BME Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Andai Attila

Bevezető analízispéldák

példatár néhány BSc-s órához

2019

Tartalomjegyzék

Előszó

A feladatok a Matematika A1, -A2, -A3; Informatikusok analízis 1, -2; Matematikusok analízis 1 és 2 órákhoz tartozó gyakorlatokról származnak nagyrészt. A haladóbb szintű példákat $\boxed{H}$, a fizikai alkalmazáshoz kapcsolódó példákat $\boxed{F}$, a matematikai tételek bizonyítását tartalmazó példákat pedig $\boxed{E}$ jelzi.

Külön köszönöm Dr. Tóth Jánosnak a példatár gondos átnézést, így jelen formájában kevesebb hibát és elírást tartalmaz.

Örömmel fogadom a példatárral kapcsolatos megjegyzéseket az *andaia@math.bme.hu* email címre.

1. Halmazalgebra

I. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
6. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
7. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
8. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
9. $(A \times B) \cup (C \times D) = \big(A \times (B \setminus D)\big) \cup \big((A \setminus C) \times (B \cap D)\big) \cup (C \times D)$

II. Legyen A, B és C halmaz. Az alább definiálandó X és Y halmazra teljesül-e az $X \subseteq Y$ vagy az $Y \subseteq X$ tartalmazás?

1. $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
2. $X = A \setminus C$, $Y = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
3. $X = A \setminus (B \setminus C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

III. Bizonyítsuk a halmazrendszerekre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \bigcap B_j)$
2. $\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \bigcup B_j)$
3. $A \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i)$
4. $A \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i)$

IV. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_n halmaz.

1. Mutassuk meg, hogy a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek legfeljebb véges számú kivétellel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.
2. Mutassuk meg, hogy a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.

2. Teljes indukció

I. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

II. Teljes indukcióval igazoljuk az alábbiakat.

1. Legyen $a_1, d \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlettel megadott számtani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)$$

teljesül.

2. Legyen $a_1 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, és tekintsük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képlettel megadott mértani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

3^{**}. Igazoljuk, hogy minden $p \in \mathbb{N}$ és $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ természetes számra

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (i-j)^p \binom{n+p-i+1}{n-i}\binom{p+1}{j}$$

teljesül.

III. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $x > -1$ valós szám, és $x \neq 0$ valamint $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, akkor $(1+x)^n > 1 + nx$ teljesül.
2. Ha $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, akkor
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
3. Ha $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, akkor
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$
4. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós szám, ahol $n \neq 0$. Igazoljuk a harmonikus, mértani és számtani közép közötti
$$\min_{1\le k\le n} a_k \le n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right)^{-1} \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \max_{1\le k\le n} a_k$$
egyenlőtlenséget.
5. Minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$.

IV. Binomiális kifejtés.

1. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, ahol $k < n$. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós és n természetes számra
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós és n természetes számra
$$(a+b+c)^n = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} a^{k_1} b^{k_2} c^{n-k_1-k_2}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d valós számra és n természetes számra
$$(a+b+c+d)^n = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \sum_{k_3=0}^{n-k_1-k_2} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{n-k_1-k_2-k_3}.$$

5. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén teljesülnek az alábbiak.

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$	2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$	4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

3. Relációk, függvények

I. Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció. Bizonyítsuk be a következőket.

1. Az R reláció pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.
2. Az R reláció pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.
3. Az R reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.
4. Az R reláció pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_X$.
5. Pontosan akkor teljesül, hogy $R^{-1} \circ R = \emptyset$, ha $R = \emptyset$.

II. Az alábbi relációk közül melyik reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, szimmetrikus, rendezés, illetve ekvivalenciareláció? Az ekvivalenciarelációknál adjuk meg az ekvivalenciaosztályokat és a faktorhalmazokat.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ xy = 1\}$
3. $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 |\ \exists c \in \mathbb{R}((x_1 - x_2 = 2c) \wedge (y_1 - y_2 = 3c))\}$

III. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

1. Ha A halmaz, és $\{x, y\} \in A$, akkor $x, y \in \cup A$.
2. Ha A halmaz, és $(x, y) \in A$, akkor $x, y \in \cup \cup A$.
3. Ha f függvény, akkor $\mathrm{Ran}\, f, \mathrm{Dom}\, f \in \mathcal{P}(\cup \cup f)$.
4. Ha $f : A \to B$ függvény, akkor $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$.

IV. Legyen f függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor injektív, ha $\overset{-1}{f}$ függvény.

V. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Mutassuk meg a Descartes-szorzat definíciója alapján, hogy

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

nem minden esetben teljesül.

VI. Mutassuk meg, hogy a relációk kompozíciója asszociatív művelet. Vagyis minden $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$ és $R_3 \subseteq Z \times V$ relációra

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

teljesül.

VII. Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden függvénynek létezik jobbinverze. Azaz minden f függvényhez létezik olyan $g : \operatorname{Ran} f \to \operatorname{Dom} f$ függvény, hogy $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} f}$.

VIII. Legyen $(A_i)_I$ olyan halmazrendszer, melynek minden A_i halmaza egyelemű. Vagyis

$$\forall i \in I\,((\exists x(x \in A_i)) \wedge (\forall x, y\,((x \in A_i \wedge y \in A_i) \to x = y)))\,.$$

A kiválasztási axiómára való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

IX. Legyen A és B tetszőleges halmaz, és legyen $H \subseteq \mathcal{F}(A, B)$ olyan részhalmaza az A halmazból B halmazba képező függvények halmazának, melyre teljesül, hogy minden $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 \subseteq h_2$ vagy $h_2 \subseteq h_1$.

1. Mutassuk meg, hogy $f = \bigcup H$ függvény.
2. Mutassuk meg, hogy ha minden $h \in H$ függvény injektív, akkor az $f = \bigcup H$ függvény is injektív.

X. Legyen E tetszőleges halmaz, és $A, B \subseteq E$. Mutassuk meg, hogy minden $x \in E$ elemre

1. $\chi_{E \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cap B}(x) + \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

teljesül, ahol tetszőleges $Z \subseteq E$ halmaz esetén

$$\chi_Z : E \to \{0, 1\} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin Z, \\ 1, & \text{ha} \quad x \in Z. \end{cases}$$

XI. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz létezik egyetlen olyan $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, melyre $n = \dfrac{k(k+1)}{2} + j$ és $j \leq k$ teljesül. Ennek a segítségével adjunk meg egy $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekciót.

XII. $\boxed{H}$ Legyen E, F, G és H tetszőleges halmaz, valamint $f : E \to F$, $g : F \to G$ és $h : G \to H$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy ha $g \circ f$ és $h \circ g$ bijekció, akkor f, g és h is bijekció.

XIII. $\boxed{H}$ Legyen $S = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, vagyis S az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$C : S \to S \qquad s \mapsto \left(n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s(k)\right)$$

$$T : S \to S \qquad s \mapsto (n \mapsto (-1)^n s(n))$$

1. Mutassuk meg, hogy
$$C \circ T \circ C \circ T = \mathrm{id}_S$$
teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $C \circ T$ bijekció.
3. Mutassuk meg, hogy C is bijekció, és $C^{-1} = T \circ C \circ T$.

XIV. $\boxed{H}$ Minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $N(n, k)$ azt a számot ahány módon lehet egy n elemű halmaz elemeit k darab osztályba sorolni. Mutassuk meg, hogy
1. $S(n, k)$ megegyezik az $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ szürjektív függvények számával;
2. $S(0, 0) = 1$, továbbá $0 < n$ esetén $S(n, 0) = 0$, $S(n, 1) = 1$, $S(n, n) = 1$;
3. a $k > n$ esetben $S(n, k) = 0$;
4. a $1 < k \leq n$ esetben
$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1);$$
5. a $1 < k \leq n$ esetben
$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$
teljesül.

Az $S(n, k)$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük.

XV. $\boxed{H}$ Mutassuk meg, hogy egy háromelemű halmazon
1. a relációk száma 512;
2. a reflexív relációk száma 64;
3. a szimmetrikus relációk száma 64;
4. az antiszimmetrikus relációk száma 216;
5. a tranzitív relációk száma 171;
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma 8;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma 27;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma 29;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 8;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma 15;
11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 152;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma 5;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 19;
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 8;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

XVI. $\boxed{H}$ Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmazon
1. a relációk száma $2^{(n^2)}$;
2. a reflexív relációk száma $2^{n(n-1)}$;
3. a szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
4. az antiszimmetrikus relációk száma $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
5. a tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;

6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 2^n;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma

$$\theta(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T(k),$$

ahol $T(k)$ a 13. alfeladatban van definiálva;
11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma T_n, ahol az T_n sorozatot a $T_0 = 1$, $T_1 = 1$ kezdeti értékekkel és $n \geq 2$ esetén a

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T_k$$

rekurzióval definiálhatjuk;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma a szerző ismerete szerint még megoldatlan probléma;
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 2^n;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

4. Számosságok

I. Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.
2. $|A \times B| = mn$
3. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
4. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
5. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

II. Mutassuk meg, hogy bármely végtelen A halmazra és bármely legfeljebb megszámlálható számosságú B halmazra $|A \cup B| = |A|$ teljesül.

III. $\boxed{H}$ Legyen A végtelen halmaz, és legyen $B \subseteq A$ olyan részhalmaza, melyre $|B| < |A|$ és $|B| = |B \times B|$. Mutassuk meg, hogy $|B| < |A \setminus B|$.

IV. Igazoljuk, hogy kontinuum sok, kontinuum számosságú halmaz egyesítése kontinuum számosságú. (Használjuk fel, hogy $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.)

V. $\boxed{H}$ Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy E véges részhalmazainak a halmaza azonos számosságú az E halmazzal, azaz

$$\left| \left\{ A \subseteq E \;\middle|\; |A| < |\mathbb{N}| \right\} \right| = |E|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

VI. $\boxed{H}$ Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy az E halaz E-vel ekvipotens (azonos számosságú) részhalmazainak a halmaza ekvipotens E hatványhalmazával, azaz

$$\left|\{A \subseteq E \;\middle|\; |A| = |E|\}\right| = |\mathcal{P}(E)|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

VII. $\boxed{H}$ Igazoljuk, hogy az E halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : E \to E$ függvényhez létezik nem triviális ($A \neq \emptyset, A \neq E$) $A \subseteq E$ invariáns ($f(A) \subseteq A$) halmaz!

5. A valós számok elemi tulajdonságai

I. $\boxed{E}$ (*Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $x_1, \ldots x_n \in \left]-1, \infty\right[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$, akkor

$$1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i),$$

teljesül, speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

II. $\boxed{E}$ Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 < x \in \mathbb{R}$.

1. Mutassuk meg, hogy az
$$H = \{z \in \mathbb{R} |\; 0 \leq z, z^n \leq x\}$$
halmaz nem üres és felülről korlátos.
2. Legyen $y = \sup H$. Mutassuk meg, hogy az $y \in \mathbb{R}$ számra $y^n = x$ teljesül.
3. Igazoljuk, hogy ha $z \in \mathbb{R}$, $0 < z$ és $z \neq y$, akkor $z^n \neq x$.

III. $\boxed{E}$ Bizonyítsuk be, hogy ha az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor $\inf A \in \overline{A}$, illetve, ha felülről korlátos, akkor $\sup A \in \overline{A}$.

IV. $\boxed{H}$ Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Használjuk fel azt a számelméleti tételt, mely szerint minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egyetlen olyan egész értékű $(\mu_p(x))_{p \in \mathbb{P}}$ sorozat és olyan $e \in \{-1, 1\}$ elem, hogy a $\{p \in \mathbb{P} |\; \mu_p(x) \neq 0\}$ halmaz véges, és

$$x = e \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\mu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges prímszám, és definiáljuk az

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} p^{-\mu_p(x)}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Igazoljuk, hogy $|\cdot|_p$ abszolútérték-függvény.

V. $\boxed{H}$ Legyen G zárt, valódi részcsoportja az $(\mathbb{R}, +, 0)$ csoportnak. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre $G = \{na |\; n \in \mathbb{Z}\}$.

VI. $\boxed{H}$ Másodrendű lineáris rekurzió. Legyenek $a, b, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ paraméterek, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$x_{n+2} = ax_n + bx_{n+1}.$$

1. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a > 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0 + \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2+4a}}\right) \cdot \frac{\left(b + \sqrt{b^2+4a}\right)^n}{2^{n+1}} + \left(x_0 - \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{b^2+4a}}\right) \cdot \frac{\left(b - \sqrt{b^2+4a}\right)^n}{2^{n+1}}$$

   teljesül.
2. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a = 0$ és $b \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = \left(x_0(1-n) + \frac{2n}{b}x_1\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^n$$

   teljesül.
3. Igazoljuk, hogy ha $b^2 + 4a < 0$ és $b \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$x_n = (-a)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sgn}(b)^n \cdot \left(x_0 \cos(n\varphi) + \frac{2x_1 - bx_0}{\sqrt{-b^2-4a}} \sin(n\varphi)\right)$$

   teljesül, ahol $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{-b^2-4a}}{b}$.

6. A komplex számok elemi tulajdonságai

I. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a \\
\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto b \\
\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i} \\
|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}
\end{array}$$

Igazoljuk a következőket.

1. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ és $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{i} \operatorname{Im} z$.
2. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ és $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$.
3. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z\bar{z} = |z|^2$.
4. Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számra

$$z \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}\,\mathrm{i}\right) = 1.$$

5. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $|z| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z = 0$.
6. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
7. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
8. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
9. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
10. Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik olyan $v \in \mathbb{C}$ szám, melyre $z = v^2$ teljesül.
11. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

II. Milyen görbéket határoznak meg a komplex számsíkon az alábbi egyenletek?

1. $|z-(1+2\,\mathrm{i})|=3$
2. $z+\bar{z}=z\bar{z}$
3. $|z-1|^2+|z+1|^2=4$

III. Legyen $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ és $w\in\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Teljes indukció segítségével igazoljuk a következőket!

1. $(1-z)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k=1-z^n$
2. $(1-z)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1+z^{(2^k)})=1-z^{(2^n)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(w+k-1)(w+k)}=\frac{n}{w(w+n)}$

IV. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3=\bar{z}$
2. $z^2-5(1+\mathrm{i})z+13\,\mathrm{i}=0$
3. $z^6-9z^3+8=0$
4. $z^8-17z^4+16=0$
5. Ha z egyik négyzetgyöke és z egyik ötödik gyöke egyenlő, akkor z milyen értékeket vehet fel?
6. Ha z egyik köbgyöke és z egyik hetedik gyöke egyenlő, akkor z milyen értékeket vehet fel?

V. $\boxed{E}$ Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan rendezés a komplex számok halmazán, mellyel $\mathbb{C}$ rendezett test lenne.

VI. $\boxed{E}$ Legyen $A\subseteq\mathbb{K}$. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{Int}X&=\{x\in\mathbb{K}|\ \exists r\in\mathbb{R}^+:\ B_r(x)\subseteq X\}\\ \overline{X}&=\{x\in\mathbb{K}|\ \forall r\in\mathbb{R}^+:\ B_r(x)\cap X\neq\emptyset\}.\end{aligned}$$

VII. $\boxed{E}$ Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ halmaz egy részhalmaza pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.

VIII. $\boxed{E}$ Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}+\mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.

IX. $\boxed{E}$ Igazoljuk, hogy minden $r\in\mathbb{R}^+$ és $x\in\mathbb{K}$ esetén

$$\overline{\{z\in\mathbb{K}|\ |x-z|<r\}}=\{z\in\mathbb{K}|\ |x-z|\leq r\}$$

teljesül.

X. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $\ln(\mathrm{e})$
2. $\ln(-3\,\mathrm{i})$
3. $\ln\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)$
4. $\ln(1-\mathrm{i})$
5. $\ln\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$

(Ha $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, ahol $0 < |z|$ és $-\pi \le \varphi < \pi$, akkor $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\varphi$.)

XI. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $2^{2\,\mathrm{i}}$
2. $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}\right)^{2\,\mathrm{i}}$
3. $\mathrm{i}^{2\,\mathrm{i}}$
4. $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{1+\mathrm{i}}$

(Ha $z, v \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $z^v = \mathrm{e}^{v \ln z}$.)

XII. Milyen görbéket határoznak meg a komplex számsíkon az alábbi egyenletek?

1. $|z - (1+2\,\mathrm{i})| = 3$,
2. $z + \bar{z} = z\bar{z}$,
3. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.

XIII. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3 = \bar{z}$
2. $z^2 - 5(1+\mathrm{i})z + 13\,\mathrm{i} = 0$
3. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$
4. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

XIV. Geometriai sor összegképletére visszavezethető feladatok.

1. Minden $n, k \in \mathbb{N}$ számra $n \neq 0, 1$ esetén legyen $z_k = \exp\left(\dfrac{2\pi\,\mathrm{i}\,k}{n}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbi formulák.
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\sin\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}}$$
3. Számoljuk ki $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(1+\mathrm{i})^k$ értékét algebrai alakban.

XV. Komplex számokkal jól kezelhető geometria feladatok.

1. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyre az u, v, z pontok egyenlő oldalú háromszöget adnak meg. (Az $u = 2 + \mathrm{i}$ és a $v = -1 + 3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
2. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyek az u és v csúcsponttal rendelkező négyzet középpontjai. (Az $u = 2+\mathrm{i}$ és a $v = -1+3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
3. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög minden oldalára kifelé olyan szabályos háromszöget rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti háromszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új háromszögek középpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.
4. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög minden oldalára kifelé olyan négyzetet rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti négyszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új átellenes négyzetek középpontjai összekötő szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő a hosszuk.

5. Tekintsük komplex számsíkon az alábbi transzformációkat.
   $R(\varphi)$: φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) szöggel való elforgatás az origó körül pozitív irányba.
   $L(v)$: v ($v \in \mathbb{C}$) vektorral való eltolás.
   $M(\lambda)$: λ-val ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) való nyújtás.
   Mely egyenletek teljesülnek az alábbiak közül minden $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén?
   $$R(\varphi)L(v) = L(v)R(\varphi) \quad R(\varphi)M(\lambda) = M(\lambda)R(\varphi) \quad M(\lambda)L(v) = L(v)M(\lambda)$$
   Hogyan írhatjuk le egyszerűbben az alábbi transzformációkat?
   $$R(-\varphi)L(-v)R(\varphi)L(v) \qquad M\left(\frac{1}{\lambda}\right)L(-v)M(\lambda)L(v) \qquad L(-v\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi})R(-\varphi)L(v)R(\varphi)$$

7. Sorozatok

I. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen.
1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tetszőleges sorozat. Mutassuk meg, hogy az a sorozat pontosan akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} a$ és az $\operatorname{Im} a$ sorozat konvergens. Továbbá ekkor
$$\lim a = \lim \operatorname{Re} a + \mathrm{i} \lim \operatorname{Im} a.$$

III. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges konvergens sorozat. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén
1. a $\{n \in \mathbb{N} \mid \; |a_n - \lim a| < \varepsilon\}$ halmaz végtelen;
2. a $\{n \in \mathbb{N} \mid \; |a_n - \lim a| > \varepsilon\}$ halmaz véges.

IV. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan konvergens sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim a \leq \lim b$.

V. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}$ 2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$ 3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ 5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-n^2 + 3\sqrt{n} - 9\right)$ 6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$

VI. Legyen $k, l \in \mathbb{N}$ és legyen $(a_i)_{i \in k+1}$ és $(b_j)_{j \in l+1}$ valós számok egy-egy rendszere. Keressük meg a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$
határértéket.

VII. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.
1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+3}-\sqrt{n^2+an+1}\right) \qquad (a\in\mathbb{R})$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+n^5}-\sqrt[3]{n^6-n^5}\right)$

VIII. Mutassuk meg, hogy adott $q\in\mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad q>1,\\ 1 & \text{ha} \quad q=1,\\ 0 & \text{ha} \quad -1<q<1, \end{cases}$$

és $q\le -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

IX. Igazoljuk, az alábbi határértékeket.

1. Minden $q\in\mathbb{R}^+$ számra $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{q}=1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$
4. Minden $q\in\mathbb{C}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{n!}=0$.

X. Igazoljuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}'$ természetes számra

$$\sqrt[n]{n!}\ge\sqrt{\frac{n-1}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{3(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}\le\frac{1}{n}\le\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

teljesül.

XI. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+100}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-100}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{4n^2+n}}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^3-2n+3}{n\sqrt{n}+8}}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^25^n}{9n^3+10^n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^nn^2+1}{10^nn^3+\sqrt{n}}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{5^n}}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1+2^n}{n+3^n}}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n+4^n}{5^n+3n}}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^23^n+n^34^n}{n^45^n}}$

XII. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+3}=\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^n=\sqrt[5]{\mathrm{e}}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n=0$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=0$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}\right)^{2n+1}=\mathrm{e}^{10}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)=1$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)-1)=\dfrac{1}{2}$

XIII. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1}=7-\dfrac{10}{a_n}$, $a_1=4$
2. $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$, $a_1=1$ és $a_1=5$
3. $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $a_1=1$

XIV. Határozzuk meg a következő a sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

1. $a_n=\left(\cos n\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{2n^2-3}{n^2+n+8}$

2. $a_n=\dfrac{4-n^2}{n+3}$

3. $a_n=\sqrt{\dfrac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$

4. $a_n=\left(\dfrac{3-n}{5+n}\right)\left(\dfrac{4n-1}{2n+5}\right)^3$

XV. Mutassuk meg, hogy minden $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Az $x\in\mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\limsup a=x$, ha minden $c<x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c<a_n\}$ halmaz végtelen, és minden $c>x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c<a_n\}$ halmaz véges.
2. Az $x\in\mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\liminf a=x$, ha minden $c<x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c>a_n\}$ halmaz véges, és minden $c>x$ esetén az $\{n\in\mathbb{N}|\ c>a_n\}$ halmaz végtelen.

XVI. Mutassuk meg, hogy minden $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Ha $\lim a\in\mathbb{R}$, akkor $\liminf a=\limsup a=\lim a$.
2. Ha $\liminf a, \limsup a\in\mathbb{R}$ és $\liminf a=\limsup a$, akkor $\lim a=\liminf a$.

XVII. Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{m+n}\le a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{a_n}\ .$$

XVIII. (*Gyök-kritérium sorozatokra.*) Mutassuk meg, hogy ha az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

XIX. (*Hányados-kritérium sorozatokra.*) Mutassuk meg, hogy ha az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

XX. Mutassuk meg, hogy ha az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=c$ teljesül, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c$.

XXI. Igazoljuk a

$$\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=1$$

határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvényt jelöli!

XXII. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$

2*. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}} = \frac{27}{4}$

3**. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

XXIII. Legyen $0 < x_0 \le y_0$ tetszőleges valós számpár. Definiáljuk az

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

rekurzióval az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy ezek konvergens sorozatok, valamint hogy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

teljesül!

XXIV. Legyen $x_0, c \in \mathbb{R}^+$. Adjuk meg az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot az alábbi iterációval.

$$x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{3}\frac{c}{x_k^2}$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[3]{c}.$$

8. Sorok

8.1. Konvergenciakritériumok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-3} = -\frac{8}{3}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+1) = -\frac{\pi}{4}$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \infty$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1$
8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = 1$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5$
12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\log 2$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \infty \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} = \infty$$

III. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$$

IV. Konvergenciakritériumok.

1. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ 5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} n}{n^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-1}\right)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{n^2}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

2. A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$ 5. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{9^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^3}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n-3}{2n^2-7n+10}\right)^{\frac{1}{n}}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln^n n}$ 14. $\sum_{n=4}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

3. A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\binom{n}{n-1}}{\binom{n}{n-3}}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n!(n+1)!(n+2)!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

4. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$	2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$	3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$	5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$	6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n-\log n}$	8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$	9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{0.1}$

V. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat ($\lim a = 0$), és legyen

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Mutassuk meg, hogy az $n \mapsto s_{2n}$ sorozat monoton növő és felülről korlátos; ezért konvergens is.
2. Legyen $S = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Mutassuk meg, hogy az $n \mapsto s_{2n+1}$ sorozat is konvergens, és szintén S a határértéke.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

teljesül.

(A fenti alakú sorokat *Leibniz-soroknak* nevezzük.)

VI. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4}-nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^{2n}+3n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n+3}$$

VII. Igazoljuk, hogy a következő sorok konvergensek!

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\qquad \left(= \frac{\pi}{4}; \quad \simeq 1500.\ \text{Leibniz}\right)$
2. $\displaystyle 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$ $\qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}; \quad 1748.\ \text{Euler}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$ $\qquad \left(= \frac{1}{\pi}; \quad 1914.\ \text{Ramanujan}\right)$
4. $\displaystyle \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103+26390n}{396^{4n}}$ $\qquad \left(= \frac{1}{\pi}; \quad 1914.\ \text{Ramanujan}\right)$
5. $\displaystyle \frac{36}{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$ $\qquad \left(= \frac{\pi^4}{90}; \quad 1974.\ \text{Comtet}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$ $\qquad \left(= \pi; \quad 1996.\ \text{Bailey}\right)$

VIII. Konvergencia-kritériumok segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n-3}{2n^2-7n+10}\right)^{\frac{1}{n}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{(4+\frac{5}{n})^n}$

IX. Abszolút vagy feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+n3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

X. Igazoljuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konverges, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

XI. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim a$$

teljesül.

