}^+$*, hogy minden* $x, y \in B_\delta(a)$ *esetén*

$$\|f(x) - f(y) - A(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

teljesül, f *differenciálható az* a *pontban és* $(\mathrm{D}f)(a) = A$*.*

17.27. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$*,* $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ *normált terek rendszere,* V *normált tér, legyen* $f : \prod_{i=1}^{n} U_i \to V$ *függvény, és legyen* $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ *nyílt halmaz. Ekkor az* f *függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az* Ω *halmazon, ha minden* $i \in \{1, \dots, n\}$ *indexre* $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, \partial_i f$ *és a* $\partial_i f$ *függvény folytonos az* Ω *halmazon.*

17.28. Tétel. *Legyen* U *normált tér,* V *Banach-tér,* $r \in \mathbb{R}^+$*,* $a \in U$*, valamint minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $f_n : B_r(a) \to V$ *differenciálható függvény. Ha létezik a* $\lim_{n \to \infty} f_n(a)$ *határérték és a* $(\mathrm{D}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergens a* $B_r(a)$ *halmazon, akkor*

1. *minden* $x \in B_r(a)$ *esetén létezik a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *határérték;*
2. *az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergál az* $f : B_r(a) \to V$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *függvényhez.*

17.29. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen* U *normált tér,* V *Banach-tér,* $\Omega \subseteq U$ *összefüggő nyílt halmaz, valamint minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $f_n : \Omega \to V$ *differenciálható függvény. Ha a* $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az* Ω *halmazon és létezik olyan* $x_0 \in \Omega$ *pont, melyre létezik a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ *határérték, akkor*

1. *minden* $x \in \Omega$ *esetén létezik a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *határérték;*
2. *az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az* $f : \Omega \to V$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *függvényhez;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$ *teljesül.*

17.30. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen* U *normált tér,* V *Banach-tér,* $\Omega \subseteq U$ *összefüggő nyílt halmaz, valamint minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $f_n : \Omega \to V$ *differenciálható függvény. Ha a* $\sum_n (\mathrm{D}f_n)$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az* Ω *halmazon és létezik olyan* $x_0 \in \Omega$ *pont, melyre létezik a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ *összeg, akkor*

1. *minden* $x \in \Omega$ *esetén létezik a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *összeg;*
2. *a* $\sum_n f_n$ *függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az* $f : \Omega \to V$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvényhez;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$ *teljesül.*

17.31. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen* U *és* V *Banach-tér,* $f : U \twoheadrightarrow V$ *tetszőleges függvény és* $a \in U$. *Ha* $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ *folytonos az a pontban és* $(\mathrm{D}f)(a) \in \mathscr{L}(U,V)$ *homeomorfizmus, akkor létezik olyan* $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ *nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. $f|_\Omega$ *injektív;*
2. $f(\Omega)$ *nyílt halmaz;*
3. $f|_\Omega$ *homeomorfizmus* Ω *és* $f(\Omega)$ *között;*
4. *az* $(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény differenciálható;*
5. *minden* $x \in \Omega$ *pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a* $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ *függvény folytonos az* $f(a)$ *pontban.*

17.32. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen* U_1, U_2 *és* V *Banach-tér,* $f : U_1 \times U_2 \twoheadrightarrow V$ *tetszőleges függvény. Ha* $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ *folytonos az* (a_1, a_2) *pontban és a* $(\partial_2 f)(a_1, a_2) \in \mathscr{L}(U_2, V)$ *leképezés homeomorfizmus, akkor létezik olyan* Ω_1, Ω_2 *nyílt környezete az* a_1, a_2 *pontnak, melyre*

1. $\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$*;*
2. *létezik egyetlen olyan* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *differenciálható függvény, melyre minden* $x \in \Omega_1$ *esetén*
$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$
teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ *folytonos az* a_1 *pontban.*

17.33. Tétel. *(Young-tétel.) Legyen* U *és* V *normált tér,* $f : U \to V$ *tetszőleges függvény,* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $a \in \operatorname{Dom}\mathrm{D}^{(n)}f$. *Ekkor* $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a) \in \mathscr{L}_s{}^n(U^n, V)$, *azaz* $(\mathrm{D}^{(n)}f)(a)$ *szimmetrikus multilineáris leképezés.*