XII. Legyen $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat melyre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0.$$

XIII. Legyen $x \in \mathbb{C}$ $|x| < 1$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $a_k = x^k$ sorozatot. Mutassuk meg a $\displaystyle\sum_{k} a_k$ sorozat önmagával vett Cauchy-szorzatának a segítségével, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$, valamint $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(x-1)^2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}$, valamint $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^3 - \frac{3x^{n+1}}{(x-1)^2}n^2 + \frac{3x^{n+1}(x+1)}{(x+1)^3}n - \frac{x(x^2+4x+1)(x^n-1)}{(x-1)^4}$, valamint $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

teljesül.

XIV. Igazoljuk az alábbi végtelen szorzatokra vonatkozó egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \infty$ 2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right) = 0$ 3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = 1$

4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k^2-1}\right) = 2$ 5. $\displaystyle\prod_{k=3}^{\infty} \left(1-\frac{4}{k^2}\right) = \frac{1}{6}$ 6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{k^2+k}\right) = \frac{1}{3}$

8.2. Hatványsorok

I. Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Mutassuk meg, hogy ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ határérték is, és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

II. Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ és $z\in\mathbb{C}$.

1. Mutassuk meg, hogy ha $|z|\cdot\limsup\sqrt[n]{|a_n|}<1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ sor abszolút konvergens.
2. Mutassuk meg, hogy ha $|z|\cdot\limsup\sqrt[n]{|a_n|}>1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ sor divergens.

(A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ alakú sorokat *hatványsoroknak* nevezzük. Ha bevezetjük az

$$R_a=\begin{cases}\dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}} & \text{ha}\quad \limsup\sqrt[n]{|a_n|}>0,\\ \infty & \text{ha}\quad \limsup\sqrt[n]{|a_n|}=0,\\ 0 & \text{ha}\quad \limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\end{cases}$$

konvergenciasugárnak nevezett mennyiséget, akkor $|z|<R$ esetén a hatványsor abszolút konvergens, $|z|>R$ esetén pedig divergens.)

III. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát és adjuk meg a konvergenciatartományát!

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^nx^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n+1}x^n$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)3^n}x^{2n}$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}(x+7)^n$
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+1}x^n$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}x^n$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n!}x^n$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$

8.3. Cesáro-összegzés

I. Cesáro-összegzés [1].

[1]Definíció: Azt mondjuk, hogy az $a:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}$ sorozatból képzett $\sum a$ *sor C_k (Cesáro-) összegezhető*, valamely $k\in\mathbb{N}^+$ esetén, ha az $s(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ részletösszeg sorozatból képzett

$$\sigma^{(k)}:\mathbb{N}^+\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto\sigma_n^{(k)}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}s_i, & \text{ha}\quad k=1,\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^{(k-1)}, & \text{ha}\quad k>1\end{cases}$$

1. Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^{C_1}(-1)^n = -\frac{1}{2}$, valamint $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^{C_2}(-1)^{n+1}n = \frac{1}{4}$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $x \in]0, 2\pi[$ esetén

$$
\begin{aligned}
s_1(k) &= \sum_{l=1}^{k} \sin(lx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} - \sin((k+1)x) + \frac{\sin x}{\cos x - 1}\cos((k+1)x)\right)\\
s_2(k) &= \sum_{l=1}^{k} \cos(lx) = \frac{1}{2}\left(-1 - \cos((k+1)x) + \frac{1+\cos x}{\sin x}\sin((k+1)x)\right)\\
\sigma_1(n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_1(k) = \frac{(n+1)\sin x - \sin((n+1)x)}{2n(1-\cos x)}\\
\sigma_2(n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_2(k) = \frac{\cos((n+1)x) - (n+1)\cos x + n}{2n(\cos x - 1)}
\end{aligned}
$$

   teljesül. Ezek alapján igazoljuk, hogy

$$
\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_1}\cos(nx) = -\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_1}\sin(nx) = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}.
$$

3. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Mutassuk meg, hogy az $a_n = z^n$ sorozatra

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{z^{n+1} - z}{z-1}\\
\sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2(z^n - 1)}{n(z-1)^2}
\end{aligned}
$$

   teljesül, valamint, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(1)} = \frac{z}{1-z}$. Tehát $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} z^n = \frac{z}{1-z}$. Mutassuk meg, hogy $x \in]0, 2\pi[$ esetén a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ helyettesítéssel

$$
\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_1}\cos(nx) = -\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_1}\sin(nx) = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}
$$

   adódik.
4. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Mutassuk meg, hogy az $a_n = nz^n$ sorozatra

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{z^{n+1}}{z-1}n - \frac{z(z^n-1)}{(z-1)^2}\\
\sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{z^{n+2}+z}{(z-1)^2} + \frac{2z^2(1-z^n)}{n(z-1)^3}\\
\sigma_n^{(2)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(1)} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z^3(z^n-1)}{n(z-1)^3} + \frac{2z^2}{n(z-1)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-z^k}{k}
\end{aligned}
$$

---

sorozatnak létezik véges határértéke, és ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^{C_k} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(k)}$ jelölést használjuk.

teljesül, valamint, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(2)} = \frac{z}{(z-1)^2}$. Tehát $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_2} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2}$. Mutassuk meg, hogy $x \in]0, 2\pi[$ esetén a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_2} n\cos(nx) = \frac{1}{2(\cos x - 1)} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_2} n\sin(nx) = 0$$

adódik.

5*. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_3} n^2 z^n = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ teljesül, valamint, hogy az $x \in]0, 2\pi[$ esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_3} n^2\cos(nx) = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_3} n^2\sin(nx) = -\frac{\sin x}{2(1-\cos x)^2}.$$

6*. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_4} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ teljesül, valamint, hogy az $x \in]0, 2\pi[$ esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_4} n^3\cos(nx) = \frac{2+\cos x}{2(1-\cos x)^2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_4} n^3\sin(nx) = 0.$$

9. Határérték és folytonosság

I. Igazoljuk az alábbi határértékeket!

1. $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$
2. $\lim_{x\to -1} (x^2+3x-1) = -3$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{x+1} = -\frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$
5. $\lim_{x\to -3} \frac{x+2}{(x+3)^2} = -\infty$
6. $\lim_{x\to \infty} (2-4x^3) = -\infty$

II. Keressük meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim_{x\to 0} x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{9+x}-3}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$
4. $\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3})$
5. $\lim_{x\to \pm\infty} (7x^9 - x^4 + 3x^2 + 1)$
6. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$
8. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$

III. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.

IV. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\operatorname{Ran} f = [a, b]$, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre $f(x_0) = x_0$.

V. Vizsgáljuk monotonitás, paritás, korlátosság, periodicitás és folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket ($\{\cdot\}$ a törtrészfüggvény).

1. $\dfrac{1}{1+x^2}$
2. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
3. $a^x+\dfrac{1}{a^x} \quad (a\in\mathbb{R}^+)$
4. $\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$
5. $\sin x^2$
6. $\log\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}(x-k)^2$
8. $\sin^2 x$
9. $\{5\pi x\}+\operatorname{tg} x$

VI. Számoljuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}+x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\mathrm{e}^{4x}-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(3x)-1}$

VII. Mutassuk meg, hogy minden $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ függvényre az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A\subseteq\mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt a $\operatorname{Dom} f$ halmazban.
3. Minden $A\subseteq\mathbb{K}$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt a $\operatorname{Dom} f$ halmazban.

(Legyen $B\subseteq A\subseteq\mathbb{K}$. A *$B$ halmaz nyílt az A halmazban*, ha létezik $X\subseteq\mathbb{K}$ nyílt halmaz, melyre $B=A\cap X$. A *B halmaz zárt az A halmazban*, ha létezik $X\subseteq\mathbb{K}$ zárt halmaz, melyre $B=A\cap X$.)

VIII. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és annak típusait.

1. $f(x)=\operatorname{sgn}^2 x$
2. $f(x)=[x^n]$
3. $f(x)=[x]+[-x]$
4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$
5. $f(x)=\sqrt{|x|}-\left[\sqrt{|x|}\right]$
6. $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|}$
7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|4-x|}+\dfrac{1}{4-x}, & \text{ha } x\geq 2;\\ \dfrac{x^2-10x}{x^2-11x+10}, & \text{ha } x<2.\end{cases}$
8. $f(x)=\dfrac{(x^2+2x-8)(x+4)}{|x^2+3x-10|(x^2+5x+4)(x+1)}$

IX. $\boxed{H}$ Adott $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ esetén legyenek $p_x\in\mathbb{Z}$ és $q_x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ azon egyértelműen meghatározott számok, melyekre $x=\dfrac{p_x}{q_x}$, valamint p_x és q_x relatív prímek. Az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\notin\mathbb{Q}\setminus\{0\},\\ \dfrac{1}{q_x}, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\end{cases}$$

függvényt *Dirichlet-függvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy a Dirichlet-függvénynek

1. minden pontban létezik jobb- illetve bal oldali határértéke;
2. a 0 helyen és minden irracionális pontban folytonos;
3. minden $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban szakadása van, bár $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$.

X. Mutassuk meg, hogy ha az $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ függvény folytonos a 0 pontban, és minden $x \in]-1,1[$ esetén $f(x) = f(x^2)$, akkor az f függvény folytonos.

XI. Igazoljuk, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0 pontban folytonos.

XII. Bizonyítsuk be, hogy a sin és a cos függvény egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, és az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ és a $\sin \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény nem egyenletesen folytonos a $]0,1[$ intervallumon.

XIII. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, melyre $x_0 \sin x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

XIV. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $(x_i)_{i=1,\ldots,n} \in I^n$ és $f \in C(I, \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $x_0 \in I$ pont, melyre

$$f(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

teljesül.

XV. Legyen $f \in C([0,2], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $u, v \in [0,2]$, melyre

$$v - u = 1 \qquad \text{és} \qquad f(v) - f(u) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

XVI. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f \in C([a, \infty[, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim_{\infty} f \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész $[a, \infty[$ halmazon.

XVII. Legyen $A = [-1,0] \cup \big(]0,1[\cap \mathbb{Q}\big) \cup \{3,4,5\}$ és legyen

$$f : A \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 2 \text{ és } x \notin \mathbb{Q}, \\ x & \text{ha} \quad x < 2 \text{ és } x \in \mathbb{Q}, \\ 5 & \text{ha} \quad x = 3, \\ 8 & \text{ha} \quad x = 4 \text{ vagy } x = 5. \end{cases}$$

Mely pontokban folytonos az f függvény?

10. Differenciálhatóság

I. A deriválás definíciója alapján, valamint a hatványsor deriválására vonatkozó ismeretek alapján is igazoljuk az alábbi formulákat (ahol $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{n-1} \qquad \sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin \qquad \exp' = \exp \qquad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \qquad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$$

II. Keressük meg az $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ függvény deriváltját.

III. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ akkor $fg \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valamint

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

teljesül.

IV. Számoljuk ki az alábbi függvények deriváltját.

$$f(x) = x^5 \frac{\sin x \cos x - \operatorname{tg} x}{e^x} \qquad g(x) = \frac{x^3 \sin x - e^x \cos x}{x^4 + x^2 + 12} \qquad h(x) = e^x \operatorname{sh}(x) \cos(x) \operatorname{ctg} x$$

V. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom}(f \circ g)$. Igazoljuk, hogy ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

VI. Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

1. $f(x) = e^x(1 + x^2)$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x + \cos x}$
3. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$
4. $f(x) = \ln \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + x}$
6. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$
7. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
8. $f(x) = e^{\sin \cos x^2}$

VII. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x} & \text{ha } x \neq 1, \\ 0 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvényt. Számoljuk ki az $f'(1)$ értéket és a $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ határértéket!

VIII. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ számra

$$\frac{b - a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b - a}{\cos^2 b}$$

teljesül.

IX. Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3}{e^{2x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x \sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2x - 1)}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x}\right)$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$
9. $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$
10. $\lim\limits_{x \to +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\ln x^5$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ch}3x)^{\frac{1}{x^2}}$

12*. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\arcsin\left((2-\operatorname{ch}x)^{\sin x}\right)-\dfrac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$

X. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum, és legyen $f:I\to\mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész I intervallumon.

XI. $\boxed{H}$ Feladatok a határérték és deriválás kapcsolatáról.

1. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan páratlan függvény, melyre $0\in\operatorname{Dom}(f''')$ teljesül, és legyen $a,b\in\mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(at)}{at^3}-\frac{f(bt)}{bt^3}\right)=\frac{a^2-b^2}{6}f'''(0).$$
2. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvény, és legyen $u\in\operatorname{Dom}(f''')$ tetszőleges pont. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(u+t)-f(u-t)-2tf'(u)}{t^3}=\frac{f'''(u)}{3}.$$

XII. Elemi egyenlőtlenségek.

1. Igazoljuk, hogy minden $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ számra
$$\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}.$$
2. Igazoljuk, hogy minden $x\in\,]0,\infty[$ esetén
$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$
3. Igazoljuk, hogy minden $x,y\in\mathbb{R}^+$ számra $y<x$ esetén
$$\frac{1}{x}<\frac{\log x-\log y}{x-y}<\frac{1}{y}.$$
4. Igazoljuk, hogy minden $x,y,a,b\in\mathbb{R}^+$ számra
$$x\log\left(\frac{x}{a}\right)+y\log\left(\frac{y}{b}\right)\ge(x+y)\log\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$
5. Bizonyítsuk be, hogy minden $x,y\in\mathbb{R}$ számra $x>0$ esetén
$$xy\le x\log x+\mathrm{e}^{y-1}$$
teljesül.

XIII. $\boxed{H}$ Függvények konvexitása.

1. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c\in\,]a,b[$ szám melyre $f(a)=f(c)=f(b)$, akkor az f függvény állandó.
2. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ konvex függvény. Igazoljuk, hogy f folytonos.

3. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Adjunk példát olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvényre, mely nem folytonos.
4. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in I$ számra
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
teljesül.
5. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenhol értelmezett szigorúan konvex függvény, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$ vagy $\lim\limits_{-\infty} f = \infty$.
6. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növő és $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
7. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható fggvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+} f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex. (Igaz marad-e az állítás, ha f nem kétszer differenciálható?)
8. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

XIV. Adjuk meg az alábbi f függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x} \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$
4. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$
5. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

XV. $\boxed{H}$ Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ és legyen $x_0 \in I$ olyan pont, melyre $f''(x_0) \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az f függvényt az x_0 pontban legjobban közelítő kör egyenlete
$$y : [x_c - R, x_c + R] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y_c - \mathrm{sgn}(f''(x_0)) \cdot \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2},$$
ahol
$$R = \frac{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}, \qquad x_c = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} \quad \text{és} \quad y_c = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

XVI. $\boxed{H}$ Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre f és f'' korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f' is korlátos valamint ha $k \in \{0, 1, 2\}$ esetén $M_k = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_0^+} |f^{(k)}(x)|$, akkor $M_1^2 \leq 4 M_0 M_2$ teljesül.

XVII. $\boxed{H}$ Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely kétszer differenciálható, a második deriváltja is korlátos, és $\lim\limits_{\infty} f = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim\limits_{\infty} f' = 0$.

XVIII. $\boxed{H}$ Legyen f analitikus az $a \in \mathbb{R}$ pontban. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $r > 0$ szám, hogy az f függvény analitikus minden $x \in G_r(a)$ pontban.

XIX. Tekintsük az alábbi függvényt.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{ha} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x=0 \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f'(0)\neq 0$. Szigorúan monoton-e az f függvény a 0 egy környezetén?

XX. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x)=x^3\,\mathrm{e}^{-x}$ és a $g(x)=x-2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol van értelmezve a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\operatorname{Dom} f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexiós pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

XXI. Hol van lokális maximuma illetve minimuma a $p(x)=3x^5-15x^4+25x^3-15x^2+4$ polinomnak?

XXII. Hány valós megoldása van az $x^4-108x+9=0$ egyenletnek, és mi lesz a valós gyökök előjele?

XXIII. Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-3x}$ függvénynek a $[0,1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

XXIV. Írjuk fel az

$$x\cos y^2(x)+\frac{2y(x)}{x+2}+y(x)=2x$$

implicit módon megadott y függvény $(0,0)$ pontbeli érintő egyenesének az egyenletét!

XXV. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x^2\sin y(x)+y(x)+\sin x=1$$

implicit módon adott y függvénynek a $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ pontban?

XXVI. Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.

$$f(x)=(4x+2)\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad g(x)=\sin^2(3x) \qquad h(x)=\frac{7-5x}{x^2-3x+2}$$

XXVII. A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az arctg, arcsin, $\sqrt{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

XXVIII. Határozzuk meg $\sqrt[3]{10}$ értékét $0,01$ pontossággal.

XXIX. Igazoljuk az alábbi sorösszegeket.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k}=\infty$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}<\infty$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{k}\right)<\infty \quad (x\in\mathbb{R})$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)^{-1}=\infty$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}\right)<\infty$

XXX. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \sqrt{ab} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

teljesül.

XXXI. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Határozzuk meg az f' függvényt.
2. Vizsgáljuk a $\lim\limits_{0} f'$ határértéket.

XXXII. Igazoljuk a trigonometrikus függvényekre és inverzükre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\sin x = \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad x \in \mathbb{R}$
2. $\cos x = \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad x \in \mathbb{R}$
3. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \qquad x \in [-1, 1]$
4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$
6. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad x \in \,]-1, 1[$
7. $\operatorname{tg}(3 \operatorname{arctg} x) = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

XXXIII. $\boxed{H}$ (*Raabe-féle konvergenciakritérium.*) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}'$ tetszőleges sorozat. Igazoljuk, hogy

1. ha $\liminf\limits_{n\to\infty} \left(n \left(\left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right) \right) > 1$, akkor a $\sum\limits_n a_n$ sor abszolút konvergens;
2. ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(n \left(\left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right) \right) < 1$, akkor a $\sum\limits_n a_n$ sor nem abszolút konvergens.

XXXIV. $\boxed{H}$ Mutassuk meg, hogy a

$$j : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \qquad f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$$

leképezés injektív. Ezek alapján igazoljuk az alábbiakat.

$$\begin{aligned} |\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| \leq |\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))| = \\ = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}))| = |\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0, 1\})| = |\mathbb{R}| \end{aligned}$$

(Vagyis a folytonos függvények halmaza kontinuum számosságú.)

XXXV. $\boxed{H}$ Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reguláris függvény (azaz $\operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz, és minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontra létezik a $\lim\limits_{a+} f$ és a $\lim\limits_{a-} f$ határérték). Definiáljuk az

$$\omega : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \max \left\{ \left| f(x) - \lim_{x-} f \right|, \left| f(x) - \lim_{x+} f \right| \right\}$$

függvényt. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Az f függvény pontosan akkor folytonos az $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban, ha $\omega(x) = 0$.
2. Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontra $\lim_a \omega = 0$.
3. Minden $K \subseteq \operatorname{Dom} f$ korlátos zárt halmazra és $\varepsilon > 0$ számra a
$$\{x \in K \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$$
halmaz véges.
4. Mutassuk meg, hogy létezik korlátos zárt halmazoknak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszere, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \operatorname{Dom} f$.
5. Az f függvény szakadási helyeinek a halmaza megszámlálható.
6. Minden nyílt halmazon értelmezett monoton függvény reguláris.

11. Határozatlan integrál

I. Számítsuk ki a következő integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$	2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$	3. $\displaystyle\int 1+\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$	5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$	6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2}$	8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2}$	9. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	11. $\displaystyle\int \operatorname{sh}$	12. $\displaystyle\int \operatorname{ch}$

II. A parciális integrálás segítségével határozzuk meg az alábbi integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}\,x$	2. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\,x$	3. $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}\,x$	5. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$	6. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$	8. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$	9. $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}\,x$
10. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}\,x$	11. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} ax\,\mathrm{d}\,x$	12. $\displaystyle\int x^3\ln^2 x\,\mathrm{d}\,x$

III. A következőkben a racionális törtfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályt alkalmazzuk.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$	2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}\,x$	3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x$	5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}\,x$	6. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-2)(x-3)(x-4)}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int \frac{16x^2+4x}{x^4+4}\,\mathrm{d}\,x$	8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$	9. $\displaystyle\int \frac{x^4+4}{x^3-1}\,\mathrm{d}\,x$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$	11. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x$	12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x$

IV. A következő integrálok kiszámításához alkalmazzunk megfelelő helyettesítést ($k \in \mathbb{N}$).

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int x\sqrt[4]{x-1}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$
8. $\displaystyle\int \sin^k x\cdot\cos x\,\mathrm{d}\,x$
9. $\displaystyle\int \cos^k x\cdot\sin x\,\mathrm{d}\,x$
10. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}\,x$
11. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}\,x$
12. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}\,x$
13. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}\,x$
14. $\displaystyle\int \frac{2}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}-1}\,\mathrm{d}\,x$

V. A $t=\operatorname{tg} x$ helyettesítéssel racionális törtfüggvényekre vezessük vissza a következő integrálokat és így számoljuk ki az értéküket.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} x-1}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+\sin 2x}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

VI. A következő integrálok kiszámításához gondoljunk az elemi függvények (sin, tg, exp, arctg, arcsin,...) deriváltjára és a deriválásnál megismert láncszabályra.

1. $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int \frac{3^x}{1+9^x}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int \frac{\cos\ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

VII. Trigonometrikus azonosságok segítségével számoljuk ki az alábbi határozatlan integrálokat.

1. $\displaystyle\int \cos 2x\cos 5x\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int \cos^5 x\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int \cos^5 x\sin^3 x\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int \cos^5 x\sin^5 x\,\mathrm{d}\,x$

12. Határozott integrál

I. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}\,x=1$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{3}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x=\ln 2$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}$
6. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)^{19}\,\mathrm{d}\,x=0$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{6}$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x=1+\ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x=1$

II. Az integrálok kiszámítása nélkül igazoljuk az egyenlőtlenségeket.

$$\int_0^{10} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x\le\int_0^{10} \ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}\,x\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}\,x$$

III. Tekintsük az

$$\begin{aligned} e_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R} \qquad & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ e_k : [0,\pi] \to \mathbb{R} \qquad & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \qquad \forall k \in \mathbb{N}' \\ f_k : [0,\pi] \to \mathbb{R} \qquad & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \qquad \forall k \in \mathbb{N}' \end{aligned}$$

vektorokat a $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ vektortérben, melyben a skaláris szorzást a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([0,2\pi],\mathbb{R}) \times C([0,2\pi],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \int\limits_0^{2\pi} fg$$

képlet definiálja. Mutassuk meg, hogy az $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}'}$ vektorok ortonormált rendszer alkotnak.

IV. Határozzuk meg az $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ vektorok által bezárt szöget a $(C([0,1],\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzatos térben, ahol az $f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$ vektorok skaláris szorzatát a $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$ képlet definiálja.

1. $f(x) = x$, $g(x) = 1$
2. $f(x) = 4x-3$, $g(x) = x^2$

V. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

1. $E(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8}\, \mathrm{d}\, t$
2. $F(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}\, t$
3. $G(x) = \int_0^{4x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}\, t$
4. $H(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}\, t$

VI. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{d}{du}\int_u^w \sin x^2\, \mathrm{d}\, x + \frac{d}{dw}\int_u^w \sin x^2\, \mathrm{d}\, x = \int_{u^2}^{v^2} \cos x\, \mathrm{d}\, x$$

egyenlet teljesül!

VII. Határozzuk meg az

$$F(x) = \int_{-2}^{x} t\, \mathrm{e}^{-4t}\, \mathrm{d}\, t$$

képlettel értelmezett függvény minimumát és maximumát a $[-2,2]$ intervallumon!

VIII. Tekintsük az

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^7+2t+6}\, \mathrm{d}\, t$$

függvényt.

1. Az F függvénynek van-e lokális szélsőértéke a $]0,3[$ intervallumban?
2. Hol veszi fel F a minimumát illetve maximumát a $[0,3]$ intervallumban?
3. Van-e inflexiós pontja az F függvénynek a $]0,3[$ intervallumban?

IX. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}\,t}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}\,t}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t}{x^3}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\operatorname{arctg} 3t\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t}{\frac{1}{x}}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{x^2+1}}$

X. Keressünk hibát az alábbi számításban.

$$\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}\,x = \log x\cdot\frac{1}{\log x} - \int \log x\cdot\frac{-1}{\log^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = 1 + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$0 = 1$$

XI. Legyen $f\in\mathcal{R}([0,\pi],\mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int_0^\pi f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}\,x = 0$$

teljesül.

XII. Számoljuk ki az

$$\int_0^\pi \log\sin x\,\mathrm{d}\,x,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}\,x,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,\mathrm{d}\,x$$

integrálok értékét.

XIII. Igazoljuk, hogy minden $a\in\mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{\mathrm{e}}$$

teljesül.