17.34. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.) Legyen U normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in U$ és $f : U \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^{(k)} f)(a))(b-a)^{[k]} + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{D}^{(n+1)} f)(\xi)(b-a)^{[n+1]}.$$

17.35. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in U$ és $f : U \to V$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left\| f(b) - T^f_{n,a}(b) \right\| \leq \left(\sup_{x \in]a,b[} \left\| (\mathrm{D}^{(n+1)} f)(x) \right\| \right) \cdot \frac{\|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17.36. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen U és V normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen az $f : U \to V$ függvény n-szer differenciálható az $a \in U$ pontban. Ekkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

17.37. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D} f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D} f)(a) = 0$.*

17.38. Tétel. *Legyen U normált tér, $f : U \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in U$ és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(n)} f)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a) \neq 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor n páros és a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés szigorúan negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*
5. *Ha a $(\mathrm{D}^{(n)} f)(a)$ multilineáris leképezés indefinit, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*
6. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke az a pontban.*

17.39. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az f függvény konvex.*
2. *Minden $x, y \in \Omega$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D} f)(x))(y-x) \leq f(y).$$
3. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)} f)(x)$ pozitív.*

17.40. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az f függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D} f)(x))(y-x) < f(y)$$
2. *Minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}^{(2)} f)(x)$ pozitív definit, akkor f szigorúan konvex.*

18. Fourier-sorok

18.1. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel* $\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *algebrát alkot.*
2. *Minden* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *polinom esetén* $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. *Minden* $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén a* $t \mapsto f(t + x)$ *függvény is trigonometrikus polinom.*

18.2. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.) Minden* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *függvényhez és minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz létezik olyan* $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, melyre* $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ *teljesül.*

18.3. Tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ *olyan, hogy* $0 \neq k \neq l \neq m$. *Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

18.4. Tétel. *Legyen* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f *határfüggvényhez a* $[-\pi, \pi]$ *intervallumon. Ekkor minden* $k \in \mathbb{N}^+$ *esetén*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

18.5. Tétel. *A* $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *vektortéren tekintsük a*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*
$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.
3. *A*
$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.

18.6. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *és* $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π *szerint periodikus függvény. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén a Fourier-együtthatókra*

$$a_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\,t$$

$$b_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\,t$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}\right|$ *jelölés mellett minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *számra*

$$|a_n| \le \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \le \frac{D_k}{n^k}.$$

18.7. Tétel. *Minden* $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π *szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergál az* f *függvényhez.*

18.8. Tétel. *(Riemann–Lebesgue-lemma.) Minden* $f \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *függvényre*

$$\lim_{a\to\pm\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(at)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{a\to\pm\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(at)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

18.9. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1+2n, & \text{ha } \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

teljesül.

18.10. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén a* D_n *függvény folytonos, valamint* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 2\pi$.

18.11. Tétel. *(Konvolúció a Dirichlet-féle magfüggvénnyel.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan* 2π *szerint periodikus függvény, melyre* $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *teljesül. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)\,\mathrm{d}\,y. \tag{18.1}$$

18.12. Tétel. *(Dirichlet-féle lokalizációs tétel.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan* 2π *szerint periodikus függvény, melyre* $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *teljesül, továbbá legyen* $x_0, A \in \mathbb{R}$ *olyan paraméter, melyre a*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2A}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[-\pi,\pi]$ *intervallumon. Ekkor az* f *függvény Fourier-sora konvergens a* x_0 *pontban és a sor összege* A*; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0) + b_k\sin(kx_0) = A.$$

18.13. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 1. következménye.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan* 2π *szerint periodikus függvény, melyre* $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0,2\pi],\mathbb{R})$*, és legyen* $x_0 \in \mathbb{R}$ *olyan pont, hogy* f *differenciálható az* x_0 *pontban. Ekkor az* f *függvény Fourier-sora konvergens a* x_0 *pontban és a sor összege* $f(x_0)$*; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx_0) + b_k\sin(kx_0) = f(x_0).$$

18.14. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 2. következménye.) Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π *szerint periodikus, differenciálható függvény. Ekkor az* f *függvény Fourier-sora konvergens minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban, és ott a sor összege* $f(x)$*; azaz*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = f(x).$$

18.15. Tétel. *(A Dirichlet-féle lokalizációs tétel 3. következménye.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ teljesül, valamint legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik a $\lim_{x_0\pm} f$ határérték. Ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a*

$$\varphi_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + x) - \left(\lim\limits_{x_0+} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_- : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - x) - \left(\lim\limits_{x_0-} f\right)}{x}, & ha \quad x \neq 0; \\ 0, & ha \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény integrálható a $[0, r]$ intervallumon, akkor az f függvény Fourier-sora konvergens az x_0 pontban és a sor összege $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x_0+} f + \lim\limits_{x_0-} f\right)$; azaz

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_0+} f + \lim_{x_0-} f\right).$$

18.16. Tétel. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

18.17. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}; \\ 1 + n, & ha \quad \dfrac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

teljesül.