XIV. $\boxed{H}$ Legyen $f\in\mathcal{R}([0,1],\mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c\in\mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x\in[0,1]$ esetén $f(x)\ge c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

XV. $\boxed{H}$ Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ teljesül.

XVI. $\boxed{H}$ Mutassuk meg, hogy minden $f\in C([a,b],\mathbb{R}^+)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

XVII. $\boxed{E}$ Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$.

1. Számoljuk ki minden $n \in \mathbb{N}$ számra I_n értékét.
2. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_n \geq I_{n+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{2n}^2 \geq I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \geq I_{2n+2}^2 .$$

4. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}'$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \geq I_{2n}\sqrt{2n} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} .$$

5. Igazoljuk a *Wallis-formulát*.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

XVIII. $\boxed{E}$ Definiáljuk az

$$a : \mathbb{N}' \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

sorozatot.

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}'$ számra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

2. Igazoljuk, hogy az a sorozat monoton fogyó.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}'$ esetén

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

   teljesül.
4. Mutassuk meg, hogy az a sorozat alulról korlátos.

(A

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

számot *Euler-Mascheroni-állandónak* nevezzük, $\gamma \approx 0.5772156649$. Ismeretlen, hogy $\gamma \in \mathbb{Q}$ teljesül-e.)

XIX. $\boxed{E}$ Legyen $\mathbb{P}$ a prímszámok halmaza. Igazoljuk, hogy minden $x \in]1, \infty[$ számra

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leq x}} \frac{1}{p} \geq (\log\log x) - 2$$

teljesül, az alábbi részfeladatok segítségével.

1. Minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ és $p \in \mathbb{P}$ esetén létezik egyértelműen olyan $a_p(n) \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$p^{a_p(n)-1} < n \le p^{a_p(n)}$$

teljesül.
2. Minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén legyen

$$A_n = \prod_{\substack{p \in P \\ p \le n}} \sum_{i=0}^{a_p(n)} \frac{1}{p^i} .$$

Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén

$$\log n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < A_n < \prod_{\substack{p \in P \\ p \le n}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} .$$

3. A Taylor-sorfejtés segítségével igazoljuk, hogy minden $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} < x + x^2,$$

továbbá, hogy minden $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \le 2 - \frac{1}{k} .$$

Ezek alapján $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2.$
4. Az előző pontok alapján igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ esetén

$$\log\log n < \sum_{\substack{p \in P \\ p \le n}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) < 2 + \sum_{\substack{p \in P \\ p \le n}} \frac{1}{p} .$$

XX. Igazoljuk, hogy minden $x \in \left]-1, 1\right[$ számra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = 1 + \frac{(1-x)\log(1-x)}{x} .$$

XXI. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) \, dx$
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x - 1} \, dx$
5. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \, dx$
7. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \log x \, dx$

XXII. Igazoljuk az alábbi sorösszegeket, ahol $a \in]1, \infty[$.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \pi$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{k=1}^{n} k^{a-1} = \frac{1}{a}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$

határértéket.

XXIII. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2x}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}\,x$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}}\,\mathrm{d}\,x$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3}\,\mathrm{d}\,x$
10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}\,x$
11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5}\,\mathrm{d}\,x$
12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x$

XXIV. Adjunk becslést a hibára, ha a

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{1+\operatorname{ch}^2 n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\mathrm{e}^{-n^3}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\ln n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$

sorokat az első 100 tag összegével becsüljük!

XXV. $\boxed{H}$ Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} f = a$ és $\lim\limits_{-\infty} f = b$ teljesül. Számoljuk ki a

$$\lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} (f(x+1)-f(x))\,\mathrm{d}\,x$$

határértéket.

XXVI. $\boxed{H}$ Legyen $f \in C([0,\infty[\,,\mathbb{R}^+)$.

1. Igazoljuk, hogy ha f monoton csökkenő és $\displaystyle\int_0^\infty f < \infty$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.
2. Mutassuk meg, hogy ha $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{f(x)} \in]0,1[$, akkor $\displaystyle\int_0^\infty f < \infty$.

XXVII. $\boxed{H}$ Legyen $f \in \mathcal{R}([0, \infty[\,, \mathbb{R}^+)$.

1. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^\infty f < \infty$, akkor létezik olyan $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre $\lim_\infty g = \infty$ és $\displaystyle\int_0^\infty fg < \infty$.
2. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\int_0^\infty f = \infty$, akkor létezik olyan $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre $\lim_\infty g = 0$ és $\displaystyle\int_0^\infty fg = \infty$.

XXVIII. Ívhosszszámítás.

1. Az $f(x) = x$ egyenletű görbének mekkora az $[0, 5]$ intervallumhoz tartozó hossza?
2. Számítsuk ki az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény görbéjének a $[0, \ln 3]$ intervallumhoz tartozó ívhosszúságát!
3. Mekkora az $f(x) = \ln \sin x$ függvény görbéjének a hossza a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum fölött?
4. Mekkora az $f(x) = x^2$ függvény ívhossza a $[0, 1]$ intervallum fölött?
5. Legyen $f(x) = \mathrm{ch}\, x$. Mekkora a függvény $[0, 1]$ intervallum fölötti részének a hossza?
6. Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $[1, 4]$ szakasz fölötti képének a hosszát!

XXIX. Térfogatszámítás.

1. Az $y = x^2$ egyenletű parabola $[0, 2]$ intervallum fölötti ívét forgassuk meg az első tengely körül. Mekkora a kapott forgástest térfogata?
2. Forgassuk meg az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbe $[2, 4]$ intervallum fölötti ívét az első tengely körül. Mekkora a kapott forgástest térfogata?
3. Legyen $-1 \neq n \in \mathbb{R}$ és $f(x) = x^n$. Forgassuk meg az f függvényt az első tengely körül. Mekkora a kapott forgástest $[a, b]$ intervallumhoz tartozó térfogata, ahol $a, b \in [1, \infty[$, $a < b$?
4. Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó részét forgassuk meg az első tengely körül, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mekkora az így kapott test térfogata?
5. Mekkora térfogatú testet kapunk, ha az $f(x) = \sin x$ függvényt két szomszédos nullpontja között az első tengely körül megforgatunk?

XXX. Felszínszámítás.

1. Az $f(x) = x^2$ egyenletű parabola $[0, 1]$ intervallum fölötti részét forgassuk meg az első tengely körül. Mekkora a kapott test térfogata?
2. Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ görbét az első tengely körül megforgatva egy forgástestet kapunk. Mekkor a test $[0, 1]$ szakaszhoz tartozó felszíne?
3. Az $f(x) = \mathrm{ch}\, x$ függvény $[0, \ln 2]$ intervallum fölötti szakaszát az első tengely körül forgassuk meg. Mekkora a kapott forgástest felszíne?
4. Az $f(x) = \sin x$ függvényt két szomszédos zérushelye között forgassuk meg az első tengely körül. Mekkora a kapott test felszíne?

13. Metrikus terek

I. $\boxed{H}$ Legyen $T = \mathbb{R}$ és

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty[\ \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, \infty[\ \mid a \in \mathbb{R}\}\,.$$

1. Mutassuk meg, hogy $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér.
2. Igazoljuk, hogy a $(T, \mathfrak{T})$ tér T_0 tér, de nem T_1 tér.
3. Adjuk meg az összes olyan $z \in \mathbb{R}$ elemet melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = z$ teljesül.

II. $\boxed{H}$ Legyen $T = \mathbb{Z}$ és legyen

$$\mathfrak{T} = \{U \subseteq \mathbb{Z} \mid \text{a } \mathbb{Z} \setminus U \text{ halmaz véges}\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

1. Mutassuk meg, hogy $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér.
2. Mutassuk meg, hogy $(T, \mathfrak{T})$ T_1, de nem T_2 tér.
3. Tekintsük az
$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad n \mapsto n$$
sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $z \in \mathbb{Z}$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = z$ teljesül.

III. $\boxed{H}$ Mutassuk meg, hogy a $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér pontosan akkor T_1 tér, ha minden $x \in T$ esetén a $\{x\}$ halmaz zárt.

IV. $\boxed{H}$ Legyen $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér és legyen $E_1, \ldots, E_n \subseteq T$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Int} E_k \quad \text{és} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{E_k}.$$

V. $\boxed{H}$ Legyen $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér és legyen $(E_i)_{i\in I}$ a T részhalmazainak tetszőleges rendszere. Bizonyítsuk be a következőket.

1. $\operatorname{Int}\left(\bigcap\limits_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \operatorname{Int} E_i$
2. $\operatorname{Int}\left(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\right) \supseteq \bigcup\limits_{i\in I} \operatorname{Int} E_i$
3. $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} E_i} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \overline{E_i}$
4. $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} E_i} \supseteq \bigcup\limits_{i\in I} \overline{E_i}$

VI. Definiáljuk az alábbi leképezéseket.

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \\ d_2 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, d_1)$ és $(\mathbb{R}, d_2)$ nem teljes metrikus terek.

VII. Legyen M nem üres halmaz, és $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ olyan leképezés, melyre
1. minden $x, y \in M$ elemre $d(x, y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y$;
2. minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z)$.

Igazoljuk, hogy (M, d) metrikus tér.

VIII. Legyen (M,d) metrikus tér. Igazoljuk, hogy az alábbi $d_i : M \times M \to \mathbb{R}^+$ $(i = 1,2,3,4)$ függvények is metrikát határoznak meg.

$$d_1(x,y) = \min(d(x,y),1) \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad d_3(x,y) = \log(d(x,y)+1) \quad d_4(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$$

IX. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, melyre

1. $f(0) = 0$ és minden $x > 0$ esetén $f(x) > 0$;
2. f monoton növő;
3. minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) \le f(x) + f(y)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor $(M, f \circ d)$ is metrikus tér.

X. Definiáljuk a

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \qquad (n,m) \mapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m} & \text{ha} \quad m \neq n; \\ 0 & \text{ha} \quad m = n \end{cases}$$

függvényt.

1. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{N}, d)$ metrikus tér.
2. Adjunk példát olyan $\mathbb{N}$ halmazban haladó $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra és az $\mathbb{R}^+$ halmazban haladó $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton fogyó sorozatra, melyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $r_k > 1$, $\overline{B}_{r_{k+1}}(n_{k+1}) \subseteq \overline{B}_{r_k}(n_k)$, de $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_k}(n_k) = \emptyset$.

XI. Legyen (M,d) olyan metrikus tér, melyben M korlátos halmaz. Jelölje $F(M)$ az M tér nem üres zárt részhalmazainak a halmazát. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\rho : F(M) \times F(M) \to \mathbb{R}^+ \qquad (A,B) \mapsto \sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)$$
$$d' : F(M) \times F(M) \to \mathbb{R}^+ \qquad (A,B) \mapsto \max(\rho(A,B), \rho(B,A))$$

Mutassuk meg, hogy $(F(M), d')$ metrikus tér.

XII. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\alpha : \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+ \qquad (f,g) \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$$
$$d : \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+ \qquad (f,g) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2+\alpha(f,g)}{1+\alpha(f,g)} & \text{ha} \quad f \neq g; \\ 0 & \text{ha} \quad f = g. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}), d)$ metrikus tér.

XIII. $\boxed{H}$ Legyen (M,d) metrikus tér és tetszőleges $A \subseteq M$ halmaz esetén legyen

$$\operatorname{Int} A = \left\{x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : \ B_r(x) \subseteq A\right\},$$
$$\operatorname{Ext} A = \left\{x \in M \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : \ B_r(x) \cap A = \emptyset\right\},$$
$$\operatorname{Fr} A = \left\{x \in M \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \setminus A \neq \emptyset\right\}.$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq M$ esetén teljesülnek az alábbiak.

$$\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A = \operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A \qquad \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A = \operatorname{Ext}\operatorname{Int} A$$
$$\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Int}\operatorname{Fr} A \qquad \operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Int}\operatorname{Fr} A$$
$$\operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Int} A \qquad \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Ext} A$$
$$\operatorname{Fr}\operatorname{Ext}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}\operatorname{Int}\operatorname{Fr} A$$

2. Legyen $A \subseteq M$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy ha véges sokszor alkalmazzuk egymás után az Int, az Ext és a Fr halmazműveleteket az A halmazra, akkor azokat mindig le lehet rövidíteni négy halmazműveletre.
3. Legyen $A \subseteq M$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy ha véges sokszor alkalmazzuk egymás után az Int, az Ext és a Fr halmazműveleteket az A halmazra, akkor legfeljebb 25 különböző halmazt kaphatunk.

XIV. Legyen (M,d) metrikus tér, és $x, y \in M$ két különböző pont. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmazok, melyekre $x \in U$, $y \in V$ és $U \cap V = \emptyset$ teljesül.

XV. Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$ és $A \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $x \notin A$. Igazoljuk, hogy ekkor az $\{x\}$ halmaz zárt, valamint, hogy léteznek olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmazok, melyekre $x \in U$, $A \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ teljesül.

XVI. Legyen (M,d) metrikus tér és $A, B \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $A \cap B = \emptyset$. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmazok, melyekre $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ teljesül.

XVII. Igazoljuk, hogy metrikus térben minden nyílt halmaz előállítható megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniójaként, és minden zárt halmaz előállítható megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként.

XVIII. Mutassuk meg, hogy az $M = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ halmaz nem kompakt, ha a teret a megszokott euklidészi metrikával látjuk el.

XIX. Tekintsük az $M = \mathbb{Q}$ teret a megszokott euklidészi metrikával. Azt mondjuk, hogy az $x \in M$ pontnak az $U \subseteq M$ halmaz egy *környezete*, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyre $G_\varepsilon(x) \subseteq U$ teljesül. Mutassuk meg, hogy az M térben egyetlen pontnak sincs kompakt környezete.

XX. Példák lokális kompakt és nem lokálisan kompakt terekre.

1. Legyen $M = \mathbb{Q}$ és minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén legyen $d(p,q) = |p-q|$. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.
2. Legyen $n \in \mathbb{N}'$. Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ tér lokálisan kompakt minden $p \in [1, \infty[$ esetén.
3. Legyen $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ (x > 0)\big\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.
4. Legyen $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ \left(x > 0 \ \wedge \ y = \sin\dfrac{1}{x}\right)\right\}$ és legyen d az euklidészi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M,d) tér nem lokálisan kompakt.

XXI. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $x \in M$.

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x\}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű[2], ha x nem izolált pontja az M térnek.
2. Mutassuk meg, hogy ha M nem üres, teljes metrikus tér, melynek nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

[2] Egy $A \subseteq M$ halmazt akkor nevezünk *sehol sem sűrűnek*, ha $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

14. Normált terek

I. Legyen V vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ norma a V téren. Mutassuk meg, hogy $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K, K' \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K' \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K \|x\|$ teljesül.

II. Legyen $n \in \mathbb{N}'$ és $p, q \in [1, \infty[$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ téren

1. minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek;
2. bármely $p, q \in [1, \infty[$ szám esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_q$ normák ekvivalensek.

III. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mellyel V prehilbert-tér, ha minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

IV. Mutassuk meg, hogy normált térben minden nyílt és zárt gömb konvex halmaz. (Vagyis minden $a \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\forall x, y \in B_r(a) \forall t \in [0,1]: \; tx + (1-t)y \in B_r(a)$$
$$\forall x, y \in \overline{B_r(a)} \forall t \in [0,1]: \; tx + (1-t)y \in \overline{B_r(a)}$$

teljesül.)

V. $\boxed{H}$ Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $X \subseteq V$ konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy az $a \in X$ pont az X *halmaz extremális pontja*, ha

$$\forall x, y \in X \forall t \in [0,1]: \; tx + (1-t)y = a \;\longrightarrow t \in \{0,1\}.$$

1. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ térben.
2. Adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ térben.

3*. Jelölje $\overline{C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ a folytonos, végtelenben eltünő függvények halmazát, vagyis

$$\overline{C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \left\{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}): \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompakt halmaz } \forall x \in \mathbb{R} \setminus K : |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy a $(\overline{C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})}, \|\cdot\|_\infty)$ térben a $\overline{B_1(0)}$ gömbnek nincsen extremális pontja.

VI. $\boxed{H}$. Mutassuk meg, hogy a $(C^{\mathrm{b}}(\mathbb{R},\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben $\overline{C_0}(\mathbb{R},\mathbb{K})$[1] megegyezik a végtelenben eltűnő[2] folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvények halmazával.

15. Függvénysorozatok, függvénysorok

15.1. Konvergenciatartomány

I. Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét.

1. $f_n(x) = \ln^n x$
2. $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$

[1] $C_0(\mathbb{R},\mathbb{K}) = \{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{K}) | \; \operatorname{supp} f \text{ kompakt halmaz}\}$, ahol $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} | \; f(x) \neq 0\}}$.

[2] Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény végtelenben eltűnő, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, hogy minden $x \in (\mathbb{R} \setminus K)$ elemre $|f(x)| < \varepsilon$.

3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ 4. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

5. $f_n(x) = \sqrt{n(x^2-1)}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ 6. $f_n(x) = \dfrac{2nx^4}{n^2x^4+n+3}$

II. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n^4+x^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+x^{2n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^x}$
7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$
8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{n} (1-\sqrt[k]{x})$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2 - \ln\sqrt{n}}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{1+x^2}}$

15.2. Egyenletes konvergencia

I. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^n.$$

Határozzuk meg az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvényt. Igaz-e, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez?

II. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e az adott intervallumon.

1. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I_1 = [0, \infty[\qquad I_2 = [1, \infty[$
2. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I = [0, \infty[$
3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $\quad I = [0, 1[$
4. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+x+n}$ $\quad I = [0, \infty[$

III. Határozzuk meg az alábbi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint döntsük el, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál-e az f határfüggvényhez a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$
2. $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$
3. $f_n(x) = \dfrac{2x^{2n}}{1+x^{4n}}$
4. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{nx}-1}{\mathrm{e}^{nx}+1}$
5. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$
6. $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2}$
7. $f_n(x) = \sin^n x$
8. $f_n(x) = n\sin\dfrac{x}{n}$
9. $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$
10. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
11. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$
12. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$

13. $f_n(x) = \dfrac{x^4}{2+\sqrt{n x^4}}$ 14. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+1)}{\sqrt{x}+\sqrt[n]{n}+\sqrt{n}}$ 15. $f_n(x) = \dfrac{x^2+x+n}{x^2+n}$

16. $f_n(x) = \dfrac{2n^2x^4}{n^2x^4+n+3}$ 17. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$ 18. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$

IV. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-nx}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{n}+n\pi\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nx}$ 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nx^2}$

V. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ olyan monoton függvény, melyre a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n(a)|$ és a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n(b)|$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor abszolút- és egyenletesen konvergens.

VI. $\boxed{H}$ Legyen $a : \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{a_n}{n^x}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0,\infty[$ halmazon.

VII. $\boxed{H}$ Minden $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} n^2x & \text{ha} \quad x\in\left]0,\frac{1}{n}\right]; \\ 2n-n^2x & \text{ha} \quad x\in\left]\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]; \\ 0 & \text{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\left]0,\frac{2}{n}\right]. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint bizonyítsuk be, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens, de kváziegyenletesen konvergens[3].

VIII. $\boxed{H}$ Legyen $A\subseteq\mathbb{R}$, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n\in C(A,\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergál az A halmazon az $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényhez. Mutassuk meg, hogy ekkor $f\in C(A,\mathbb{R})$.

[3] Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *kváziegyenletesen konvergens az A halmazon*, ha létezik az $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény az A halmazon, és minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ és $N\in\mathbb{N}$ esetén létezik véges sok $N<n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ szám, hogy minden $x\in A$ elemre valamely $n_i\in\{n_1,\dots,n_k\}$ számra $|f(x)-f_{n_i}(x)|<\varepsilon$ teljesül. Vagyis az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergens az A halmazon, ha az $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvényre

$$\Big(A\subseteq\operatorname{Dom} f\Big)\ \wedge\ \Big((\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\forall N\in\mathbb{N})(\exists k\in\mathbb{N})(\exists\varphi : k\to\mathbb{N}\cap\,]N,\infty[)(\forall x\in A)(\exists i\in k)\left(\left|f(x)-f_{\varphi(i)}(x)\right|<\varepsilon\right)\Big)$$

teljesül.

IX. $\boxed{H}$ Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy a $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényre $f \in C(A, \mathbb{R})$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergens az A halmazon.

X. $\boxed{H}$ Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban haladó egyenletesen konvergens függvénysorozat. Igazoljuk, hogy az $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ függvénycsalád ekvifolytonos a K halmazon[4].

XI. $\boxed{H}$ Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$ halmazban haladó monoton függvények sorozata. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatból kiválasztható pontonként konvergens részsorozat.

XII. (*Dini-tétel.*) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C(M, \mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkent konvergens az M halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.

XIII. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathbb{Q}$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$ halmazon is.

XIV. Legyen $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x+k}{n+1}\right).$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontokénti határfüggvényt, és mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál a pontokénti határfüggvényhez.

XV. $\boxed{H}$ Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\{x\} = \mathrm{dist}_{\mathbb{Z}}(x)$, vagyis $\{x\}$ az x szám távolsága a legközelebbi egész számtól. A Lebesgue-féle integrálkritérium nélkül mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}$$

függvény szakadási helyeinek a halmaza megszámlálható, továbbá, hogy az f függvény Riemann-integrálható minden kompakt halmazon.

XVI. $\boxed{H}$ Igazoljuk, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén hozzárendeljük az $f_n(x) = f(nx)$ függvényt, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ függvénysorozat ekvifolytonos, akkor f állandó.

XVII. $\boxed{H}$ Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, és definiáljuk hozzá az s részletösszeg sorozatot és részletösszegek átlagát reprezentáló σ sorozatot

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

[4]Azt mondjuk, hogy az $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***függvénycsalád ekvifolytonos a K halmazon***, ha

$$\forall x \in K \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N} \forall y \in K : \ \Big(|x-y| < \delta \ \to |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k,$$

valamint a $P_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsort, melynek konvergenciasugara legyen R_a.

1. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$.
2. *(Abel-tétel.)* Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, akkor a $R_a \geq 1$, és $\lim_{1-} P_a = S$.
3. *(Frobenius-tétel.)* Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$, akkor a $R_a \geq 1$, és $\lim_{1-} P_a = S$.

XVIII. $\boxed{H}$ Minden $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ függvényre jelölje $T\gamma$ azt a $[0,1] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $t \in [0,1]$ esetén

$$(T\gamma)(t) = (1 - \gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Iterációval értelmezzük azt a $[0,1] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ függvényekből álló $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ t \mapsto (t,t)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\gamma_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $t \in [0,1]$ esetén

$$\gamma_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_n(9t), & \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{9}\right[; \\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-1) + (0, 1/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[; \\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-2) + (0, 2/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right[; \\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-3) + (2/3, 1), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right[; \\ -\frac{1}{3}\gamma_n(9t-4) + (2/3, 2/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right[; \\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-5) + (2/3, 1/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right[; \\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-6) + (2/3, 0), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right[; \\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-7) + (2/3, 1/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[; \\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-8) + (2/3, 2/3), & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \end{cases}$$

1. Rajzoljuk le a γ_1 és a γ_2 függvényt!
2. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén γ_n folytonos.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Ran}(\gamma_n) \subseteq [0,1]\times[0,1]$ és $\mathrm{Ran}(\gamma_n) \subseteq \mathrm{Ran}(\gamma_{n+1})$.
4. Igazoljuk, hogy minden $k < 9$ és $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra, valamint $t \in \left[\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right]$ pontra

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_\infty = \frac{1}{3}\|\gamma_n(9t-k) - \gamma_{n-1}(9t-k)\|_\infty$$

teljesül.

5. Igazoljuk, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\sup_{t\in[0,1]} \|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\|_\infty \leq \frac{3/2}{3^{\min(m,n)}}.$$
6. Igazoljuk, hogy a $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergens, valamint legyen $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.
7. Igazoljuk, hogy a γ függvény olyan $[0,1]\times[0,1]$ halmazban haladó folytonos ív, melyre
$$\mathrm{Ran}(\gamma) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ran}(\gamma_n)},$$
és a
$$D = \left\{ \left(\frac{j}{3^m}, \frac{k}{3^m} \right) \mid j, k, m \in \mathbb{N},\ j, k \leq 3^m \right\}$$
halmaz része az $\mathrm{Ran}(\gamma)$ halmaznak, és sűrű a $[0,1]\times[0,1]$ halmazban.
8. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ran}(\gamma) = [0,1]\times[0,1]$.

15.3. Függvénysorozat deriválása és integrálása

I. Az adott $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatok esetén számoljuk ki a
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}\,x, \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}\,x$$
mennyiségeket ha lehet! Mely függvénysorozatok esetén lesz a két mennyiség egyenlő egymással? Miért?

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n^{1/n}}$
3. $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \cup \{1\} \\ n, & \text{ha} \quad x \in \left]1-\frac{1}{n}, 1\right[\end{cases}$
4. $f_n(x) = \begin{cases} 1 - |nx|, & \text{ha} \quad x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{ha} \quad x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$
5. $f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{ha} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x^2} & \text{ha} \quad x \notin \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$
6. $f_n(x) = \begin{cases} 5 & \text{ha} \quad x \in [n, 2+n] \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin [0, 2+n] \end{cases}$

II. Teljesülnek-e minden $x \in \mathbb{R}$ számra az alábbi egyenlőségek?

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{\cos(n^2 x + 1)}{n^2+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(x + \frac{\cos(n^2 x + 1)}{n^2+1} \right)$$
2. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{1-x}{n}\right)}{n^2+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{1-x}{n}\right)}{n^2+1} \right)$$

III. Határozzuk meg az alábbi határértékeket.
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{arctg}\, n^5 x^2}{x + \sqrt{n}}\ \mathrm{d}\,x \qquad \lim_{x\to 0} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n \cos 2^n x}{x^4 + 4^n}$$

IV. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^x n\left(\ln\left(t+\frac{1}{n}\right) - \ln t\right) \,\mathrm{d}\,t = \ln x$$

teljesül.

V. Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+x^2}$$

2. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,\mathrm{e}^{-kx^2}\right) = -2x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

VI. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{2^{n-1}} \quad \text{és} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x}{k}}{k+1} \,.$$

Legyen $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

VII. $\boxed{H}$ Mutassuk meg, hogy minden $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$\int_0^1 x^n \log^k x \;\mathrm{d}\,x = (-1)^k \frac{k!}{(1+n)^{1+k}}$$

teljesül, vagyis speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 (-x\log x)^n \;\mathrm{d}\,x = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Majd ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} \;\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

teljesül.

VIII. $\boxed{H}$ Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan a $C(]0,\infty[\,,\mathbb{R})$ halmazban haladó, egyenletesen konvergens függvénysorozat, melyhez létezik olyan $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $|f_n| \le g$ teljesül, továbbá $\int_0^\infty g < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény improprius integrálja a $[0,\infty[$ halmazon, valamint, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n$$

teljesül.

IX. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I,\mathbb{R})$ olyan, melyre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az I halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

X. $\boxed{H}\boxed{H}$. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a I halmazon, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a I halmazon.

XI. $\boxed{H}$ Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $K \in \mathbb{R}^+$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ halmazban haladó, olyan függvénysorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f_n| \leq K$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ elemre legyen

$$F_n : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f_n.$$

Igazoljuk, hogy az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatból kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat.

XII. Legyen

$$\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \min\{|x - n| \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{\{10^n x\}}{10^n},$$

továbbá legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, az f függvény folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.

XIII. $\boxed{H}$ Legyen $f_0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$, vagyis $f_0 : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x$. Definiáljuk az

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} f_n(3x), & \text{ha} \quad x \in [0, 1/3[\,; \\ 1, & \text{ha} \quad x \in [1/3, 2/3[\,; \\ 1 + f_n(3x-2), & \text{ha} \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

rekurzióval az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot.

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|$, valamint $\|f_1 - f_0\| = \frac{1}{6}$.
2. Igazoljuk, hogy létezik az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény, és f folytonos.
3. Igazoljuk, hogy f monoton növő, majdnem mindenütt differenciálható, $f' = 0$ majdnem mindenütt, valamint $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$.
   (A fenti f függvényt nevezik *ördöglépcső függvénynek.*)

15.4. Taylor-sorfejtés

I. Határozzuk meg az alábbi függvények Taylor-sorát az adott pontban, és vizsgáljuk meg a sor konvergenciatartományát!

1. $f(x) = \frac{1}{8-x}$,	$x_0 = 0$,	9. $f(x) = \sin x$,	$x_0 = \frac{\pi}{4}$,
2. $f(x) = \frac{x}{8-x}$,	$x_0 = 0$,	10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1+6x^3}}$,	$x_0 = 0$,
3. $f(x) = \frac{x^2}{6-3x^2}$,	$x_0 = 0$,	11. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[9]{1+6x^3}}$,	$x_0 = 0$,

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 5}$, $x_0 = 4$,

5. $f(x) = x^3 \sqrt[3]{e^x}$ $x_0 = 0$,

6. $f(x) = e^{5x}$ $x_0 = -2$,

7. $f(x) = e^{2x} \operatorname{ch} 3x$, $x_0 = 0$,

8. $f(x) = \sin^3 x$, $x_0 = 0$,

12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27 - x^2}}$, $x_0 = 0$,

13. $f(x) = 2x \operatorname{arctg} 3x^2$, $x_0 = 0$,

14. $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$,

15. $f(x) = x \arcsin x^3$, $x_0 = 0$,

16. $f(x) = \cos x^2$, $x_0 = 0$.

II. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}} \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x^2$$

függvények 100. illetve 101. deriváltjait az $x_0 = 0$ pontban!

III. Az integrandust a nyolcadfokú Taylor-polinomjával közelítve adjunk becslést az

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \, \mathrm{d}\, x \qquad \int_0^{0.2} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} \, \mathrm{d}\, x$$

integrálokra, és becsüljük meg a hibát!

IV. Igazoljuk az alábbi azonosságokat a Taylor-sorfejtés segítségével!

1. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

2. $\ln(1 - x) = \sum_{k=0}^{\infty} -\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$

3. $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

4. $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

5. $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

6. $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$

7. $\sin^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$

8. $(x^2 + x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{k!} x^{k+1}$

9. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^a \dfrac{(x-a)^k}{k!}$

10. $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$

11. $\mathrm{e}^{(x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{k!}$

V. A Taylor-sorfejtés és a Cauchy-szorzat segítségével igazoljuk a következő sorfejtéseket!

1. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{4^k}{(4k)!} x^{4k}$

2. $\mathrm{e}^x \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{4^k}{(4k+1)!} \left(x^{4k+1} + \dfrac{1}{2k+1} x^{4k+2} + \dfrac{1}{(2k+1)(4k+3)} x^{4k+3} \right)$

VI. Igazoljuk az alábbi sorösszegeket.

1. $\ln(2) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots$

2. $\dfrac{\sin 1 + \operatorname{sh} 1}{2} = 1 + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{9!} + \dfrac{1}{13!} + \dfrac{1}{17!} - \dots$

3. $\dfrac{\operatorname{ch} 1 - \cos 1}{2} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{10!} + \dfrac{1}{14!} + \dfrac{1}{19!} - \dots$

4. $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dots$

5. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{3^2}{5} - \dfrac{3^3}{7} + \dfrac{3^4}{9} - \dfrac{3^5}{11} + \dfrac{3^6}{12} - \dots$

6. $\ln\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + \dfrac{1}{5\cdot 2^5} + \dfrac{1}{7\cdot 2^7} + \dfrac{1}{9\cdot 2^9} - \dots$

7. $\dfrac{\ln(2)}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\cdot 3^3} + \dfrac{1}{5\cdot 3^5} + \dfrac{1}{7\cdot 3^7} + \dfrac{1}{9\cdot 3^9} - \dots$

VII. Igazoljuk a trigonometrikus sorokra vonatkozó alábbi képleteket!

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{(n-1)x}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{(n-1)x}{2}$

3. $\displaystyle\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{ix(2k-n)}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\cos\sin x$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\sin\sin x$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{nx}{2}$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \sin\frac{nx}{2}$

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)!} = (\sin\cos x)(\operatorname{ch}\sin x)$

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)!} = (\cos\cos x)(\operatorname{sh}\sin x)$

VIII. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülnek az alábbiak.

1. Ha $x, p \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $p^2 - 2p\cos x + 1 \neq 0$, akkor
$$\sum_{k=0}^{n} p^k \sin(kx) = \frac{(p\sin x) + p^{n+1}\left(p\sin(nx) - \sin((n+1)x)\right)}{p^2 - 2p\cos x + 1}.$$

2. Ha $x \in \mathbb{C}\setminus\{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$, akkor $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sin(kx) = \frac{(n+1)\sin(nx) - n\sin((n+1)x)}{2(1-\cos x)}$.

3. Ha $x, p \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $p^2 - 2p\cos x + 1 \neq 0$, akkor
$$\sum_{k=0}^{n} p^k \cos(kx) = \frac{(1 - p\cos x) + p^{n+1}\left(p\cos(nx) - \cos((n+1)x)\right)}{p^2 - 2p\cos x + 1}.$$

4. Ha $x \in \mathbb{C}\setminus\{2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$, akkor $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx) = \frac{(n+1)\cos(nx) - n\cos((n+1)x) - 1}{2(1-\cos x)}$.

IX. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $q \in\ ]-1,1[$ esetén
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\sin(kx) = \frac{q\sin x}{q^2 - 2q\cos x + 1} \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos(kx) = \frac{1 - q\cos x}{q^2 - 2q\cos x + 1}$$
teljesül.

16. Approximáció

I. Legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}\, x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{\pi n} \,\mathrm{d}\, x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{nx} \,\mathrm{d}\, x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.

II. Legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 f(x)\sin(nx) \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 f(x)\cos(nx) \,\mathrm{d}\, x = 0$$

teljesül, akkor $f = 0$.

III. Legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\int_0^1 f(x) \left(x^{n+1}(1-x)^2\right)'' \,\mathrm{d}\, x = 0$$

teljesül, akkor f lineáris.

IV. $\boxed{H}$ Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy létezik polinomokból álló olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f - p_n)^2 = 0 \;.$$

V. $\boxed{H}$ Definiáljuk rekurzióval polinomok $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát: legyen $p_0 = 0$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{x^2 - p_n^2(x)}{2} \;.$$

Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [-1,1]$ esetén

$$0 \le |x| - p_n(x) \le \frac{2\,|x|}{2 + n\,|x|} \;.$$

Tehát a $[-1,1]$ intervallumon a $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen konvergál az $|\cdot|$ függvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left||x| - p_n(x)\right| = 0 \;.$$

VI. Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

1. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b]\times[c,d], \mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1, \ldots, n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i \in C([a,b], \mathbb{R})$ és $\beta_i \in C([c,d], \mathbb{R})$ függvények, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

2. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b] \times [c,d], \mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1, \ldots, n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

VII. Legyen $(T, \mathfrak{T})$ és $(T', \mathfrak{T}')$ kompakt, T_2 topologikus tér. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C(T \times T', \mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1, \ldots, n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i \in C(T, \mathbb{R})$ és $\beta_i \in C(T', \mathbb{R})$ függvények, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y) \in T \times T'} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

VIII. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, W a $C([a,b], \mathbb{R})$ tér konvex függvényeinek a részhalmaza, azaz $W = \{f \in C([a,b], \mathbb{R}) \mid f \text{ konvex}\}$, valamint legyen

$$A = W - W \qquad \Big(= \{f - g \mid f, g \in W\}\Big).$$

1. Mutassuk meg, hogy A lineáris altér.
2. Mutassuk meg, hogy minden $f, g \in W$ függvényre $\sup(f,g) \in W$ teljesül, ahol

$$\sup(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sup(f(x), g(x)).$$

3. Legyen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in W$. Mutassuk meg, hogy

$$\sup(f_1 - g_1, f_2 - g_2) = \sup(f_1 + g_2, f_2 + g_1) - (g_1 + g_2)$$

teljesül; vagyis minden $h_1, h_2 \in A$ esetén $\sup(h_1, h_2) \in A$.
4. Mutassuk meg, hogy minden $f \in A$ függvény esetén $|f| \in A$ teljesül.
5. Mutassuk meg, hogy A sűrű a $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.

17. Vektorterek

I. Írjuk fel a következő kifejezések a Kronecker-delták segítségével.

1. Adott $j, k, l, m, n, s \in \{1,2,3,4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{imns} = ?$
2. Adott $k, l, n, s \in \{1,2,3,4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijns} = ?$
3. Adott $l, s \in \{1,2,3,4\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{4} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijks} = ?$
4. $\displaystyle\sum_{i,j,k,l=1}^{4} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} = ?$

II. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ vektorra teljesülnek az alábbiak.

1. $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$
2. $(a \times b) \times (c \times d) = -\langle a, b \times c\rangle\, d + \langle a, b \times d\rangle\, c + \langle a, b \times d\rangle\, c$
3. $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle$
4. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

III. Affin alterek.

1. Írjuk fel a $A = (2, 3, 1)$ és a $B = (4, 5, -1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és irányvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.
3. Írjuk fel a $A = (2, 3, 4)$, $B = (4, 5, -1)$ és a $C = (3, 1, 3)$ pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és normálvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.

IV. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a $(2, 1, 3)$ és a $(4, 6, -1)$ pont távolsága?
2. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és az $r(t) = (1, 12, 3) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes távolsága?
3. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és a $2x - 4y + 2z = 1$ sík távolsága?
4. Mekkora az $\dfrac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$ és a $2 - x = y - 5 = z + 1$ egyenesek távolsága?
5. Mekkora az $r(t) = (1, 1, 3) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $x - 2y + z = 1$ sík távolsága?
6. Mekkora a $2x - 4y + 2z = 1$ és az $x - 2y + z = 1$ síkok távolsága?

V. Alterek.

1. Az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvénytérben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

    1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
    2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
    3. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ kétszer differenciálható, } f''(x) + xf(x) = 0\}$
    4. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0\}$
    5. $\left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int\limits_{\mathbb{R}} |f| < \infty\right\}$

2. A valós sorozatok $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

    1. $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ : \ a_1 = 2a_3 + 3a_5\}$
    2. $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ : \ a_2 = a_4 a_5\}$
    3. $\left\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right\}$
    4. $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ : \ a \text{ számtani sorozat}\}$
    5. $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ : \ a \text{ mértani sorozat}\}$

VI. Legyen V valós, skalárszorzással ellátott n dimenziós vektortér és legyen:

$$\mathrm{Lin}(V, V) = \{f : V \to V \mid f \quad \text{lineáris}\}\,.$$

Igazoljuk, hogy

1. $\mathrm{Lin}(V, V)$ n^2 dimenziós vektortér;
2. a $V \to V$ szimmetrikus lineáris leképzések tere $n(n+1)/2$ dimenziós vektortér;
3. a $V \to V$ antiszimmetrikus lineáris leképzések tere $n(n-1)/2$ dimenziós vektortér.

(Egy leképezés szimmetrikus, ha létezik olyan ortonormált bázis, melyben a leképezés mátrixa szimmetrikus.)

VII. Lineáris függetlenség.

1. Ha u és v lineárisan független vektorok, akkor milyen α, β, γ és δ paraméterek esetén lesznek az $\alpha u + \beta v$, $\gamma u + \delta v$ vektorok lineárisan függetlenek?
2. Igaz-e, hogy ha az $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ vektorok közül bármely 9 vektor lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független?
3. Hány lineárisan független vektor van az
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\2\\1\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$
vektorok között?
4. Felírható-e az $x^3 + 7x^2 + 5$ polinom az $x^3 + 2x$, $3x^3 + 4x$ és $5x^2 + 6x$ polinomok lineáris kombinációjaként?
5. Az $\left\{a + b\cos x + c\cos^2 x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ térben bázist alkotnak-e az $1 + \cos x$, $\cos x + \cos^2 x$ és $\cos 2x$ vektorok?

VIII. Skaláris szorzást definiálnak-e a V vektortéren az alábbi kifejezések?

1.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$
2.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g'$
3.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g' + f(0)g(0)$
4.	$V = \mathbb{R}^2$	$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$
5.	$V = \mathbb{R}^3$	$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_3y_3$
6.	$V = R^3$	$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$

IX. Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben a megszokott skalárszorzást. Számoljuk ki, hogy az n dimenziós egységkockának milyen hosszú a testátlója, és mekkora szöget zár be egy oldalélled!

X. Igazoljuk valós V vektortérben az alábbi következtetéseket:

1. $(x+y) \perp (x-y)$ pontosan akkor, ha $\|x\| = \|y\|$;
2. ha $\|x\| = \|y\| = 1$ és $x \perp y$, akkor $\|x - y\| = \sqrt{2}$;
3. ha x_1, x_2, x_3, x_4 ortonormált rendszer, akkor a
$$(x_1 + x_2), (x_1 - x_2), (x_3 + x_4), (x_3 - x_4)$$
vektornégyes ortogonális rendszert alkot;
4. az $\{y \in V | x \perp y\}$ halmaz altér V-ben.

XI. Tekintsük a $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ és $q(x) = x^2 + 2x + 5$ polinomot.

1. Ha $p, q \in \mathcal{P}_3$, és a skalárszorzás a következő

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} u_i x^i \quad v(x) = \sum_{i=0}^{3} v_i x^i \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{3} u_i v_i \ ,$$

akkor mekkora a p és a q polinom normája, és mekkora a bezárt szögük?
2. Ha $p, q \in L^2([0,1], \mathbb{R})$, és a skalárszorzás a következő

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x,$$

akkor mekkora a két polinom normája és a bezárt szögük?

XII. Tekintsük a trigonometrikus polinomok V vektorterét, azaz legyen

$$V = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \ \middle|\ \text{a } \left\{ k \in \mathbb{N} \ \middle|\ |a_k|^2 + |b_k|^2 \neq 0 \right\} \text{ halmaz véges} \right\} .$$

Igazoljuk, hogy a $(\sin kx)_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$, $(\cos kx)_{k \in \mathbb{N}}$ vektorrendszerek ortogonálisak, ha a skaláris szorzást a

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

képlettel adja meg. Normáljuk a megadott vektorrendszert.

XIII. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$p_n(x) = \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)} .$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $p_n(x)$ polinom.
2. Mutassuk meg, hogy a polinomrendszer ortogonális, ha a skalárszorzás

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

XIV. Adjuk meg az alábbi skalárszorzatos vektorterekben a kezdeti vektorok Gram–Schmidt ortogonalizáltját!

1. A vektortér az $\mathbb{R}^3$, két vektor skaláris szorzata

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ ,$$

a kezdeti vektorok $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$ és $v_3 = (3, 2, 1)$.
2. A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\ \mathrm{d}\,x \ ,$$

a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.
3. A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(1)q(1) + p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1) \ ,$$

a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.

XV. Igazoljuk, az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $x^2+y^2+z^2=1$, akkor $x+2y+3z \leq \sqrt{14}$.
2. Ha $x^2+y^2+z^2+v^2=1$, akkor $x+2y+3z+4v \leq \sqrt{30}$.
3. Általánosabban, ha $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$, akkor
$$\sum_{k=1}^{n} kx_k \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
teljesül!

18. Mátrixszámítás

I. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok k-adik ($k \in \mathbb{N}$) hatványát.
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$
2. Számoljuk ki a következő mátrixhatványt.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2$$
3. Egy A mátrix esetén legyen
$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} .$$
Számítsuk ki az e^A mátrixot, ha az A mátrix a következő alakú, valamilyen $t \in \mathbb{R}$ valósra.
$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

III. Számoljuk ki az alábbi mátrixok rangját.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\,\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 3 & \mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \\ 4\,\mathrm{i} & -3 & -1+4\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

IV. Rangszámítás.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját ($a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

2. Igazoljuk, hogy egy A mátrix rangja pontosan akkor 1, ha felírható diadikus szorzat alakjában.
3. Határozzuk meg az $A_{ij} = 1 + (-1)^{i+j}$ kifejezéssel adott $n \times n$-es mátrix rangját.
4. Igazoljuk, hogy ha egy mátrix sorai és oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.

V. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2, illetve 3?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{pmatrix}$$

VI. Determinánsszámítás.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $(x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} b & c & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & b & c & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & \ln 1 & \ln 2 \end{pmatrix}$

2. Adott a és b paraméterek esetén legyen $A_{ij} = b + (a-b)\delta_{ij}$ egy $n \times n$-es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.
3. Adott $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén legyen $A_{ij} = a_i^{j-1}$ egy $n \times n$-es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.
4. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Határozzuk meg a következő mennyiségeket.

$$\det(A^{-1}) \quad \det(A^{80}) \quad \det(3A) \quad \det(A+E) \quad \det(A^T)$$

VII. Tekintsük a $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vektorteret. Lineáris operátort határoznak-e meg az $f(x) \mapsto 1+f(x)$, $f(x) \mapsto f(1+x)$ és $f(x) \mapsto f(x)^2$ leképezések?

VIII. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok $\mathcal{P}_2$ vektorterén az alábbi leképezéseket.

$$(T_1p)(x) = p(x+1) \quad (T_2p)(x) = p'(x) \quad (T_3p)(x) = 2p(3x+1)$$

Írjuk fel ezen leképezések mátrixát az $\{1, x, x^2\}$ bázisban.

IX. Legyen V véges dimenziós vektortér és $A : V \to V$ lineáris operátor. Igazoljuk a

$$\exists A^{-1} \quad \iff \quad \operatorname{Ker} A = \{0\} \quad \iff \quad \operatorname{Ran} A = V$$

ekvivalenciákat.

X. Milyen V vektorterekben létezik olyan $A : V \to V$ lineáris operátor melyre $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ran} A$ teljesül?

XI. A $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

$$T(2,-1) = (-1,2,0) \quad T(1,3) = (0,-3,5)\ .$$

Mi lesz a $(2,-3)$ vektor képe?

XII. A V vektortér egy bázisa az e_1, e_2, e_3 vektorokból áll. Ebben a bázisban a T lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

alakú. Adjunk meg egy-egy bázist T képterében és magterében.

XIII. A másodfokú polinomok $\mathcal{P}_2$ vektorterében tekintsük az $3x+3x^2, -1+3x+2x^2, 3+7x+2x^2$ vektorokból álló bázist. Ebben a bázisban a T lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

alakú. Adjunk meg a $T(1+x^2)$ vektort.

XIV. A V vektorteret az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben az $(e_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal koordinátázzuk a $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben pedig az $(f_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal. Amennyiben a T lineáris leképzést a $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben határozzuk meg T mátrixát $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben az alábbi esetekben.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,2)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,-1)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (2,2,1)$, $f_3 = (1,2,4)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A fenti példák alapján fogalmazzuk meg precízen és igazoljuk az *A determináns és a nyom bázisfüggetlen.* kijelentést.

XV. Az $\mathbb{R}^2$ térben legyen B_1 az $(1,0),(0,1)$ vektorokból és B_1' az $(1,3),(-2,4)$ vektorokból álló bázis. Az $\mathbb{R}^3$ térben legyen B_2 az $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ vektorokból és B_2' az $(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)$ vektorokból álló bázis. A $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa a B_1,B_2 bázisban

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

alakú. Írjuk fel T mátrixát a B_1',B_2' bázisban.

XVI. Egy transzformáció mátrixa egy bázisban $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Keressünk olyan bázist, melyben a mátrix $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ alakú.

XVII. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v\in\mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v=(1,-1,2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n\in\mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n=(1,-1,2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x,y) síkbeli $\varphi\in\mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1,1,0)$ tengely körüli $\varphi\in\mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

5* Határozzuk meg az $n\in\mathbb{R}^3$ tengely körüli $\varphi\in\mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

XVIII. Mi lesz az $A+B$ leképezés, illetve teljesül-e az $AB=BA$ egyenlet, ha

1. A az x-tengelyre tükröz és B az y-tengelyre tükröz;
2. A forgat $\pi/3$ szöggel és B $-\pi/3$ szöggel forgat;
3. A helybenhagy és B $\pi/2$ szöggel forgat?

XIX. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorai!

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&-3\\2&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

XX. Tekintsük az $A=\begin{pmatrix}1&5&2\\5&4&7\\2&7&9\end{pmatrix}$ mátrixot, melynek sajátértékeit jelölje λ_1, λ_2 és λ_3. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket.

1. $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$
2. $\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}+\dfrac{1}{\lambda_3}$
3. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3\lambda_1}+\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}$

XXI. Tegyük fel, hogy az $O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix az $\mathbb{R}^3$ térben egy tengely körüli forgatást ír le. Határozzuk meg a tengelyt és a forgatás szögét.

XXII. Tekinstük a

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S$ alakban.
3. Határozzuk meg a mátrixok századik hatványát.
4. Számoljuk ki a mátrixok szinuszát, koszinuszát és exponenciálisát a

$$\sin(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} \qquad \cos(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} \qquad \exp(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$$

   definíciókat használva.

XXIII. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az A mátrixot

$$S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S$$

   alakban.
3. Határozzuk meg az A^{100}, A^{-1} és az e^A mátrixot.
4. Minden v_i $(i = 1, 2, 3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a P_i projekciót, mely az origón átmenő v_i irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
5. Mutassuk meg, hogy

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

   teljesül.

XXIV. Tekintsük az $A = \mathrm{i} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Mutassuk meg, hogy az A mátrix normális, de nem önadjungált.
2. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.
3. Írjuk fel a mátrix spektrálfelbontását.
4. Számoljuk az A^{100} mátrixot.

XXV. Tekinstük a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = -\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

mátrixokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, mint $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineáris leképezéseket.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S$ alakban.
3. Határozzuk meg a mátrixok századik hatványát.
4. Számoljuk ki a mátrixok szinuszát, koszinuszát és exponenciálisát a

$$\sin(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} \qquad \cos(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} \qquad \exp(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$$

   definíciókat használva.

XXVI. Adjuk meg a következő mátrixok Jordan-alakját, valamint az eredeti bázist a mátrix kanonikus bázisába vivő leképezés mátrixát is!

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -4 & -6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

XXVII. Határozzuk meg a hatványsorral értelmezett $\exp A$ és $\operatorname{ch} A$ mátrixokat, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

XXVIII. Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Legyen $(\lambda_i)_{i\in I}$ a mátrix sajátértéke. Határozzuk meg a $\sum_{i\in I} \lambda_i$, $\sum_{i\in I} \lambda_i^2$ és a $\sum_{i\in I} \lambda_i^3$ mennyiségeket.