18.18. Tétel. *(A Fejér-féle magfüggvény tulajdonságai.)*

1. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $F_n(x) \geq 0$.*
3. *Minden $\delta \in \,]0, \pi[$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

18.19. Tétel. *(Konvolúció a Fejér-féle magfüggvénnyel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)F_n(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{18.2}$$

teljesül.

18.20. Tétel. *(A Fejér-tétel.) Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n(x).$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-\sigma_n(x)|=0.$$

19. Komplex függvénytan

19.1. Tétel. *Legyen $f:\mathbb{C}\twoheadrightarrow\mathbb{C}$ függvény és $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$. Tekintsük az f által meghatározott*

$$\begin{aligned} u:\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}\qquad &(x,y)\mapsto\operatorname{Re}f(x+\mathrm{i}\,y)\\ v:\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}\qquad &(x,y)\mapsto\operatorname{Im}f(x+\mathrm{i}\,y)\end{aligned}$$

függvényeket. Azaz minden $x,y\in\mathbb{R}$ számra $x+\mathrm{i}\,y\in\operatorname{Dom}f$ esetén

$$f(x+\mathrm{i}\,y)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$$

teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. *Az f függvény holomorf az a pontban.*
2. *Létezik olyan $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, melyre*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}=0.$$

3. *Az u és a v függvény differenciálható az a pontban, valamint*

$$\begin{aligned}(\partial_1u)(a)&=(\partial_2v)(a)\\(\partial_2u)(a)&=-(\partial_1v)(a)\end{aligned}$$

teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor

$$f'(a)=A(1)=(\partial_1u)(a)+\mathrm{i}(\partial_1v)(a).$$

19.2. Tétel. *Legyen $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $a\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f\cap\operatorname{Int}\operatorname{Dom}g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$;*
2. *minden $c\in\mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a)=cf'(a)$;*
3. *fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$;*
4. *ha $g(a)\neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

19.3. Tétel. *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a>0$ teljesüljön. Legyen*

$$a':\mathbb{N}\to\mathbb{R}\quad n\mapsto(n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a, a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)'=P_{a'}$ teljesül.

19.4. Tétel. *Legyen $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma\in\Gamma^e$ és $f:\mathbb{C}\twoheadrightarrow\mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Ran}\gamma\subseteq\operatorname{Dom}f$. Ekkor*

$$\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma^\circ(t))\dot{\gamma^\circ}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

teljesül.

19.5. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

19.6. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} g$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f + g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \qquad \displaystyle\int_\gamma (\lambda f) = \lambda \int_\gamma f$
3. *Legyen $\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b + a - t)$, ekkor* $\displaystyle\int_\delta f = -\int_\gamma f$.
4. $\displaystyle\left| \int_\gamma f \right| \leq L(\gamma) \sup_{x \in \operatorname{Ran} \gamma} |f(x)|$

19.7. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f$.
2. $\displaystyle\left| \int_\gamma f \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
3. *Minden $c \in [a, b]$ pontra* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

19.8. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

19.9. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.10. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az*

$$F : U \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

19.11. Tétel. *(Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén* $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0$.

19.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.*

19.13. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f fügvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.14. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 0, & \textit{ha} \quad n \neq -1; \\ 2\pi\,\mathrm{i}\,m, & \textit{ha} \quad n = -1. \end{cases}$$

19.15. Tétel. *Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = r\}$ esetén*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \textit{ha} \quad |z| > r; \\ m, & \textit{ha} \quad |z| < r. \end{cases}$$

19.16. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\operatorname{Ran} \operatorname{Ind}_\gamma \subseteq \mathbb{Z}$
2. *Az $\operatorname{Ind}_\gamma$ függvény folytonos.*
3. *Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$.*

19.17. Tétel. *(Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\operatorname{Dom} f$ halmazban, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

19.18. Tétel. *(Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

19.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\operatorname{Dom} f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén*

$$\oint_\gamma f = 0$$

teljesül.

19.20. Tétel. *(Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \operatorname{Ran} \gamma$ pontra*

$$f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f}{\operatorname{id} - z}.$$

19.21. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\operatorname{id} - z}.$$

19.22. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. *A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a $\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran}\gamma)$ számnál.*
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\operatorname{dist}(a,\operatorname{Ran}\gamma)}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*
$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} .$$

19.23. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.*

1. *Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a*
$$r_a = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\}$$
számnál.
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$, $r \in \,]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} .$$

19.24. Tétel. *(Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.*
- *Létezik a $\lim\limits_a f$ határérték.*
- *Létezik olyan $\rho \in \,]0, r[$, hogy az $f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)$ halmaz korlátos.*
- $\lim\limits_{z \to a} f(z)(z - a) = 0$

19.25. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

19.26. Tétel. *(Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Az f függvény holomorf.*
- *Minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ esetén $\int_\gamma f = 0$ teljesül.*
- *Minden $a, b, c \in \operatorname{Dom} f$ esetén, ha $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

19.27. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra*
$$\left| f^{(n)}(z) \right| \le \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$
teljesül.

19.28. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*
$$\left| f^{(n)}(a) \right| \le \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$
teljesül.

19.29. Tétel. *(Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n-ed fokú polinom.*

19.30. Tétel. *(Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.*

19.31. Tétel. *(Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.*

19.32. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f |\ f(z) = 0\}$.*

1. *Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.*
2. *Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ számra $f(z) = (z-a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.*
3. *Az N_f halmaz megszámlálható.*

19.33. Tétel. *(Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha a $T = \{x \in U |\ f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.*

19.34. Tétel. *(Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \textit{és} \qquad \sum_{-n\in\mathbb{N}^+} c_{-n}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \ .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) c_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} \ .$$

19.35. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m-ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor*

$$\operatorname{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} ((z-a)^m f(z)) \right) \ .$$

19.36. Tétel. *(Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}_f(a) \ .$$

19.37. Tétel. *(Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a\in P_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) r_f(a) \ .$$

19.38. Tétel. *(Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor*

$$\sum_{a\in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a\in N_{f+g}} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a)\ .$$

19.39. Tétel. *(Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is egyszeresen összefüggő és nyílt.*

19.40. Tétel. *(Lokális maximum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén, az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.*

19.41. Tétel. *(Lokális minimum elve.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem állandó holomorf függvény. Ekkor minden $a \in U$ esetén az $|f|$ függvénynek nincs lokális minimuma az a pontban.*

19.42. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ korlátos nyílt halmaz és $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely holomorf az U halmazon. Ekkor*

$$\sup_{x\in\overline{U}} |f(x)| = \max_{x\in \operatorname{Fr} U} |f(x)|\,,$$

ahol $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, az U halmaz határa.

19.43. Tétel. *(Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \le C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$|f(z) - f(a)| \le C\frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \le \dfrac{C}{r}$.

19.44. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen $r(a) = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \middle|\ \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f\right\}$ és az f függvény a pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*

1. *Ekkor minden $r \in \,]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \le \dfrac{1}{r^n} \cdot \displaystyle\sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
3. *Az f függvénynek pontosan akkor van m-ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in \,]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\dfrac{C_1}{|z-a|^m} \le |f(z)| \le \dfrac{C_2}{|z-a|^m}$.*
4. *Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in \,]0, r(a)[$ esetén $\dfrac{C_k}{r^k} \le \displaystyle\sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*

19.45. Tétel. *(Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in \,]0, r[$ esetén $\overline{f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)} = \mathbb{C}$.*

19.46. Tétel. *(Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}$.*

19.47. Tétel. *(Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.*

19.48. Tétel. *Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \geq 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, \mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in\,]0, 2\pi[\, : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x)\, \mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x)\, \mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in\,]-1, 1[\, : \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha\, \mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a\right)$$

19.49. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf fggvény, hogy*

1. *az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;*
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$;
3. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$,

akkor $f = g$.

19.50. Tétel.

1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $\qquad \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right)$: $\qquad \dfrac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $\qquad \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{1}{\pi z} + \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right)$: $\qquad \operatorname{tg}(\pi z) = \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$