XXIX. Legyen V vektortér és $A, B : V \to V$ lineáris leképezés. Melyik állítás igaz?

1. Ha $A + B = E$, akkor A és B sajátvektorai ugyan azok.
2. Az $A^2 = 0$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha A-nak csak a 0 szám a sajátértéke.
3. Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor sajátértéke A-nak is.
4. A λ^2 szám pontosan akkor sajátértéke A^2-nek, ha λ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak.

XXX. Projekciók.

1. Milyen P és Q projekciók esetén lesz $P + Q$ projekció?
2. Milyen P és Q projekciók esetén lesz $P - Q$ projekció?
3. Mutassuk meg, hogy P és Q projekciók esetén

$$PQ = 0 \iff QP = 0 \iff \operatorname{Ran} P \perp \operatorname{Ran} Q$$

   teljesül.

4. Mutassuk meg, hogy egy P operátor pontosan akkor projekció, ha $P = P^*P$ teljesül.

XXXI. Egy $n \times n$-es valós O mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha $OO^T = O^TO = I_n$ teljesül, ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrix. Az $n \times n$-es valós ortogonális mátrixok halmazát jelölje $O(n)$. Igazoljuk, hogy ortogonális

1. mátrixok szorzata ortogonális;
2. mátrix determinánsa ± 1;
3. mátrix inverze ortogonális;
4. mátrix az $\mathbb{R}^n$ tér standard ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi.

XXXII. Tekintsük az alábbi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kvadratikus formákat.

$$A(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} ijx_ix_j \qquad B(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} (i + j - 1)x_ix_j$$

1. Hogyan lehet szimmetrikus illetve antiszimmetrikus leképezések összegeként felírni ezeket?
2. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3$ térben egy olyan bázist, melyben a kvadratikus kifejezés mátrixa diagonális.

XXXIII. Írjuk fel négyzetek előjeles összegeként az alábbi kifejezéseket.

1. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$
2. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + 2x_1x_2$
4. $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le 4} x_ix_j$
5. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 4} x_ix_j$

XXXIV. Igazoljuk, hogy az alábbi két kvadratikus kifejezés pozitív szemidefinit, ahol $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. $\displaystyle A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} x_ix_k$
2. $\displaystyle A(x_1, \dots, x_n) = (n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} x_ix_k$

XXXV. Legyen $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skalárszorzatos vektortér és $T : V \to V$ pozitív operátor. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in V$ esetén

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \le \langle Tx, x\rangle \langle Ty, y\rangle$$

teljesül.

XXXVI. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret az euklidészi skaláris szorzással és azt az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A pozitív definit.
2. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan pozív mátrix létezik, melynek a négyzete A. (Ennek a jele $A^{\frac{1}{2}}$.)

3. Számoljuk ki az $A^{\frac{1}{2}}$ mátrixot.
4. Hány olyan (valós) mátrix van, melynek a négyzete A?

XXXVII. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük az alábbi halmazokat.

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz \le R^2\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz + 16x - 8y + 20z + 30 \le R^2\right\}$$

Használjuk fel, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}^p$ féltengelyű ellipszoid térfogata az $\mathbb{R}^3$ euklidészi térben $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$, valamint, hogy az $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit az Ω_1 és Ω_2 halmaz térfogatának a meghatározásához.

XXXVIII. A polinomok $\mathcal{P}$ vektorterén tekintsük a következő lineáris operátorokat

$$(Qp)(x) = xp(x) \quad (Pp)(x) = \frac{\mathrm{d}\,p(x)}{\mathrm{d}\,x}\ .$$

Igazoljuk, hogy a P és Q operátorok kielégítik az

$$PQ - QP = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

egyenletet!

XXXIX. $\boxed{H}$ Legyen A $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékekkel.

1. Határozzuk meg az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \det \mathrm{e}^{tA}$$
függvény deriváltját!
2. Ezek alapján igazoljuk a
$$\det \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Tr}\,A}$$
összefüggést!

XL. $\boxed{H}$ Cayley–Hamilton-tétel.

1. Számoljuk ki az alábbi mátrixok inverzét.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I$ mátrixot.
3. Legyen $A, B \in \mathrm{M}(2, \mathbb{C})$, vagyis A 2×2-es komplex mátrix. Mutassuk meg, hogy ha $A = AB - BA$ teljesül, akkor $A^2 = 0$.
4. Legyen $A \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, vagyis A olyan 3×3-as valós mátrix, melynek determinánsa 1. Tegyük fel, hogy az A egyik sajátértéke $\lambda_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$. Mely $a, b, c \in \mathbb{C}$ számokkal fog teljesülni az $A^{100} = aA^2 + bA + cI$ egyenlőség?

XLI. $\boxed{H}$ Rendezés az önadjungált mátrixok halmazán.

1. Adjunk meg olyan A, B önadjungált 2×2-es mátrixokat, melyre $A \not\leq B$ és $B \not\leq A$ teljesül.
2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $A \leq B$ és $A^2 \not\leq B^2$.
3. Legyen P, Q $n \times n$-es komplex projekció. Mutassuk meg, hogy

$$P \leq Q \Longleftrightarrow P = PQ \Longleftrightarrow P = QP$$

teljesül.

XLII. $\boxed{H}$ Tekintsük a $V = \mathbb{R}^2$ teret, benne az $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ bázist, a hozzá tartozó $p_1, p_2 \in V^*$ duális bázist (azaz $p_i(e_j) = \delta_{ij}$), valamint azt a $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ skalárist szorzást, melyet ha bázisvektorokra hattatunk $\langle e_i, e_k \rangle = g_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$, akkor a

$$[g_{ik}]_{i,k=1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. Definiáljuk még a

$$j : V \to V^* \qquad x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$$

leképezést.

1. Mi lesz az $x = (1, 3) \in V$ vektor j általi képe? (Azaz mely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra fog teljesülni a $j(x) = ap_1 + bp_2$ egyenlőség?)
2. A j leképezés segítségével definájuk a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*} : V^* \times V^* \to \mathbb{R} \qquad (p, q) \mapsto \left\langle j^{-1}(p), j^{-1}(q) \right\rangle$$

műveletet. Határozzuk meg a $\langle p_i, p_k \rangle_{V^*} = g^{ik}$ $(i, k = 1, 2)$ mátrixot.

3. Adott $i, j \in \{1, 2\}$ esetén mit mondhatunk a $g_{ik}g^{jk}$ mennyiségről? (összegzés a k indexre beleértve a formulába.)

XLIII. $\boxed{H}$ Legyen $\mathcal{A} = \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$. Mutassuk meg, hogy ha a $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lineáris leképezésre minden $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ teljesül, akkor φ azonosan nulla.

XLIV. $\boxed{H}$ Legyen E véges dimenziós valós vagy komplex normált tér és

$$g : E \times E \to K \qquad (x, y) \mapsto g(x, y)$$

olyan folytonos bilineáris funkcionál, hogy a

$$\breve{g} : E \to E' \qquad x \mapsto g(x, \cdot)$$

leképezés bijekció. Ha $f : E \to K$ tetszőleges függvény, akkor a

$$\operatorname{grad}_g(f) = \breve{g}^{-1} \circ \mathrm{d}\, f : E \to E$$

leképezés az *f függvény g-gradiense* és a

$$\mathrm{Tr}_E \circ \mathrm{d}(\breve{g}^{-1} \circ \mathrm{d}\, f) : E \to \mathbb{C}$$

leképezés az *f függvény g-Laplace-függvénye.* Legyen $1 < n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$ és

$$g_1 : E \times E \to \mathbb{R} \qquad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_n y_n,$$

$$g_2 : E \times E \to \mathbb{R} \qquad ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto -x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_n y_n$$

bilinéáris leképezések. Számoljuk ki tetszőleges $f : E \to \mathbb{R}$ függvényre a $\mathrm{grad}_{g_1} f$, $\mathrm{grad}_{g_2} f$ függvényeket valamint a g_1- és g_2-Laplace-függvényét f-nek!

XLV. $\boxed{F}$ A $V = \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ vektortérben vegyük a kanonikus bázist, és ebben a bázisban írjuk fel annak a lineáris leképezésnek megfelelő mátrixot, mely α szöggel forgat az origó körül. Írjuk fel az $\mathrm{i}\,\alpha$ szöggel való forgatás $A(\alpha)$ mátrixát és igazoljuk, hogy

$$A(\alpha) : \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \qquad (x, \mathrm{i} \cdot y) \mapsto \big(x \operatorname{ch} \alpha - y \operatorname{sh} \alpha, \mathrm{i} \cdot (-x \operatorname{sh} \alpha + y \operatorname{ch} \alpha)\big)$$

teljesül. Legyen c pozitív valós paraméter és

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto (x, \mathrm{i}\, ct)$$

leképezés. Számoljuk ki az

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (\phi^{-1} \circ A(\alpha) \circ \phi)(x, y)$$

lineáris leképezés mátrixát! Igazoljuk, hogy $|v| < c$ valós paraméter esetén, ha $\alpha = \operatorname{arth}(v/c)$, akkor

$$L(v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, t) \mapsto \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \frac{t - x\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \right)!$$

Igazoljuk, hogy ha $L(v_1) \circ L(v_2) = L(v_3)$ és $L(u_1) \circ L(u_2) \circ L(u_3) = L(u_4)$ akkor

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}, \qquad u_4 = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{1 + \dfrac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}{c^2}} + \frac{u_1 u_2 u_3}{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}$$

teljesül!

XLVI. $\boxed{F}$ Legyen a tetszőleges valós paraméter és

$$\begin{array}{lll} L(a) & : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & x \mapsto a + x \\ \mathrm{pr}_1 & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (x, y) \mapsto x \end{array}$$

leképezések.

1. Keressünk olyan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezést és $A(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melyre

$$\mathrm{pr}_1 \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{pr}_1 \circ A(a) \circ \phi = L(a)$$

teljesül!

2. A 3×3-as R mátrixot ortogonálisnak nevezzük, ha a soraiból képzett vektorok ortonormált rendszert alkotnak. A 3×3-as egységnyi determinánsú mátrixok halmazát $SO(3)$ jelöli. (Minden $R \in SO(3)$ mátrix egy térbeli vektor körüli forgatás transzformációjának felel meg.) Adott $R \in SO(3)$ forgatáshoz, $\underline{v}, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^3$ vektorokhoz és $\tau \in \mathbb{R}$ számhoz definiáljuk a

$$G(R, \underline{v}, \underline{\xi}, \tau) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \qquad (\underline{x}, t) \mapsto (R\underline{x} + t\underline{v} + \underline{\xi}, t + \tau)$$

leképezést. Adjunk meg olyan $A(R,\underline{v},\underline{\xi},\tau):\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ lineáris leképezést és $\phi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^5$ függvényt melyre

$$\mathrm{pr}_{1-4}\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{pr}_{1-4}\circ A(R,\underline{v},\underline{\xi},\tau)\circ\phi=G(R,\underline{v},\underline{\xi},\tau)$$

teljesül, ahol

$$\mathrm{pr}_{1-4}:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \qquad (q_1,q_2,q_3,q_4,q_5)\mapsto\big((q_1,q_2,q_3),q_4\big)$$

leképezés!

3. Igazoljuk, hogy

$$G(R_2,\underline{v_2},\underline{\xi_2},\tau_2)\circ G(R_1,\underline{v_1},\underline{\xi_1},\tau_1)=G(R_3,\underline{v_3},\underline{\xi_3},\tau_3)$$

esetén

$$R_3=R_2R_1,\quad \underline{v}_3=R_2\underline{v}_1+\underline{v}_2,\quad \underline{\xi}_3=R_2\underline{\xi}_1+\underline{v}_2\tau_1+\underline{\xi}_2,\quad \tau_3=\tau_1+\tau_2$$

teljesül!

Figyeljük meg, hogy a fenti transzformáció nem más mint a Galilei-transzformáció vagyis az inerciális koordinátarendszerből egy másik inercális koordinátarendszerbe való áttérés. Az R transzformáció a koordinátarendszerek elforgatását jelenti, $\underline{v}$ a sebességét, $\underline{\xi}$ a térbeli eltolást és τ az időbeli eltolást.

XLVII. Legyen V legalább három dimenziós skalárszorzatos vektortér, $x,y,z\in V$ három lineárisan független vektor, továbbá legyen

$$A=\begin{pmatrix}\|x\|^2 & \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle\\ \langle y,x\rangle & \|y\|^2 & \langle y,z\rangle\\ \langle z,x\rangle & \langle z,y\rangle & \|z\|^2\end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az A mátrix pozitív definit, annak a segítségével, hogy minden $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ nemnulla vektorra

$$\langle(a,b,c),A(a,b,c)\rangle=\langle ax+by+cz,ax+by+cz\rangle>0.$$

Ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle\langle z,x\rangle)\geq\|x\|^2|\langle y,z\rangle|^2+\|y\|^2|\langle x,z\rangle|^2+\|z\|^2|\langle x,y\rangle|^2$$

teljesül minden $x,y,z\in V$ vektorra, valamint lineárisan független $x,y,z\in V$ vektorra szigorú egyenlőtlenség teljesül.

19. Egyenletrendszerek

I. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket (ahol $s\in\mathbb{R}$).

1. $\begin{cases}x_1+x_2+sx_3=0\\ x_1+sx_2+x_3=0\\ sx_1+x_2+x_3=0\end{cases}$

2. $\begin{cases}3x_1-x_2+4x_3=-1\\ x_1+x_2-2x_3=3\\ 2x_1+x_3=1\\ x_1+x_2=-4\end{cases}$

3. $\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$

4. $\begin{cases}4x_1+5x_2=6\\ 7x_1+8x_2=9\end{cases}$

5. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=3\\ 4x_1+4x_2+5x_3=6\\ 7x_1+7x_2+8x_3=10\end{cases}$

6. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1\\ 5x_1+6x_2+7x_3=8\\ 9x_1+10x_2+11x_3=12\end{cases}$

II. Mely állítások igazak az $Ax=b$ egyenletrendszerre az alábbiak közül?

1. Ha $Ax = b$ megoldható, akkor $[A, b]$ oszlopai lineárisan összefüggők.
2. Ha $[A, b]$ oszlopai összefüggők, akkor létezik megoldás.
3. Ha A oszlopai függetlenek, akkor létezik megoldás.
4. Ha A sorai függetlenek, akkor van megoldás.
5. Ha pontosan egy megoldás létezik, akkor A sorai lineárisan függetlenek.
6. Ha pontosan egy megoldás létezik, akkor A oszlopai lineárisan függetlenek.

III. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a pozitív valós számok halmazán.

1. $$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$
2. $$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & u & 0 \\ z & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 18 \\ 23 & 41 & 30 \\ 18 & 30 & 36 \end{pmatrix}$$

IV. Tetszőleges $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

V. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 7x_1 + x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -7 \\ 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 = -8 \end{cases}$$

VI. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén van az alábbi egyenletrendszereknek nulla, pontosan egy, illetve végtelen sok megoldása?

1. $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x + y + z + 2v = 1 \\ x + 2y + z + v = 2 \\ 2x + by + z - v = 3 \\ 2x + 2y - z - v = a \end{cases}$$
3. $$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax + y + 3z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

20. Fourier-sorfejtés

I. Igazoljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x) = \pi - x$ $$\mathcal{F}(f)(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}$$
2. $f(x) = |\sin x|$ $$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$
3. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

4. $f(x) = \pi - \dfrac{x^2}{\pi}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{k^2}$

II. Igazoljuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a \in\,]0, 1[$.

1. $f(x) = x^2$ $\qquad$ $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx$

2. $f(x) = \sin(ax)$ $\qquad$ $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\sin^2(\pi a)}{\pi a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx + \frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$

3. $f(x) = x^4$ $\qquad$ $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{16\pi^4}{5} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\cos kx - 16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\sin kx$

4. $f(x) = \dfrac{2\pi\,\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2\pi a} - 1}$ $\qquad$ $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2+k^2}\cos kx - \frac{2k}{a^2+k^2}\sin kx$

III. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk az

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1-\pi a\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi a\operatorname{cth}(\pi a)-1}{2a^2}$$

egyenlőségeket, ahol $a \in\,]0, 1[$.

IV. Határozzuk meg az alábbi $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát, ahol $a \in\,]0, \pi[$ paraméter.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < a, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq a. \end{cases}$ $\qquad$ 2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| < a, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq a. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \log\left|2\cos\dfrac{x}{2}\right|, & \text{ha } |x| < \pi, \\ 0, & \text{ha } |x| = \pi. \end{cases}$ $\qquad$ 4*. $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \log\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}\,t, & \text{ha } |x| < \pi, \\ 0, & \text{ha } |x| = \pi. \end{cases}$

Ennek alapján igazoljuk, hogy minden $a \in\,]0, \pi[$ paraméter esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi - a}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

teljesül.

V. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és az

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

Fourier-sora egyenletesen konvergens.

1. Határozzuk meg az $f(-x)$ függvény Fourier sorát.
2. Tetszőleges $h \in \mathbb{R}^+$ esetén határozzuk meg az

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f$$

függvény Fourier-sorát.

3. Ha az f függvény π szerint periodikus, akkor mit mondhatunk a Fourier-együtthatóiról?

VI. $\boxed{H}$ Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és legyen $\rho : I \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, hogy legyen

$$H(I,\rho) = \left\{ f \in C(I,\mathbb{R}) | \int_I \rho f^2 < \infty \right\}$$

vektortér, és a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H(I,\rho) \times H(I,\rho) \to R \qquad (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_I \rho f g$$

művelet legyen skaláris szorzás. Igazoljuk, hogy az alábbi esetekben teljesül a fenti feltétel.

1. $I = [0,\infty[$, $\rho(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $I = [-1,1]$, $\rho(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

Határozzuk meg az $1, \mathrm{id}_I, \mathrm{id}_I^2 \in H(I,\rho)$ vektorokból képzett ortonormált rendszert.

VII. $\boxed{F}$ Legyen D és l pozitív valós paraméter és Φ_0 olyan differenciálható függvény a $[0,l]$ intervallumon, melyre $\Phi_0(0) = \Phi_0(l) = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy a

$$\Phi : [0,l] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,t) \mapsto \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{Dk^2\pi^2}{l^2}t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cdot \int_0^l \Phi_0(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \,\mathrm{d}\,\xi$$

függvény megoldása a

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletnek a $[0,l] \times \mathbb{R}^+$ halmazon, és

$$\Phi(x,0) = \Phi_0(x), \quad \Phi(0,t) = \Phi(l,t) = 0$$

teljesül!

Egy l hosszúságú vékony rúd hőmérsékelt eloszlását írja le a Φ függvény, ha a $t_0 = 0$ kezdeti időpillanatban a rúd kezdeti hőmérséklet eloszlása Φ_0 volt.

(*) Indokoljuk meg, hogy a fenti differenciálegyenletnél miért indokoltabb fizikailag a (jóval bonyolultabb)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

differenciálegyenlettel való számolás!

A fenti fizikai szemléletes kép segítségével próbáljuk igazolni, hogy ha

1. a $T \subset \mathbb{R}^2$ zárt korlátos tartomány 'szép',
2. az $f : T \to \mathbb{R}^+$ függvény kétszer folytonosan differenciálható a T tartomány belsejében,
3. f folytonos T-n,
4. $\Delta f = 0$ teljesül a T tartomány belsejében,

akkor az f függvény legnagyobb illetve legkisebb értékét a T tartomány határán veszi fel!

VIII. $\boxed{F}$ Legyen c és l pozitív valós paraméter és u_0 olyan differenciálható függvény a $[0,l]$ intervallumon, melyre $u_0(0) = u_0(l) = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy az

$$u : [0,l] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,t) \mapsto \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi c}{l}t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cdot \int_0^l u_0(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \,\mathrm{d}\,\xi$$

függvény megoldása az

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

(hullámterjedést leíró) differenciálegyenletnek a $[0,l] \times \mathbb{R}^+$ halmazon, és

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

teljesül!

21. Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

I. Adjuk meg a következő két-, illetve háromváltozós függvények értelmezési tartományát, szintvonalait illetve szintfelületeit! Legyenek a, b, c nemnulla valós számok.

1. $f(x,y) = ax + by + c$
2. $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
3. $f_{\pm}(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2}$
4. $f(x,y,z) = ax + by + cz$
5. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
6. $f(x,y) = \cos(x + \sqrt{3}y)$
7. $f(x,y) = y^2 - 2x$
8. $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$

II. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek, és ha léteznek, számoljuk ki azokat!

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x-y}{xy+x+y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\frac{x}{y}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^3y^3}}{x^2+y^2}$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} \frac{1}{xy}\operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right)$

III. Folytonosak-e az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{ha} \quad xy \neq 0, \\ 0 & \text{ha} \quad xy = 0; \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

IV. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényt.

1. Folytonos-e az f függvény az origón átmenő egyenesek mentén?
2. Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

22. Többváltozós függvény deriválása

I. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjait.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

II. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény nem folytonos a nullában, de itt léteznek a parciális deriváltjai.

III. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i = 1, \dots, n$ indexre a $\partial_i f : H \to \mathbb{R}$ függvény korlátos. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az f függvény folytonos a H halmazon, továbbá ha H konvex halmaz, akkor az f függvény egyenletesen folytonos.

IV. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olyan differenciálható függvény, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\|f(x)\| = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ elemre $\langle f'(x), f(x) \rangle = 0$.

V. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény parciális deriváltjai korlátosak, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

VI. Tekintsük az alábbi függvényt.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Határozzuk meg az f függvény parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban.
2. Mutassuk meg, hogy a parciális deriváltak nem folytonosak a $(0,0)$ pontban.
3. Igazoljuk, hogy az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban.

VII. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \sqrt{|xy|}$$

függvény folytonos, léteznek a parciális deriváltjai, de az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

VIII. Differenciálhatók-e az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

$$1. \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. $f(x,y) \begin{cases} \dfrac{(x+3)y^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

5. $f(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2}$

6. $f(x,y) \begin{cases} x^3y^4 \sin\dfrac{1}{y}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$

IX. Tekintsük az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^4+1)$

1. Számoljuk ki az f'_x, f'_y parciális deriváltakat!
2. Hol differenciálható az f függvény?
3. Számoljuk ki a $\operatorname{grad} f$ vektort a $P_0 = (0,1)$ pontban!

X. Vizsgáljuk az

$$f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad g(x,y) = (3x^2+1)^{2y^3}$$

függvényeket.

1. Határozzuk meg azt a legbővebb tartományt, ahol az f és a g függvény jól definiálható!
2. Számoljuk ki az $\big((\mathrm{d}\, f)(0,1)\big)(x,y)$ és a $\big((\mathrm{d}\, g)(0,1)\big)(x,y)$ értéket!
3. Írjuk fel a $P_0 = (0,1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét.
4. Legyen $a \in \mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely párhuzamos a $(2,-7)$ vektorral. Számoljuk ki a

$$\left.\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, a}\right|_{(0,1)}$$

értéket.

XI. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(x+3)y^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény $(-1,1)$ iránymenti deriváltját a $(0,0)$ pontban!

XII. Határozzuk meg, hogy mely irányhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény legnagyobb iránymenti deriváltja a $P_0 \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

1. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{\mathrm{e}^{2x+1}}$ és $P_0 = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$;
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ és $P_0 = (1,1)$.

XIII. Számoljuk ki az

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto x^3 + y^4 + x^2 y\, \mathrm{e}^{2z}$$

függvény f'''_{xxz} $(= \partial_1^2 \partial_3 f)$ és f'''_{xzx} $(= \partial_1 \partial_3 \partial_1 f)$ parciális deriváltjait!

XIV. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $x \dfrac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}(xy) = y \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}(xy)$
2. $\dfrac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} (xy\, \mathrm{e}^{x+y}) = (i+x)(k+y)\, \mathrm{e}^{x+y}, \quad i,k \in \mathbb{N}$
3. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) ((\sin x)(\sin y)) = 0$
4. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\right) = 0$

XV. Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

XVI. Tekintsük az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x,y,z\}$ térrészben az $xyz = a^3$ felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal $\dfrac{9}{2}a^3$ térfogatú tetraédert fognak közre.

XVII. Tekintsük az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x,y,z\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből a összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az x', y' és z' helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

XVIII. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.

XIX. Tekintsük az alábbi függvényeket.

$$f : \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y) \mapsto \left(x^y, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, y \sin x\right)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z,v) \mapsto \left(x \cos y + \mathrm{e}^z v, y\, \mathrm{e}^{z+v} \arcsin z\right)$$

1. Határozzuk meg azokat a legbővebb összefüggő $H \subseteq \mathbb{R}^4$ nyílt részhalmazokat, amin az $f \circ g$ függvény értelmezhető.

2. Igazoljuk, hogy az $a = \left(1, 1, \frac{1}{2}, 1\right)$ pontra $a \in H$ teljesül.
3. A láncszabály segítségével számoljuk ki $(\mathrm{d}(f \circ g))(a)$ értékét.

XX. Legyen $v = (a_1, a_2)$ tetszőleges pont az $\mathbb{R}^2$ síkon és

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto e^{-x_1} \cos x_2$$

kétváltozós függvény. Próbáljuk az $f(v)$ értéket a

$$f(0) + (\mathrm{d}\, f)(0)(v) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, f)(0)(v, v) + \frac{1}{3!}(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, f)(0)(v, v, v)$$

formulával közelíteni. Igazoljuk a

1. $(\mathrm{d}\, f)(0, v) = \sum_{j_1=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} \cdot a_{j_1}$
2. $(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, f)(0, v, v) = \sum_{j_1,j_2=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} \cdot a_{j_1} a_{j_2}$
3. $(\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, f)(0, v, v, v) = \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}} \Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} \cdot a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3}$

egyenlőségeket, és ennek a segítségével bizonyítsuk be, hogy a fenti közelítésre az

$$1 - a_1 + \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_1^3}{6} - \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_1 a_2^2}{2}$$

kifejezés adódik!

XXI. Írjuk fel az alábbi $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezők deriváltját, ahol $a \in \mathbb{R}^3$ adott vektor.

1. $v(r) = r$
2. $v(r) = a \cdot \|r\|^2$
3. $v(r) = \ln \|r\| \cdot r$
4. $v(r) = \|r\|\, r$
5. $v(r) = \langle a, r \rangle r$
6. $v(r) = a \times r$
7. $v(r) = r\, \mathrm{e}^{\|r\|}$
8. $v(r) = r\, \|r\|^{-2}$
9. $v(r) = a \times (a \times r)$

XXII. Mutassuk meg, hogy az

1. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvény $P = (0, 0)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h = (a, b)$ helyen
$$T^f_{2,P}(h) = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2};$$
2. $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ függvény $P = (1, 1, 1)$ bázispontú harmadfokú Taylor-polinomja a $h = (a, b, c)$ helyen
$$T^f_{3,P}(h) = 1 + (a + b - c) + (ab - ac - bc + c^2) + (ac^2 + bc^2 - abc - c^3).$$

XXIII. Keressük meg az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélső értékeit (ahol $k \in \mathbb{R}$).

$$f(x, y) = (x - 2y)\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \qquad g(x, y) = (1 + \mathrm{e}^y) \cos x - y\, \mathrm{e}^y \qquad h(x, y) = kx^2 + xy + y^2 + 3x - 3y$$

XXIV. Keressük meg az f függvény szélső értékeit a T halmazon, ahol

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$ és $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$;
2. $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ és $T = [0,\pi]^3$;
3. $f(x,y,z) = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{b}$ valamely $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre és $T = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
4. $f(x,y) = x^2 y(2 - x - y)$ és $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x + y \le 6\}$;
5. $f(x,y) = (y + 2x - 4)^2 + (x+y)^2$ és $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x + y \le 1\}$.

XXV. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $a, b \in \mathbb{R}^+$. Határozzuk meg, hogy mely pontban lesz az

$$f : (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

függvény értéke maximális.

XXVI. Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.
1. Legyen $f(x,y,z) = xyz$, az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ és $x + y + z = 0$ feltétel mellett.
2. Legyen $f(x,y,z) = xy + yz$, az $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ és az $x, y, z \ge 0$ feltétel mellett.
3. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+$ és $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = a$ és az $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ feltétellel.

XXVII. Számoljuk ki a következő kifejezések legkisebb értékét.

$$p(\alpha, \beta) = \int_{-1}^{1} (x^2 - \alpha x - \beta)^2 \,\mathrm{d}\,x \qquad p(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_i)^2$$

XXVIII. Egyenes és sík illesztése.
1. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, valamint legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Definiáljuk a $q = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a q és az x vektor lineárisan független. Igazoljuk, hogy a

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$$

függvénynek az

$$\alpha_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad \beta_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

pontban van lokális minimuma, amit rövidebben is felírhatunk a skaláris szorzás segítségével

$$\alpha_0 = \frac{\|q\|^2 \langle x, y \rangle - \langle x, q \rangle \langle y, q \rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q \rangle^2} \qquad \beta_0 = \frac{\|x\|^2 \|q\|^2 \langle y, q \rangle - \langle x, q \rangle \langle x, y \rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q \rangle^2}.$$

2*. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, valamint legyen $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ és $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Definiáljuk a $q = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a q, x és y vektorok lineárisan függetlenek. Igazoljuk, hogy a

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma - z_i)^2$$

függvénynek az

$$\begin{aligned}
\alpha_0 =& d\Big(\|y\|^2\|q\|^2\langle x,z\rangle + \langle x,q\rangle\langle y,q\rangle\langle y,z\rangle + \langle x,y\rangle\langle y,q\rangle\langle z,q\rangle \\
&- \|y\|^2\langle x,q\rangle\langle z,q\rangle - \|q\|^2\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle - \langle x,z\rangle\langle y,q\rangle^2\Big) \\
\beta_0 =& d\Big(\|x\|^2\|q\|^2\langle y,z\rangle + \langle x,q\rangle\langle z,q\rangle\langle x,y\rangle + \langle x,q\rangle\langle y,q\rangle\langle x,z\rangle \\
&- \|x\|^2\langle y,q\rangle\langle z,q\rangle - \|q\|^2\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle\langle x,q\rangle^2\Big) \\
\gamma_0 =& d\Big(\|y\|^2\|x\|^2\langle z,q\rangle + \langle x,y\rangle\langle y,q\rangle\langle x,z\rangle + \langle x,y\rangle\langle x,q\rangle\langle y,z\rangle \\
&- \|y\|^2\langle x,q\rangle\langle x,z\rangle - \|x\|^2\langle y,q\rangle\langle y,z\rangle - \langle z,q\rangle\langle x,y\rangle^2\Big)
\end{aligned}$$

pontban van lokális minimuma, ahol

$$d = \Big(\|x\|^2\|y\|^2\|q\|^2 + 2\langle x,y\rangle\langle y,q\rangle\langle x,q\rangle - \|x\|^2\langle y,q\rangle - \|y\|^2\langle x,q\rangle - \|q\|^2\langle x,y\rangle\Big)^{-1}.$$

XXIX. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket.

1. $xy(x+y-3) \geq -1, \quad \text{ha} \quad x,y \geq 0.$
2. $x^3y + xy^3 - 4xy + 2 \geq 0, \quad \text{ha} \quad x,y \geq 0.$
3. $1 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \dfrac{3}{2}, \quad \text{ha} \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0, \quad \text{és} \quad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$
4. $0 \leq \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ha} \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0, \quad \text{és} \quad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$
5. $0 \leq (\sin\alpha)(\sin\beta)(\sin\gamma) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \text{ha} \quad \alpha,\beta,\gamma \geq 0, \quad \text{és} \quad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$

XXX. $\boxed{H}$ Legyen $p,q \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyekre $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\textit{Hölder-egyenlőtlenség})$$

teljesül, oly módon, hogy az

$$f : (\mathbb{R}^+)^n \times (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R} \qquad ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

függvény szélsőértékét keressük a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A$ feltétel mellett, ahol $A \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

XXXI. $\boxed{F}$ Legyen $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(E_k)_{k=1,\dots,m} \in (\mathbb{R}^+)^n$ tetszőleges rendszer, és legyen továbbá $E, N \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy

$$\min_{1\leq k\leq m} E_k < \frac{E}{N} < \max_{1\leq k\leq m} E_k$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy létezik egyetlen olyan $\beta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k \, \mathrm{e}^{-\beta E_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\beta E_k}}$$

teljesül, és ha minden $k = 1, \ldots, n$ esetén

$$\bar{n}_k = N \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\beta E_k}},$$

akkor $(\bar{n}_k)_{k=1,\ldots,n} \in (\mathbb{R}^+)^n$ az egyetlen olyan pont, ahol az

$$S : (\mathbb{R}^+)^m \to \mathbb{R} \qquad (n_1, \ldots, n_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} n_k \log n_k$$

függvénynek lokális maximuma van, így ez egyben globális maximum is, a

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = N \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{m} n_k E_k = E$$

feltételek mellett.
(Ezek alapján egy olyan fizikai rendszerben, mely N darab részecskét tartalmaz, m darab energiaszinttel rendelkezik és E az összenergiája, a részecskék eloszlásának az entrópiája maximalizálható, és ezt a maximumot épp a feladatban megadott esetben veszi fel.)

XXXII. Tegyük fel, hogy egy edény 10 ml kénsavat tartalmaz kezdetben. Rendelkezésünkre áll 1 l víz, hogy csökkentsük a kénsav mennyiségét oly módon, hogy valamennyi vizet öntünk az edénybe, az teljesen elkeveredik a kénsavval, majd kiöntés után marad mindig 10 ml folyadék az edényben, és ezt a lépést ismételhetjük addig, amíg a rendelkezésünkre álló 1 l víz el nem fogy. Mennyi kénsav fog biztosan maradni az edényben, akármilyen módon is használjuk fel az 1 l vizet?

XXXIII. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \frac{1}{2} y^4 - \cos\left(x^2\right) + a x^2 y^2 - x y^3 - x^3 y.$$

1. Mutassuk meg, hogy a $(\mathrm{d}\, f)(x, y) = 0$ egyenletből $(x, y) = (0, 0)$ következik.
2. Igazoljuk, hogy $(\mathrm{d}^2 f)(0, 0) = 0$ és $(\mathrm{d}^3 f)(0, 0) = 0$.
3. Mutassuk meg, hogy az $A = (\mathrm{d}^4 f)(0, 0)$ 4-lineáris leképezésre

   $$A((x, y), (x, y), (x, y), (x, y)) = x^4 + y^4 + 2a x^2 y^2 - 2x^3 y - 2x y^3$$

   teljesül.
4. Mutassuk meg, hogy ha $a \in \,]1, \infty[$, akkor az f függvénynek lokális minimuma van a $(0, 0)$ pontban.

XXXIV. Igazoljuk hogy az $y^2 x + y^3 = 1$ egyenlet egy $y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

XXXV. Igazoljuk hogy az $xy-2\,\mathrm{e}^{x-y}-2z+\mathrm{e}^{z}=0$ egyenlet egy $z(x,y)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $(1,1)$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $z'_x(1,1)$ és $z'_y(1,1)$ értékét!

XXXVI. Tekintsük az $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^2$ halmazok szorzatán értelmezett

$$f:E\times F\to\mathbb{R}^2 \qquad ((x,y,z),(u,v))=\begin{pmatrix}(x^2+y^2+z^2+1)uv^2\\ (x^4+y^4+3)u^3v^c\end{pmatrix}$$

függvényt, ahol $c\in\mathbb{R}$ paraméter. Legyen $a=(1,2,3)\in E$ és $b=(4,5)\in F$. Mely c paraméterek esetén létezik olyan $\phi:E\to F$ függvény, mely az a pont egy környezetén van értelmezve, $\phi(a)=b$, és minden $x\in\operatorname{Dom}\phi$ pontra $f(x,\phi(x))=f(a,b)$ teljesül? Igazoljuk, hogy ezekben az esetekben

$$(D\phi)(1,2,3)=\frac{1}{15(c-6)}\begin{pmatrix}24-8c & 192-16c & -24c\\ 15 & -60 & 90\end{pmatrix}.$$

XXXVII. $\boxed{F}$ Termodinamikában állapotegyenletnek nevezzük valamely anyag nyomása p, térfogata V és hőmérséklete között fennálló $f(p,V,T)=\text{áll}$ összefüggést. Tegyük fel, hogy állapotegyenletet leíró $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és legyen $a=(p_0,V_0,T_0)\in\operatorname{Int}\operatorname{Dom}f$ olyan pont, melyre $(\partial_p f)(a),(\partial_V f)(a),(\partial_T f)(a)\neq 0$.

1. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $U\subseteq\operatorname{Dom}f$ nyílt halmaz, hogy minden $v\in U$ elemre $(\partial_p f)(v),(\partial_V f)(v),(\partial_T f)(v)\neq 0$.
2. Mutassuk meg, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned} p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} &\qquad (V,T)\mapsto p(V,T)\\ V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} &\qquad (p,T)\mapsto V(p,T)\\ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} &\qquad (p,V)\mapsto T(p,V)\end{aligned}$$

függvény, hogy

$$\begin{aligned} &(V_0,T_0)\in\operatorname{Dom}p, && p(V_0,T_0)=p_0, && \forall (V,T)\in\operatorname{Dom}p:\ f(p(V,T),V,T)=f(a)\\ &(p_0,T_0)\in\operatorname{Dom}V, && V(p_0,T_0)=V_0, && \forall (p,T)\in\operatorname{Dom}V:\ f(p,V(p,T),T)=f(a)\\ &(p_0,V_0)\in\operatorname{Dom}T, && T(p_0,V_0)=T_0, && \forall (p,V)\in\operatorname{Dom}T:\ f(p,V,T(p,V))=f(a)\end{aligned}$$

teljesül.

3. Igazoljuk, hogy az előző pontban szereplő függvényekre

$$\left.\frac{\partial p(V,T)}{\partial V}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)}\cdot\left.\frac{\partial V(p,T)}{\partial T}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)}\cdot\left.\frac{\partial T(p,V)}{\partial p}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)}=-1$$

$$\left.\frac{\partial p(V,T)}{\partial T}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)}\cdot\left.\frac{\partial V(p,T)}{\partial p}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)}\cdot\left.\frac{\partial T(p,V)}{\partial V}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)}=-1$$

teljesül.

Az alábbi függvények példák állapotegyenletekre.

$$f(p,V,T)=\frac{pV}{T}, \qquad \textit{(ideális gáz)}$$

$$f(p,V,T)=\left(p+\frac{a}{V^2}\right)\cdot\frac{V-b}{T}, \qquad a,b\in\mathbb{R}^+ \qquad \textit{(Van der Waals-egyenlet)}$$

$$f(p,V,T)=\frac{p(V-nb)}{T}\cdot\exp\left(\frac{an}{RTV}\right), \qquad a,b,n,R\in\mathbb{R}^+ \qquad \textit{(Dieterici-egyenlet)}$$

XXXVIII. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x(t), y(t), z(t))}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{d}\, t}$$

teljesül.

XXXIX. Laplace operátor polárkoordinátákkal. Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0\right\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, valamint a polárkoordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$, $Q(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, (\operatorname{sgn} y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$\frac{\partial (f \circ Q)(x,y)}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi}$$
$$\frac{\partial (f \circ Q)(x,y)}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi}.$$
4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$(\Delta f)(r,\varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] f(r,\phi).$$

XL. Laplace-operátor gömbi koordinátákkal. Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \leq 0\right\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$, valamint a gömbi koordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$,
$$Q(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (\operatorname{sgn} y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial x} = \sin\vartheta\cos\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial y} = \sin\vartheta\sin\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial z} = \cos\vartheta \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\vartheta}.$$
4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$(\Delta f)(r,\vartheta,\varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right] f(r,\vartheta,\varphi).$$

XLI. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta\Phi = 0$, akkor a $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right)$ függvényre is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter mellett.

XLII. Igazoljuk, hogy az

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

függvényre

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

teljesül!

XLIII. Legyen $g_1, g_2 \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és

$$h(x,y) = xg_1(y-x) + yg_2(x-y).$$

Igazoljuk, hogy

$$h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} = 0.$$

23. Többváltozós függvények integrálása

I. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét az integrálás sorrendjének a felcserélésével!

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x,$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$

II. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_2^4 \int_0^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$

III. $\boxed{E}$ Az *Euler-féle gamma-függvényt* az $a > 0$ paraméter esetén a

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\,u$$

képlettel definiálhatjuk.

1. Igazoljuk az $(u,v) = (st, s(1-t))$ helyettesítéssel, hogy $0 < a, b$ esetén

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty\int_0^\infty u^{a-1}v^{b-1}\,\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \left(\int_0^\infty s^{a+b-1}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}\,s\right)\cdot\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}\,t\right)$$

teljesül. A $0 < a, b$ esetben bevezetjük az *Euler-féle béta-függvényt*

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}\,t,$$

melyre nyilvánvalóan teljesülnek a

$$B(a,b) = B(b,a), \qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

azonosságok.

2. Igazoljuk, hogy $-1 < a, b$ esetén

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

teljesül. (Használjuk a $t = \sin^2 x$ helyettesítést!)

IV. $\boxed{E}$ Polár- és gömbi koordináták.

1. Igazoljuk, hogy a

$$\Omega = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0\}$$

halmaz nullmértékű, valamint a

$$P : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \qquad (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

leképezés diffeomorfizmus[5]. (Tehát a síkon használhatjuk a polárkoordinátákat, hiszen egy nullmértékű halmaz kivételével lefedik a síkot.)

2. Igazoljuk, hogy a

$$\Omega = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \le 0\}$$

halmaz nullmértékű, valamint a

$$P : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \qquad (r,\vartheta,\varphi) \to (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

leképezés diffeomorfizmus. (Tehát a térben használhatjuk a gömbi koordinátákat, hiszen egy nullmértékű halmaz kivételével lefedik a teret.)

V. Legyen $c \in \mathbb{R}^+$. Mekkora az $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x^2$ és az $y = cx^2$ görbék által meghatározott korlátos tartomány területe?

VI. Adott $T \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén számoljuk ki a

$$\iint\limits_T f$$

integrált!

1. Legyen $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \ge 1,\ (x-2)^2 + y^2 \le 4\}$ és $f(x,y) = xy$.
2. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ és $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in [0, 2\pi] : x = a(t - \sin t),\ 0 \le y \le a(1-\cos t)\}$, valamint $f(x,y) = y^2$.
3. A T halmaz a (0,0), (3,0), (2,1) és (1,1) pontok által meghatározott trapéz és $f(x,y) = 3x - y^2$.

[5] Egy leképezés diffeomorfizmus, ha bijekció, differenciálható, és az inverze is differenciálható.

4. A T halmaz az $x = 2$, $y = x$ és az $y = \dfrac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány és $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}$.
5. Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ és $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.
6. Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ és $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.
7. Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\}$ és $f(x, y) = x^2 y$.
8. Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x\}$ és $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{4x^2 + y^2}$.
9. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 9x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1,\ x \geq 0\right\}$ és $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{9x^2 + \frac{y^2}{4}}}$.

VII. Legyen $k, l \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^+$. Határozzuk meg, az

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} x^{2k+1} y^l \,\mathrm{d}\, T(x, y)$$

integrál értékét. Mely k és l paraméterek esetén lesz az integrál értéke nulla?

VIII. Határozzuk meg az alábbi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1. Legyen V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.
2. Legyen V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ síkok határolnak.
3. Legyen V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész.
4. Legyen V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ henger határolt korlátos térrész.
5. Legyen V a $z = 0$, $z = 2y^2 + 8x$, $y = 1 - 2x$, $y = x$ és az $x = 0$ felületekkel határolt korlátos tartomány.
6. Legyen V az $R \in \mathbb{R}^+$ középsugarú és $r \in \,]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz.
7. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ \left(x - \dfrac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\dfrac{R}{2}\right)^2\right\}$.
8. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ (x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\dfrac{R}{2}\right)^2\right\}$.
9. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2\}$.
10. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + z^2 \leq R^2\}$.

IX. $\boxed{H}$ Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

1. Igazoljuk, hogy a

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1\right\}$$

halmaz térfogata $\dfrac{4\pi}{35} abc$.

2. Igazoljuk, hogy a

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}} \leq 1 \right\}$$

halmaz térfogata $\frac{4}{45}abc$.

3*. Legyen $p \geq 1$ és tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az origó körüli egységsugarú nyílt gömböt a p-normában, vagyis az

$$B_1^{(p)}(0) = \left((x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p} < 1 \right)$$

halmazt. Igazoljuk, hogy a

$$P :]0,1[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to B_1^{(p)}(0) \cap (\mathbb{R}^+)^3$$
$$(r,\vartheta,\varphi) \mapsto \left(r\left(\sin^{\frac{2}{p}} \vartheta\right)\left(\cos^{\frac{2}{p}} \varphi\right), r\left(\sin^{\frac{2}{p}} \vartheta\right)\left(\sin^{\frac{2}{p}} \varphi\right), r\cos^{\frac{2}{p}} \vartheta \right)$$

paraméterezés diffeomorfizmus, melynek Jacobi-determinánsa

$$J(r,\vartheta,\varphi) = \frac{4}{p^2} r^2 \left(\sin^{\frac{4-p}{p}} \vartheta\right)\left(\cos^{\frac{2-p}{p}} \vartheta\right)\left(\sin^{\frac{2-p}{p}} \varphi\right)\left(\cos^{\frac{2-p}{p}} \varphi\right).$$

Vagyis a $B_1^{(p)}(0)$ halmaz térfogata

$$V(B_1^{(p)}(0)) = 8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J(r,\vartheta,\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = \frac{\left(\frac{2}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^3}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{p}\right)},$$

ahol kihasználtuk a gamma-függvényre vonatkozó $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ azonosságot az $x = \frac{3}{p}$ esetben.

4**. Igazoljuk, hogy az $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $p \geq 1$ esetben az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ térben lévő origó körüli egységsugarú gömb térfogata

$$V_n = \frac{\left(\frac{2}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)}.$$

X. $\boxed{H}$ Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $R \in \mathbb{R}^+$,

$$D_n = \left\{ (0,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_2 \leq 0 \right\},$$
$$S_n = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R \right\},$$
$$G_n = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 < R \right\} \setminus D_n,$$
$$H_n =]0,R[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[^{n-2},$$

és legyen

$$P : H_n \to G_n \qquad (r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \mapsto P(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}),$$

ahol a $P(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ vektor k-adik ($k \in \{1, \ldots, n\}$) komponense

$$(P(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}))_k = \begin{cases} r \sin \alpha_1 \prod\limits_{i=2}^{n-1} \sin \alpha_i & \text{ha} \quad k = 1, \\ r \cos \alpha_1 \prod\limits_{i=2}^{n-1} \sin \alpha_i & \text{ha} \quad k = 2, \\ r \cos \alpha_{k-1} \prod\limits_{i=k}^{n-1} \sin \alpha_i & \text{ha} \quad 2 < k < n, \\ r \cos \alpha_{n-1} & \text{ha} \quad k = n. \end{cases}$$

1. Igazoljuk, hogy a G_n halmaz nyílt.
2. Igazoljuk, hogy a D_n halmaz és az $S_n \setminus G_n$ halmaz nulla mértékű.
3. Igazoljuk, hogy $\operatorname{Dom} P = H_n$, $\operatorname{Ran} P = G_n$ és P injektív. (Tehát P bijekció.)
4. Igazoljuk, hogy P és P^{-1} folytonos. (Tehát P homeomorfizmus.)
5. Igazoljuk, hogy P és P^{-1} differenciálható. (Tehát P diffeomorfizmus.)
6. Igazoljuk, hogy P Jacobi-determinánsa az $(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in H_n$ pontban

$$J(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1} \alpha_i.$$

7. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, \mathrm{d}\, x.$$

Igazoljuk, hogy $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$ és minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ elemre

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{és} \quad I_{2n-1} I_{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

8. Igazoljuk, hogy

$$\int\limits_0^R \underbrace{\int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi}_{n-2} \int\limits_0^{2\pi} J(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \, \mathrm{d}\, \alpha_1 \underbrace{\mathrm{d}\, \alpha_2 \ldots \mathrm{d}\, \alpha_{n-1}}_{n-2} \, \mathrm{d}\, r = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} R^n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

(Tehát az n dimenziós R sugarú gömb térfogatára

$$V_n(R) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} R^n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

teljesül.)

9. Igazoljuk az

$$V_1(R)=2R,\ V_2(R)=\pi R^2,\ V_3(R)=\frac{4\pi R^3}{3},\ V_4(R)=\frac{\pi^2R^4}{2},\ V_5(R)=\frac{8\pi^2R^5}{15},\ V_6(R)=\frac{\pi^3R^6}{6}$$

egyenlőségeket, továbbá mutassuk meg, hogy az $V_n(1)$ sorozatra

$$\sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} V_n(1)=V_5(1)=\frac{8\pi^2}{15}\approx 5,264 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} V_n(1)=0$$

teljesül.

XI. Adott $T\subseteq\mathbb{R}^3$ halmaz és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén számoljuk ki a

$$\iiint\limits_T f$$

integrált!

1. Legyen T a $z=xy$, $y=x$, $x=1$ és a $z=0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x,y,z)=xy^2z^3$.
2. Legyen T a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z=1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.
3. Legyen T a $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ és az $x^2+y^2+z^2\le 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=xyz$.
4. Legyen T a $z\ge 2$ és a $z\le 3-\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=2z$.
5. Legyen T a $x^2+y^2+z^2\le 9$ és a $2z\ge\sqrt{3x^2+3y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=xy^2z^3$.
6. Legyen T a $x^2+y^2+z^2\le 4$ és a $3z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z)=x^2z$.
7. Adott $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ paraméterek esetén legyen $T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$ és
$$f(x,y,z)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$
8. Legyen $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 5x^2+5y^2+10z^2+6xy-4yz-4xz\le 1\}$ és $f(x,y,z)=1$.

XII. $\boxed{F}$ A régiek elképzelése alapján a Föld egy végtelen kiterjedésű lapos korong. Határozzuk meg a Föld felületi sűrűségét, ha tudjuk, hogy közel a felszínhez a gravitációs gyorsulás értéke $a=9,81$ $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ és a gravitációs állandó $G=6,67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

Útmutatás: A korong felett h magasságban lévő m tömegű test a gravitációs gyorsulására

$$ma=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{Gm\rho rh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=2\pi Gm\rho$$

teljesül, ahol ρ $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right]$ a felületi sűrűség. Vagyis

$$\rho=\frac{a}{2\pi G}\approx 2,34\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}.$$

XIII. $\boxed{F}$ Tegyük fel, hogy a Föld egy végtelen kiterjedésű d vastagságú korong, melynek sűrűsége $\rho = 5500\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Mekkora d esetén tapasztaljuk közel a Földhöz az $a = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gravitációs gyorsulást?

Útmutatás: A korong legyen a

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \le z \le h + d\right\}$$

tartomány, és az m tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás

$$ma = \int\limits_h^{h+d} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{Gm\rho r z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,z = 2\pi d G m \rho.$$

Vagyis

$$d = \frac{a}{2\pi\rho G} \approx 4256\ \mathrm{km}.$$

XIV. $\boxed{F}$ Tegyük fel, hogy egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb sűrűsége $\rho \in \mathbb{R}^+$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a gömbtől $h \in [0, \infty[$ távolságban?

Útmutatás: Olyan koordinátázást választunk, melyben az integrálandó függvények egyszerűbbek, viszont ilyenkor az integrálási határok bonyolultabbak. A gömb középpontja legyen a $(0, 0, R + h)$ pontban és az m tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás (gömbi koordinátarendszerben)

$$ma = \int\limits_0^{\arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right)} \int\limits_{(R+h)\cos\vartheta - \sqrt{R^2 - (R+h)^2 \sin^2\vartheta}}^{(R+h)\cos\vartheta + \sqrt{R^2 - (R+h)^2 \sin^2\vartheta}} \int\limits_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\vartheta.$$

Vagyis

$$ma = 4\pi G m \rho \left[-\frac{\left(R^2 - (R+h)^2 \sin^2\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}{3(R+h)^2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right)} = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \cdot \frac{Gm}{(R+h)^2},$$

amiből röviden

$$a = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

adódik, ahol M a gömb tömege. Tehát ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a gömb összes tömege a középpontjában lenne.

XV. $\boxed{F}$ Tegyük fel, hogy egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb, melynek sűrűsége a középpontjától $r \in [0, R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0, R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a gömb felszínétől $h \in\,]-R, \infty[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a gömb belsejében van a test)?

Útmutatás: Olyan koordinátázást választunk, melyben az integrálási határok egyszerűbbek, viszont ilyenkor az integrálandó függvények bonyolultabbak. A gömb középpontja legyen az origóban, és az m tömegű test legyen a $(0, 0, R + h)$ pontban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás (gömbi koordinátarendszerben)

$$ma = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \int\limits_0^{\pi} Gm\rho(r) \frac{r^2 \sin\vartheta (R + h - r\cos\vartheta)}{\left(r^2 \sin^2\vartheta + (R + h - r\cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi.$$

Az

$$\int \frac{\sin\vartheta (a - \cos\vartheta)}{\left(\sin^2\vartheta + (a - \cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,\vartheta = \frac{1 - a\cos\vartheta}{a^2\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\vartheta}} + C$$

integrál felhasználásával

$$ma = \frac{Gm}{(R+h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r) r^2 \left(1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{R+h}{r} - 1\right)\right) \mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi$$

adódik.

A $h \geq 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM}{(R+h)^2},$$

ahol M a gömb össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a gömb összes tömege a középpontjában lenne.

A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R+h} \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM_h}{(R+h)^2},$$

ahol M_h a test alatt lévő gömb össztömege. Tehát ebben az esetben nem számít, hogy a test felett még mekkora gömbhéj található.

XVI. $\boxed{F}$ Tegyük fel, hogy a kétdimenziós térben egymástól r távolságra lévő m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek közötti gravitációs erő

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r}.$$

A kétdimenziós térben legyen egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú körlap sűrűsége a középpontjától $r \in [0, R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0,R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a körlap szélétől $h \in \left]-R, \infty\right[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a körlap belsejében van a test)?

Útmutatás: A $h \geq 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM}{R+h},$$

ahol M a körlap össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a körlap összes tömege a középpontjában lenne.

A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM_h}{R+h},$$

ahol M_h a próbatest alatt lévő körlap össztömege.

XVII. $\boxed{F}$ Tekintsünk a háromdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ sűrűségű $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geq 0$$

félgömböt. Hol nagyobb a gravitációs gyorsulás, a $(0,0,0)$ vagy a $(0,0,R)$ pontban?

Útmutatás: A $(0,0,0)$ pontban a gravtiációs gyorsulás legyen a_1, a $(0,0,R)$ pontban pedig a_2. Az első esetben legyen a

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = \pi Gm\rho R,$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0,0,0)$ pontban

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{GM}{R^2},$$

ahol M a félgömb össztömege.

A második esetben legyen a

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2,\ z \leq R\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{R}{\cos\vartheta}} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\vartheta} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = 2\pi Gm\rho R \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0,0,0)$ pontban

$$a_2 = (3-\sqrt{2}) \cdot \frac{GM}{R^2}.$$

Tehát $a_2 > a_1$.

XVIII. $\boxed{F}$ Mutassuk meg, hogy a háromdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ vonalsűrűségű R sugarú kört a saját gravitációja végtelen erővel húzza a középpontja felé.

Útmutatás: A körív legyen a

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2,\ z = 0\}$$

halmaz. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora a gravitációs gyorsulása az $(R,0,0)$ pontban.

$$a = 2\int_0^{\pi} \frac{Gm\rho}{R} \cdot \frac{1-\cos\varphi}{\left((1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\,\varphi = \frac{2Gm\rho}{R} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi}} \,\mathrm{d}\,\varphi = \infty.$$

XIX. $\boxed{F}$ Mekkora szögsebességgel kell forognia a kétdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ vonalsűrűségű R sugarú körnek ahhoz, hogy alakja ne változzon a saját gravitációs tere miatt?

Útmutatás: A körív legyen a

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = R^2\}$$

halmaz. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora a gravitációs gyorsulása az $(R,0,0)$ pontban. Az egyensúly feltétele

$$mR\omega^2 = 2\int_0^{\pi} \frac{Gm\rho}{2} \,\mathrm{d}\,\varphi = \pi Gm\rho,$$

vagyis

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G\rho}{R}}\ .$$

XX. Az $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű homogén (egyenletes sűrűségű) test *tehetetlenségi nyomatékát* egy rögzített tengely körül a

$$\Theta = \rho \cdot \iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V$$

kifejezés adja, ahol ρ a test sűrűsége ($\rho = \dfrac{M}{V}$) és $f(x,y,z)$ a test (x,y,z) koordinátájú pontjának a forgástengelytől vett távolságának a négyzete. Igazoljuk, hogy

1. az M tömegű R sugarú gömbnél a középponton átmenő tengely esetén
$$\Theta = \frac{2}{5}MR^2$$
és a gömböt érintő tengely esetén
$$\Theta = \frac{7}{5}MR^2;$$
2. az M tömegű h magasságú R alapsugarú egyenes kúpnál a kúp szimmetriatengelye mentén fekvő forgástengely esetén
$$\Theta = \frac{3}{10}MR^2$$
a kúp csúcsán átmenő tengely esetén
$$\Theta = \frac{3}{5}M\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right)$$
a kúp egy alkotóegyenese mint tengely esetén
$$\Theta = \frac{3}{20}M\frac{R^2}{R^2+h^2}\left(R^2+6h^2\right).$$

XXI. $\boxed{F}$ A $V \subseteq \mathbb{R}^3$ térrészben elhelyezkedő, $\rho : V \to \mathbb{R}^+$ sűrűségeloszlású merev test tehetetlenségi nyomatékát a

$$\Theta = \begin{pmatrix} \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & -\iiint\limits_V xy\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & -\iiint\limits_V xz\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V \\ -\iiint\limits_V xy\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & -\iiint\limits_V yz\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V \\ -\iiint\limits_V xz\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & -\iiint\limits_V yz\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V & \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,V \end{pmatrix}$$

mátrix adja meg az origón átmenő forgástengelyek esetén. Ha a test az $\omega \in \mathbb{R}^3$ vektor által meghatározott tengely körül $\|\omega\|$ szögsebességgel forog, akkor a test fogási energiája

$$E_f = \frac{1}{2}\langle \omega, \Theta\omega\rangle.$$

Ezek alapján adjunk választ a következő kérdésekre.

1. Mi lesz az M tömegű a oldalélű kocka tehetetlenségi tenzora a tömegközéppontján átmenő forgástengelyek esetén?
2. Határozzuk meg az M tömegű R sugarú gömb tehetetlenségi tenzorát a tömegközéppontjához viszonyítva.
3. Határozzuk meg az M tömegű R sugarú h magasságú henger tehetetlenségi tenzorát a tömegközéppontjához viszonyítva. Mekkora lesz az $M = 7$ kg tömegű, $R = 1$ m sugarú, $h = 2$ m magasságú henger mozgási energiája, ha az $(1,2,3)$ irányvektor által meghatározott egyenes körül $12\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ szögsebességgel forog a középpontja körül?

4. Határozzuk meg az M tömegű R sugarú $\rho(r,\vartheta,\varphi)=\rho_0 r^a \sin\vartheta$ $(a\in\mathbb{R}^+)$ sűrűségeloszlású gömb tehetetlenségi tenzorát a tömegközéppontjához viszonyítva.

Útmutatás:

1. A tehetlenségi tenzor két komponense

$$\Theta_{11}=\frac{M}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2+z^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{6}Ma^2 \qquad \Theta_{12}=-\frac{M}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} xy\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=0.$$

Vagyis a tehetetlenségi tenzor $\Theta=\frac{1}{6}Ma^2E$, ahol E a 3×3-as egységmátrix.

2. Szimmetriaokokból a tehetlenségi tenzor konstans $\cdot\, E$ alakú lesz, ezért elég egy elemet meghatározni.

$$\Theta_{33}=\frac{3M}{4\pi R^3}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\vartheta\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,r=\frac{2}{5}MR^2.$$

A tehetetlenségi tenzor $\Theta=\frac{2}{5}MR^2E$.

3. Tekintsük a

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le R,\ -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\right\}$$

hengert. Ekkor a tehetetlenségi tenzor nullától különböző független komponensei az alábbiak.

$$\Theta_{11}=\frac{M}{R^2\pi h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^R\int_0^{2\pi}(r^2\sin^2\varphi+z^2)r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{12}M(h^2+3R^2)$$

$$\Theta_{33}=\frac{M}{R^2\pi h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}MR^2$$

Ezek alapján

$$\Theta=\frac{1}{12}M\begin{pmatrix} h^2+4R^2 & 0 & 0\\ 0 & h^2+4R^2 & 0\\ 0 & 0 & 6R^2\end{pmatrix}.$$

Ha $\omega=\frac{12}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, akkor $E=282$ J.

4. A gömb tömege

$$M=\rho_0\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^{a+2}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,r=\frac{\rho_0\pi^2R^{a+3}}{a+3}.$$

Ekkor a tehetetlenségi tenzor nullától különböző független komponensei az alábbiak.

$$\Theta_{11}=\rho_0\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\vartheta)\cdot r^{2+a}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,r=\frac{5(a+3)}{8(a+5)}MR^2$$

$$\Theta_{33}=\rho_0\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\vartheta\cdot r^{2+a}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,r=\frac{3(a+3)}{4(a+5)}MR^2$$

Vagyis a tedtnek a tehetetlenségi tenzora az alábbi.

$$\Theta=\frac{a+3}{8(a+5)}MR^2\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

XXII. $\boxed{F}$ Legyen az $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb sűrűségeloszlása (a középpontjába helyezett gömbi koordinátarendszerben)

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = r^2(1 + \cos\vartheta).$$

Helyezzük a gömb középpontját az $(R, 0, 0)$ koordinátájú pontba.

1. Igazoljuk, hogy ekkor az origón átmenő forgástengelyek esetén a tehetetlenségi tenzorra

$$\Theta = \frac{R^7\pi}{315}\begin{pmatrix} 120 & 0 & -70 \\ 0 & 372 & 0 \\ -70 & 0 & 372 \end{pmatrix}$$

teljesül.

2. Tegyük fel, hogy egy origón átmenő forgástengely körül $\omega_0 \in \mathbb{R}$ szögsebességgel megforgatjuk a gömböt. Mutassuk meg, hogy akkor lesz a legkisebb a test forgási energiája, ha a tengely párhuzamos a $v_{\min} = (9 + \sqrt{106}, 0, 5)$ vektorral, ekkor $E_f = \dfrac{R^7\pi(123 - 7\sqrt{106})\omega_0^2}{315}$, és akkor lesz a legnagyobb a test forgási energiája, ha a tengely párhuzamos a $v_{\max} = (9 - \sqrt{106}, 0, 5)$ vektorral, ekkor $E_f = \dfrac{R^7\pi(123 + 7\sqrt{106})\omega_0^2}{315}$.

XXIII. $\boxed{F}$ (*Steiner-tétel*) Tekintsük a $V \subseteq \mathbb{R}^3$ térrészben elhelyezkedő, $\rho : V \to \mathbb{R}^+$ sűrűségeloszlású M tömegű merev testet, melynek a tömegközéppontja az origóban van, és melynek az origón átmenő forgástengelyek esetén a tehetetlenségi tenzore Θ. Legyen $v \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges vektor, és legyen Θ' a test tehetetlenségi tenzora a v pontonátmenő forgástengelyek esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\Theta' = \Theta + M(\|v\|^2 E - v \circ v)$$

teljesül, ahol E a 3×3-as egységmátrix és $\circ$ a diadikus szorzatot jelöli.

24. Vektoranalízis

I. Adjuk meg paraméteresen az alábbi görbéket és felületeket.

1. Az $y = 1$ síkban lévő $(0, 1, 0)$ középpontú 2 sugarú körvonal.
2. A $z = 0$ síkban lévő $(1, 3)$ középpontú a, b féltengelyű ellipszis $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.
3. A $z = x^2 + y^2$ és az $x + y - z = -4$ egyenletű felületek metszetgörbéje.
4. Az $(1, 2, 3)$ középpontú 5 sugarú gömb.
5. Az $x^2 + y^2 = 1$ $z = 0$ síkbeli vezérvonalú, $(0, 0, 2)$ középpontú kúpfelület.
6. A $\{(t, 2, 5) \in \mathbb{R}^3 |\ t \in \mathbb{R}\}$ vezéregyenesű 3 sugarú henger.

II. Mi lesz a

$$\gamma : \{0, 1\} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto (t^2 - 2t, 3t - 5, -t^2 - 2)$$

görbe érintőjének az egyenlete a $t_0 = 2$ paraméternél?

III. Görbék érintője.

1. Bizonyítsuk be, hogy az $r(t) = (t^2 - 2t, 3t - 5, -t^2 - 2)$ görbe síkgörbe. Mi lesz ennek a síknak az egyenlete?
2. Az $r(t) = (2t, 3t^2, 3t^3)$ görbe érintői milyen vektorral zárnak be állandó szöget, és mi ez a szög?
3. Az r görbe második deriváltja $\ddot{r}(t) = (6 - 5\cos t, 2\,\mathrm{sh}\,t + \mathrm{e}^t, 30t^4 + \mathrm{ch}\,t)$, valamint $r(0) = (5, 1, 1)$ és $\dot{r}(0) = (0, 3, 0)$. Mi az r görbe?

IV. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény és $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{grad}\log\|r\|^3$	2. $\operatorname{grad}\|r\|^5$	3. $\operatorname{grad} f(\|r\|)$
4. $\operatorname{div}(\lvert r\rvert\cdot\operatorname{grad}\ln\lvert r\rvert^3)$	5. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\lvert r\rvert^5$	6. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(\lvert r\rvert)$

V. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Itt r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és A egy 3×3-as mátrix.)

1. $\operatorname{rot}(a \times r) = 2a$
2. $\operatorname{rot}(r^2 \cdot r) = 0$
3. $\operatorname{rot}((ar)\cdot r) = a \times r$
4. $\operatorname{rot}(Ar) = 0 \quad \Leftrightarrow A$ szimmetrikus
5. $\operatorname{rot}(a|r|) = \dfrac{r \times a}{|r|}$
6. $\operatorname{rot}(r^2 \cdot a) = 2r \times a$
7. $\operatorname{rot}(fg) = f\operatorname{rot} g + \operatorname{grad} f \times g$

VI. Igazolja az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, akkor
$$\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1\operatorname{grad} U_2 + U_2\operatorname{grad} U_1.$$
2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{div}(UV) = U\operatorname{div} V + \langle V, \operatorname{grad} U\rangle.$$
3. Ha $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{div}(V_1 \times V_2) = \langle V_2, \operatorname{rot} V_1\rangle - \langle V_1, \operatorname{rot} V_2\rangle.$$
4. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{rot}(UV) = U\operatorname{rot} V + \operatorname{grad} U \times V.$$

VII. Igazoljuk a

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0 \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$$

azonosságokat!

VIII. $\boxed{H}$ Legyen V véges dimenziós vektortér és $f : V \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor

$$\mathrm{d}\,\mathrm{d}(f) : V \to \operatorname{Lin}\big(V \times V, \mathbb{R}\big)$$

függvény, vagyis minden $v \in V$ vektorra $\mathrm{d}\,\mathrm{d}(f)(v) : V \to V^*$ szimmetrikus $((dd(f)(v))^* = dd(f)(v))$ lineáris leképezés. Igazoljuk, hogy ha $(V, \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ a szokásos háromdimenziós euklidészi vektortér, akkor a $\mathrm{d}\,\mathrm{d}(f)(v)$ leképezés szimmetrikussága ekvivalens a $(\operatorname{rot}\mathrm{d}\,\mathrm{d}(f))(v) = 0$ egyenlettel!

IX. Tegyük fel, hogy a

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto x^3 + xy^2 + z$$

potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen hely-erő $r \mapsto v(r)$ vektormező származtatható a potenciálból?

X. Az alábbi $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezők származtathatók-e egy potenciálos térből az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x,y,z > 0\}$
2. $v(r) = \frac{r}{|r|^2} \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x,y,z) = (y,x,0) \qquad V = \mathbb{R}^3$
4. $v(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}, 0\right) \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \neq 0\}$
5. $v(x,y,z) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}, 0\right) \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x < y\}$
6. $v(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad V = \mathbb{R}^3$
7. $v(x,y,z) = \left(\frac{\operatorname{ch} z^2}{x}, \frac{\operatorname{ch} z^2}{y}, 2z\ln(xy)\cdot\operatorname{sh} z^2\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
8. $v(x,y,z) = \left(2x\,\mathrm{e}^{yz} - z\sin(xz), zx^2\,\mathrm{e}^{yz} + y, yx^2\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(xz)\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
9. $v(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad V = \mathbb{R}^3$
10. $v(x,y,z) = \left(\frac{\operatorname{ch} z^2}{x}, \frac{\operatorname{ch} z^2}{y}, 2z\ln(xy)\cdot\operatorname{sh} z^2\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
11. $v(x,y,z) = \left(2x\,\mathrm{e}^{yz} - z\sin(xz), zx^2\,\mathrm{e}^{yz} + y, yx^2\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(xz)\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
12. $v(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$

XI. Legyen $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Igazoljuk, hogy az A vektorfüggvény pontosan akkor potenciálos, ha szimmetrikus.

XII. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ görbe menti integrálját, ahol

1. $f(x,y,z) = (y^2 - x^2, 2yz, -x^2)$, $I = [0,\pi]$ és $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$;
2. $f(x,y,z) = (y + z^2, x + z, x + y)$ és γ az $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (1,1,1)$ háromszög oldala az $A \to B \to C \to A$ bejárással;
3. $f(x,y,z) = \left(\frac{2xy^2}{z^2}, \frac{2x^2y}{z^2}, -\frac{2x^2y^2}{z^3}\right)$ és γ_1 az $x^2 + z^2 = 1$ és $y = 2$ felületek metszésvonala, valamint γ_2 az $x^2 + y^2 = 1$ és $z = 1$ felületek metszésvonala;
4. $f(x,y,z) = (2yz + x^2, 2xz + y^2, 2xy + z^2)$ és γ tetszőleges folytonosan differenciálható görbe a $(2,1,3)$ és a $(-1,3,-2)$ pontok között;
5. $f(x,y,z) = (xy, y^2, xz)$, $I = [0,1]$ és $\gamma(t) = (t, t^2+1, \exp(t))$;
6. $f(x,y,z) = (xy, y, 0)$, $I = [0,\pi]$ és $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ (ciklois);
7. $f(x,y,z) = (-y, x, 0)$ és γ_1 az $A = (0,1,0)$ és a $B = (1,0,0)$ pontokat összekötő egyenesvonal, valamint γ_2 a $z = 0$ síkban lévő origó középpontú kör negyedíve az $A = (0,1)$ és a $B = (1,0)$ pontok között.

XIII. $\boxed{H}$ Igazoljuk az alábbi, paraméteres integrálokra vonatkozó egyenlőségeket.

1. Minden $r \in [0,1]$ esetén
$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$
2. Minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméterre
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\log(a+1).$$

XIV. $\boxed{H}$ Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ zárt intervallum és $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ és $p : [0,a] \to I$ diffeomorfizmus, hogy minden $t \in [0,a]$ paraméterre $t = \int_0^t \|(\gamma \circ p)'\|$ teljesül.

XV. $\boxed{H}$ Legyen $a, r \in \mathbb{R}^+$, $r < a$. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\int_0^{2\pi} \frac{r + a\cos t}{a^2 + 2ar\cos t + r^2}\,\mathrm{d}\,t = 0$$
teljesül, úgy, hogy egy alkalmas vektormezőt integrálunk az (x,y) síkban lévő $(a,0)$ középpontú r sugarú körön.

XVI. Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb.
2. Csavarfelület, melynek paraméterezése
$$P : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u+v).$$
3. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \le a$ és a paraméterezés
$$P : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta,\varphi) \mapsto ((a + b\cos\varphi)\cos\vartheta, (a+b\cos\varphi)\sin\vartheta, b\sin\varphi).$$
4. Ellipszis, melynek féltengelyei a, a, b $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

XVII. Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1. Legyen $f(x,y,z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése
$$P : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u^2).$$
2. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(r) = r$ és F az $(1,0,0)$ középpontú 1 sugarú gömbhéj $z \ge 0$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0,0,1)\rangle \ge 0$ teljesüljön.
3. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \ge 0$ része.
4. Legyen $v(x,y,z) = (x, 3x, -2z)$, és legyen F annak a kúppalástnak a csúcspont és a vezérgörbe közötti része, amelynek csúcspontja $(1,2,3)$, vezérgörbéje pedig a $z = 1$ síkban $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, a $n(0,0,1) \ge 0$ irányítással.
5. Legyen $v(x,y,z) = (x,y,z)$, és legyen F az
$$r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos v(3 + \cos u), \sin v(3 + \cos u), \sin u)$$
paraméterezésű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis mutasson az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé).

XVIII. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ reguláris határú nyílt halmaz, és $u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ olyan, hogy $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ha a $\operatorname{div} f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény μ_Ω integrálható, akkor az $\langle u, n_{\partial\Omega}\rangle : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$ integrálható és

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} v \; \mathrm{d}\,\mu_\Omega = \iint\limits_{\partial\Omega} \langle u, n_{\partial\Omega}\rangle \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial\Omega}$$

teljesül, amit Gauss–Osztrogradszkij-tételnek nevezünk.
Számoljuk ki a Gauss–Osztrogradszkij-tétel jobb, illetve bal oldalán álló mennyiségeket abban az esetben amikor Ω az origó középpontú R sugarú gömb belseje és $v(r) = r \cdot \|r\|^n$, ahol $n \in \,]-2, \infty[$, illetve külön vizsgáljuk meg az $n = -3$ esetet.

XIX. Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, reguláris határú halmaz és $u_1, u_2 \in C^2(V, \mathbb{R})$. Ekkor

$$\iiint\limits_{V} u_1 \Delta u_2 + \langle \operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2\rangle \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

$$\iiint\limits_{V} u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 - u_2 \operatorname{grad} u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

teljesül, amit aszimmetrikus, illetve szimmetrikus Green-formulának nevezünk.
Számoljuk ki a Green-formulák jobb illetve bal oldalán álló mennyiségeket az alábbi esetekben.

1. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \|r\|^2$ és $u_2(r) = \ln \|r\|$.
2. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \langle a, r\rangle^2$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$, és $u_2(r) = \ln \|r\|$.

XX. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n, (0,0,1)\rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$
Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F \operatorname{rot} v \; \mathrm{d}\,F$ integrál értékét.
2. Számoljuk ki a
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$
vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.
3. Legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x, y, -2z),$$
és legyen F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n, (0,1,0)\rangle \geq 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F v \; \mathrm{d}\,F$ integrál értékét.
4. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része.
5. Legyen $v(r) = |r|^3 \big(r \times (0,0,1)\big)$ és F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része, valamint a felület n normálvektorára $n(0,0,1) \geq 0$ teljesüljön.

XXI. $\boxed{F}$ Keressük meg a hibát az alábbi gondolatmenetekben.

1. Legyen v egy nyugvó ponttöltés elektromos tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \qquad r \mapsto \frac{r}{|r|^3}.$$
Mivel $\operatorname{div} v = 0$ ezért az R sugarú nulla középpontú gömbre integrálva a $\operatorname{div} v$ függvényt nullát kapunk. Az R sugarú gömbhéjra vett integrálja a v vektormezőnek viszont 4π. Azonban $0 \neq 4\pi$!
2. Legyen v egy egyenárammal átjárt végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus ((0,0) \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(-x_2, x_1, 0).$$
Ekkor $\operatorname{rot} v = 0$, vagyis az $x_3 = 0$ síkban a nulla középpontú R sugarú körlapra integrálva a $\operatorname{rot} v$ függvényt nullát kapunk. Az előbbi kör határán vett integrálja a v vektormezőnek viszont 2π. Azonban $0 \neq 2\pi$!

XXII. $\boxed{H}$ Integrálok differenciálása.

1. Legyen $A \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és $\gamma \in C^2(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $\gamma(\cdot, t) : I \to \mathbb{R}^3$ görbét ad meg, melyet $\Gamma(t)$-vel jelölünk. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int\limits_{\Gamma(t)} A(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\partial A(r,t)}{\partial t} - v(r,t) \times \operatorname{rot} A(r,t) + \operatorname{grad}(v(r,t)A(r,t)) \;\mathrm{d}\,r$$
teljesül, ahol $v(\gamma(a,t),t) := (\partial_2 \gamma)(a,t)$. Továbbá, ha minden $t \in I$ paraméterre a $\Gamma(t)$ görbe zárt, akkor az integrálban szereplő $\operatorname{grad}(vA)$ tag elhagyható.
2. Legyen $\rho \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és $F \in C^2(T \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $F(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}^3$ zárt, sima felület ad meg, melynek belsejét $V(t)$-vel jelöljük. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \iiint\limits_{V(t)} \rho(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + v(r,t) \operatorname{grad} \rho(r,t) + \rho(r,t) \operatorname{div} v(r,t) \;\mathrm{d}\,r$$
teljesül, ahol $r = F(a,t)$ esetén $v(r,t) = (\partial_2 F)(a,t)$.
3. Legyen $A \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és $F \in C^2(T \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $F(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}^3$ sima felület ad meg, melyet $S(t)$-vel jelölünk. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \iint\limits_{S(t)} A(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \iint\limits_{S(t)} \frac{\partial A(r,t)}{\partial t} + v(r,t) \operatorname{div} A(r,t) + \operatorname{rot}(A(r,t) \times v(r,t)) \;\mathrm{d}\,r$$
teljesül, ahol $r = F(a,t)$ esetén $v(r,t) = (\partial_2 F)(a,t)$.

25. Komplex függvénytan

I. Szemléltessük a komplex számsíkon a

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| = 2\}$
2. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\right\}$

3. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z^2 = 4\}$

4. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0\right\}$

5. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z+2| \le 5\}$

6. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + \operatorname{Re} z \le 1\}$

7. $\{z \in \mathbb{C} \mid |2z| > \left|1 + z^2\right|\}$

8. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{2}\right\}$

halmazokat, ahol $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

II. Legyen a $z \in \mathbb{C}$ szám algebrai alakja $z = x + \mathrm{i}\, y$. Fejezzük ki z illetve $\bar{z}$ segítségével az alábbi formulákat.

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad x^2 - 4y - 4 \ge 0$$

III. Keressünk olyan komplex függvényeket melyek a megadott $V_1 \subset \mathbb{C}$ halmazt a $V_2 \subseteq \mathbb{C}$ halmazra képezik.

1. $V_1 = \{t(1+\mathrm{i}) \mid t \in [0,1]\}$ $\qquad V_2 = \{t \mid t \in [0,1]\}$
2. $V_1 = \{z \mid |z + \mathrm{i}| \ge 2\}$ $\qquad V_2 = \{z \mid |z + 1 - \mathrm{i}| \ge 4\}$
3. $V_1 = \{z \mid \operatorname{Im}(z) \in [0,1]\}$ $\qquad V_2 = \{z \mid \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}) \in [0,2]\}$
4. $V_1 = \{z \mid (1+2\,\mathrm{i})z + (1-2\,\mathrm{i})\bar{z} = 8\}$ $\qquad V_2 = \{z \mid |z| = 1\}$
5. $V_1 = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Re}(z)\}$ $\qquad V_2 = \{z \mid |z + \mathrm{i}| < 1\}$

IV.

1. Legyen $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ konvergens és létezik olyan $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\arg z_n| \le \alpha$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ is konvergens.
2. Legyen $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n^2$ konvergens, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Re} z_n \ge 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|z_n^2\right|$ is konvergens.

V. Számoljuk ki a

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{\bar{z}}, \qquad \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{(z-\mathrm{i})^2}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2(6(\operatorname{Im} z) - 1) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} z)\sin(\operatorname{Re} z)}{|z|}$$

határértékeket.

VI. Vizsgáljuk a következő komplex sorozatok és sorok konvergenciáját, ahol lehet számoljuk ki a sorösszeget.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+in)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in}}{n^2}$$

VII. Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény?

1. $f(z) = z\,|z|$
2. $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$
3. $f(x + \mathrm{i}\, y) = y^3 - \mathrm{i}(x-1)^3$
4. $f(z) = z - \bar{z}$
5. $f(x+\mathrm{i}\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \mathrm{i}\, y^3}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad z \ne 0; \\ 0 & \text{ha} \quad z = 0. \end{cases}$
6. $f(z) = \bar{z}$
7. $f(z) = \left|\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2\right| + 2\,\mathrm{i}\,|\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)|$
8. $f(z) = \sin z$

VIII. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{C}$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi u függvény egy reguláris komplex függvény valós része legyen, valamint határozzuk meg a hozzá tartozó reguláris függvényt is.

1. $u(x, y) = ax^2 + 2xy - 4y^2 + 3$
2. $u(x, y) = ax^3 + 36xy^2 + xy$
3. $u(x, y) = -x^3 + axy^2 - y$

IX. Legyen $G \subseteq \mathbb{C}$ nem üres, nyílt, ívszerűen összefüggő halmaz és $f : G \to \mathbb{C}$ reguláris függvény.

1. Igazoljuk, hogy ha van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in G$ elemre $|f(z)| = c$, akkor az f függvény konstans.
2. Igazoljuk, hogy ha van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in G$ elemre $\operatorname{Re} f(z) = c$, akkor az f függvény konstans.

X. Milyen tartományon létezik az alábbi vektormezőknek komplex potenciáljuk? Határozzuk meg a komplex potenciált, ha létezik.

1. $v(x, y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2} - 2x, \dfrac{2y}{x^2 + y^2} + 2y \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
2. $v(x, y) = \big(2xy + 6y - 4x - 12, x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5\big)$
3. $v(x, y) = \big(1 - \mathrm{e}^x \cos y, -\mathrm{e}^{-x} \sin y\big)$

XI. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény és $G \subseteq \mathbb{C}$.

1. Mi lesz az $f(G)$ halmaz, ha $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ és $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$?
2. Mi lesz az $f(G)$ halmaz, ha $f(z) = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ és $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$?
3. Mi lesz az $f(G)$ halmaz, ha $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{i}} \cdot \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$ és G a 0, 1 és i pontok által meghatározott háromszög?

XII. Keressük meg azt a lineáris törtfüggvényt, melyre

1. $f(0) = \mathrm{i}$, $f(-\mathrm{i}) = 1$ és $f(-1) = 0$;
2. $f(1) = 0$, $f(\mathrm{i}) = 1$ és $f(-\mathrm{i}) = \infty$;
3. $f(0) = 1$, $f(1) = \mathrm{i}$ és $f(\infty) = -\mathrm{i}$.

XIII. $\boxed{H}$ Tegyük fel, hogy az $f : C \to \mathbb{C}$ függvény reguláris az $\overline{S_1(0)}$ halmazon, valamint $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor $|f'(0)| \geq 1$.

XIV. $\boxed{H}$ Legyen $\alpha, c \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|\alpha| < 1$ és $|c| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor az $f(z) = c\dfrac{z - \alpha}{1 - z\overline{\alpha}}$ függvény az $S_1(0)$ egységkört kölcsönösen egyértelműen képezi le önmagára.

XV. $\boxed{H}$ Tekintsük az

$$d : S_1(0) \times S_1(0) \to \mathbb{R} \qquad (a, b) \mapsto \left| \frac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right|$$

függvényt. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Minden $a, b \in S_1(0)$ elemre $d(a, b) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.
2. Minden $a, b \in S_1(0)$ elemre $d(a, b) = d(b, a)$.
3. Minden $a, b \in S_1(0)$ elemre $d(a, b) \in [0, 1]$.

4*. Minden $a, b, c \in S_1(0)$ elemre $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.

XVI. $\boxed{H}$ Legyen $f : S_1(0) \to S_1(0)$ reguláris függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $a, b \in S_1(0)$ elemre

$$\left| \frac{f(a) - f(b)}{1 - \overline{f(a)} f(b)} \right| \leq \left| \frac{a - b}{1 - \overline{a} b} \right|$$

teljesül.

XVII. Számoljuk ki az f függvény γ görbe menti integrálját.

1.	$f(z) = \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z)$	$\gamma(t) = t + \mathrm{i}\, t^2$	$t \in [0,2]$
2.	$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\bar{z}}$	$\gamma(t) = \cos(\pi t) + \mathrm{i}\sin(\pi t)$	$t \in [0,1]$
3.	$f(z) = z\,\mathrm{e}^{z^2}$	$\gamma(t) = 2t + (2 + 2t)$	$t \in [1,5]$
4.	$f(z) = z \sin z \cos z$	$\gamma(t) = 2\cos(\pi t) + \mathrm{i}\sin(\pi t)$	$t \in [1,0]$

XVIII. $\boxed{H}$ Tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} -3 - 2\,\mathrm{i} + 24t & \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ 3 - 2\,\mathrm{i} + 4(4t-1)\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ 3 + 2\,\mathrm{i} - 12(2t-1) & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ -3 + 2\,\mathrm{i} - 4(4t-3)\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Határozzuk meg a görbe indexfüggvényének az értékét az $1 + \mathrm{i}$ pontban.

$$\left(\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi \right)$$

XIX. Számoljuk ki az adott f függvény és γ görbe mellett a $\int_\gamma f$ vonalmenti integrálokat.

1.	$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$	$\gamma :$ az origó körüli 2 egység sugarú kör
2.	$f(z) = \dfrac{\exp z}{z - 1}$	$\gamma :$ az 1 körüli π egység sugarú kör
3.	$f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\, z - z - \frac{z^3}{6}}{z^6}$	$\gamma :$ az origó körüli 2 egység sugarú kör
4.	$f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\, z - z - \frac{z^3}{6}}{z^5}$	$\gamma :$ az origó körüli 3 egység sugarú kör
5.	$f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^3}$	$\gamma :$ az origó körüli 1 egység sugarú kör

(A feladatok megoldásánál használjuk fel, hogy $\gamma(t) = R\exp(2\pi\,\mathrm{i}\, t)$ $(t \in [0,1],\ R \in \mathbb{R}^+)$ és $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ esetén

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad n = -1, \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1 \end{cases}$$

teljesül.)

XX. Legyen $0 < r < R$ pozitív valós szám, $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ és tekintsük a

$$\gamma_{r,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R-r) & \text{ha } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ R\,e^{i\,\pi(4t-1)/2} & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ i(R + (4t-2)(r-R)) & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ r\,e^{2\pi\,i(1-t)} & \text{ha } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_{r,R}} f\right) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x - \frac{\pi}{2} = 0$$

teljesül!

XXI. Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,e^{2\pi t\,i}.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

1. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^{i z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z\cos z^2\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\gamma_{2i,3}} \frac{\sin i\,z}{(z-1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

4. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,4}} \frac{z^2+3}{z(z-2)^3}\,\mathrm{d}\,z$ 5. $\displaystyle\oint_{\gamma_{1,3}} \frac{e^{\pi z}-1}{(z-i)z}\,\mathrm{d}\,z$ 6. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-1,3}} \frac{\sin z}{z(z-i)^2}\,\mathrm{d}\,z$

7. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} \frac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^6}\,\mathrm{d}\,z$ 8. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,3}} \frac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^5}\,\mathrm{d}\,z$ 9. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-1,3}} \frac{\cos z - 1}{z^3}\,\mathrm{d}\,z$

(Útmutatás: Használjuk fel, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\operatorname{Dom} f$ konvex és $\operatorname{Ran}\gamma_{z_0,R} \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra és $w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma_{z_0,R}$ paraméterre

$$\frac{n!}{2\pi\,i}\oint_{\gamma_{z_0,R}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z = \begin{cases} f^{(n)}(w) & \text{ha} \quad |w-z_0| < R, \\ 0 & \text{ha} \quad |w-z_0| > R \end{cases}$$

teljesül.)

XXII. Számoljuk ki a következő körintegrálokat, ahol csak a γ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe képét adtuk meg, azzal a konvencióval, hogy a γ görbe egyszer kerüli meg a 0 pontot pozitív irányítással.

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|+|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-5\,i)^3}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,i}\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\max\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,i}\,\mathrm{d}\,z$

XXIII. $\boxed{H}$ A Cauchy-integrálformula következményei.

1. Igazoljuk az
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2\pi}{1-p^2}$$
egyenlőséget, ahol $p\in\,]0,1[$.
(Útmutatás: A $z=\mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}}$ helyettesítésel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)

2. Igazoljuk, hogy minden $a\in\mathbb{R}^+$ számra
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x=\frac{3\pi}{8a^5}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi\,\mathrm{e}^{-a}}{2a}$$
teljesül.
(Útmutatás: Mindkét esetben legyen $R\in\,]a,\infty[$ és integráljunk a
$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\qquad t\mapsto\begin{cases}-R+4tR & \text{ha}\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right[,\\ R\,\mathrm{e}^{\pi(2t-1)\,\mathrm{i}} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$
görbe mentén, majd vegyük az $R\to\infty$ határértéket.)

3. Igazoljuk, hogy minden $a,b\in\mathbb{R}^+$ paraméterre
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{2}(b-a)$$
teljesül.
(Útmutatás: Legyen $r\in\,]0,\min(a,b)[$, $R\in\,]\max(a,b),\infty[$, és az
$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,bz}}{z^2}$$
függvényt integráljuk a
$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\qquad t\mapsto\begin{cases}r+4t(R-r) & \text{ha}\quad t\in\left[0,\frac{1}{4}\right[,\\ R\,\mathrm{e}^{\pi(4t-1)\,\mathrm{i}} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[,\\ -R+(4t-2)(R-r) & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[,\\ r\,\mathrm{e}^{4\pi(1-t)\,\mathrm{i}} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{3}{4},1\right]\end{cases}$$
görbe mentén, majd vegyük az $R\to\infty$ és $r\to 0$ határértékeket!)

4. Legyen $p\in\,]0,1[$, bizonyítsuk be az
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$
egyenlőséget.
(Útmutatás: Legyen $R\in\,]p,\infty[$ és integráljuk az
$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{pz}}{1+\mathrm{e}^z}$$

függvényt a

$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\qquad t\mapsto\begin{cases} -R+8tR & \text{ha}\quad t\in\left[0,\frac{1}{4}\right[,\\ R+(4t-1)2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[,\\ R-2R(4t-2)+2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[,\\ -R+(1-t)8\pi\,\mathrm{i} & \text{ha}\quad t\in\left[\frac{3}{4},1\right]\end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az $R\to\infty$ határértéket!)

XXIV. Határozzuk meg a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(z-i)^n}{2^{|n|}(1+|n|}$$

hatványsor külső és belső konvergenciasugarát!

XXV. Határozzuk meg az

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

függvény Laurent-sorát az alábbi gyűrűkben.

1. $|z|<1$;
2. $1<|z|<2$;
3. $2<|z|$.

XXVI. Tekintsük az

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^4}$$

függvényt. Írjuk fel az f függvény 2 bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergenciagyűrűjét és számoljuk ki a $\operatorname{res}_2 f$ és a $\operatorname{res}_0 f$ reziduumot.

26. Differenciálegyenletek

I. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a Taylor-sorfejtés segítségével, és vizsgáljuk meg, hogy hol konvergens a megoldásként kapott Taylor-sor.

1. $y'(x)=x^2+y(x)$
2. $y'(x)=\dfrac{2x-y(x)}{1-x}$
3. $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+n(n+1)y(x)=0$
4. $y''(x)-2xy'(x)+2ny(x)=0$

II. Szukcesszív approximációval próbáljuk megoldani a következő feladatokat.

1. $y'(x)=xy(x)$, $y(0)=1$
2. $y'(x)=x^2+y^2(x)$, $y(0)=1$

III. Keressük meg azokat a nyílt intervallumon értelmezett, folytonosan differenciálható y függvényeket melyek megoldásai a következő szétválasztható, illetve szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenleteknek.

1. $y'(x)=y^2(x)\sin(2x)$
2. $y'(x)=\dfrac{x^2\cos^2 y(x)}{\sin y(x)}$

3. $y'(x) = \dfrac{y(x)(y^2(x)+1)}{x}$

4. $y'(x) = \dfrac{1-x-y(x)}{2x+2y(x)-3}$

5. $y'(x) = (y(x)-1)^2(x+2)^3$

6. $y'(x) = \dfrac{3x^2+4x+2}{2y(x)-2}$

7. $y'(x) = \left(\dfrac{x+y(x)+2}{x+2}\right)^2$

8. $y'(x) = (y(x)-4x)^2$

IV. Oldjuk meg a következő lineáris elsőrendű kezdetiérték-problémákat.

1. $y'(x) + y\operatorname{ctg} x = 5\,\mathrm{e}^{\cos x}$ $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4$
2. $y'(x) + 2xy(x) = 2x^3$ $\qquad y(0) = 1$
3. $y'(x) + y(x)\cos x = (\sin x)(\cos x)$ $\qquad y(0) = 1$
4. $y'(x) + 3y(x) = x + \mathrm{e}^{-2x}$ $\qquad y(0) = \dfrac{8}{9}$
5. $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$ $\qquad y(1) = \sin 1$
6. $xy'(x) + 2y(x) = \sin x$ $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$

V. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenleteket.

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x\,\mathrm{e}^{5x}, \quad y'(x) - \frac{1}{x\ln x}y(x) = x\ln x, \quad y'(x) + 2y(x)\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x$$

VI. Oldjuk meg az alábbi vegyes elsőrendű differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) = \dfrac{x-y(x)}{x}$

2. $y'(x) = -\dfrac{xy(x)+x^2+1}{x^2}$

3. $y'(x) = -\dfrac{x^2+y^2(x)}{xy(x)}$

4. $y'(x) = -\dfrac{2y+xy^2(x)}{2x+x^2y(x)}$

5. $y'(x) = 2x^3 - 2xy(x)$

6. $y'(x) = \sin(5x+2y(x)) - \dfrac{1}{2}$

7. $y'(x) = -\dfrac{x^2-xy(x)+y^2(x)}{x^2}$

8. $y'(x) = \dfrac{2x-y(x)}{1-x}$

VII. $\boxed{F}$ Néhány fizikai alkalmazás.

1. Írjuk le az m tömegű test sebességének változását homogén gravitációs erőtérben az idő függvényében, ha a gravitációs gyorsulás g és a közegellenállási erő kv^2, ahol v a test pillanatnyi sebessége, tudván, hogy a test sebessége a $t=0$ időpontban v_0.
2. Egy kúp alakú tölcsérben víz van, ami a tölcsér alján lévő lyukon keresztül folyik ki a g gravitációs gyorsulás hatására. A kúp keresztmetszete h magasságban ah sugarú körlap, a kúp alján lévő lyuk keresztmetszete A. Írjuk le, hogyan változik a vízszint magassága a kúpban, ha a víz viszkozitásától és belső surlódásától eltekintünk, feltéve, hogy a $t=0$ időpontban a víz magassága h_0.
3. Tegyük fel, hogy egy nyúl fut a síkon állandó v sebességgel a $(0,1)$ irányba. Egy róka üldözi a nyulat állandó u sebességgel, és a róka mindig a nyúl irányába fut. Tegyük fel, hogy a $t=0$ időpillanatban a nyúl az origóban, a róka pedig az $(x_0,0)$ pontban van ($x_0 \le 0$). Írjuk fel a róka pályájának $y(x)$ függvényét.

4. Tegyük fel, hogy egy l hosszúságú vízszintes rugalmas gumiszál egyik vége a falhoz van rögzítve, a másik végén pedig egy hangya sétál a gumiszálon a fal felé a gumiszálhoz képest v sebességgel. Ám egy gonosz manó elkezdi a gumiszál szabad végét húzni w sebességgel a fallal ellentétes irányba. Eléri-e a hangya a falat, és ha igen, mennyi idő alatt?

VIII. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények megoldásai a mellékelt differenciálegyenleteknek!

1. $y(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t + 3\,\mathrm{e}^x \qquad y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^{x+x^2}$
2. $x^2 + y^2(x) - x^6 + y^4(x) = C \qquad y(x)y'(x)(1 + 2y^2(x)) = 3x^5 - x$

IX. Mi lesz a következő homogén egyenletek megoldása?

1. $\dot{x}(t) = 2\sqrt{\frac{x(t)}{t}} + \frac{x(t)}{t} \qquad x(1) = 0$
2. $\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\frac{x(t)}{t} \qquad x\,(()\,\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{12}$
3. $\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} + \left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 \qquad x(1) = 1$
4. $\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} + \left(\frac{x(t)}{t}\right)^3 \qquad x(1) = 1$
5. $\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} + \left(\frac{x(t)}{t}\right)^4 \qquad x(1) = 1$
6. $\dot{x}(t) = q\frac{x(t)}{t} + 2(1-q)\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 \qquad x(1) = 1 \qquad (q \in \mathbb{R})$

X. Oldjuk meg a homogén állandó együtthatós differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 5$
2. $y'' + y = 0,\; y(0) = a,\; y'(0) = b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$
3. $y'' - y = 0,\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0$
4. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
5. $y''' + y'' + y' + y = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1,\; y''(0) = 2$
6. $y''' - y'' - y' + y = 0$
7. $\sum_{k=0}^{n} y^{(n)} = 0$

XI. Keressük meg az inhomogén másodfokú egyenletek, illetve kezdetiérték-problémák megoldását, ahol $\beta, \omega, k \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. $y''(x) + 4y(x) = \sin^2 2x$
2. $y''(x) - 5y(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$
3. $y'''(x) = 12 \quad y''(1) = 0 \quad y'(1) = 0 \quad y(1) = 0$
4. $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin 2x + \cos 2x \quad y'(0) = 1 \quad y(0) = 0$
5. $y''(x) + \omega^2 y(x) = kx^2$

6. $y''(x) + \omega^2 y(x) = k\,\mathrm{e}^{\beta x}$
7. $y''(x) + \omega^2 y(x) = k \cos \beta x$

XII. Oldjuk meg a hiányos másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat.

1. $y''(x) = y'(x) \operatorname{ctg} x,\ y(0) = 2$
2. $y''(x) = 1 + y'(x)^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
3. $y''(x) = \mathrm{e}^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
4. $y''(x) = (y'(x))^2 \sin x,\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

XIII. $\boxed{F}$ Vizsgáljuk meg a csillapított rezgőmozgást az alábbi módon. Legyen az $m \in \mathbb{R}^+$ tömegű test $D \in \mathbb{R}^+$ direkciós erejű rugóhoz erősítve, és a közegellenállási erő legyen kv (ahol v a sebesség, és $k \in \mathbb{R}^+$ a közegellenállásra jellemző paraméter). A mozgás egyenlete

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0.$$

Indítsuk el a testet az egyensúlyi helyzetből v_0 sebességgel, azaz

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0.$$

Oldjuk meg a differenciálegyenletet az alábbi esetekben.
1. Ha a közegellenállás kicsi: $k < 2\sqrt{mD}$.
2. Ha a közegellenállás nagy: $k > 2\sqrt{mD}$.
3. Ha $k = 2\sqrt{mD}$.

XIV. Igazoljuk, hogy az alábbi differenciálegyenletek mindegyike egzakt, és oldjuk is meg azokat.

1. $2x^3 - xy^2(x) + (2y^3(x) - x^2 y(x))y'(x) = 0,\ y(1) = 1$
2. $2xy(x) + (b + x^2)y'(x) = 0,\ y(0) = a \qquad (a, b \in \mathbb{R})$
3. $y'(x) = \dfrac{\sin y(x) + y(x) \sin x}{\cos x - x \cos y(x)}, y(0) = 1$
4. $y(x)(y(x) - 2x) - x(x - 2y(x))y'(x) = 0,\ y(1) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

XV. Keressünk megfelelő integráló tényzőt, hogy egzakttá tegyük az alábbi differenciálegyenleteket, és oldjuk meg azokat.

1. $xy(x) + x^2 + 1 + x^2 y'(x) = 0,\ y(1) = -\dfrac{1}{2}$
2. $x^5 y^4(x) + x^7 y^3(x) y'(x) = 0,\ y(1) = 2\,\mathrm{e}$
3. $y'(x)(y(x)e^x - 1) + y(x) = 0,\ y(0) = 2$

XVI. Oldjuk meg az inverz függvényre felírt differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x + y(x)^2},\ y(1) = 1$
2. $y'(x) = \dfrac{y(x)^2}{y(x)^2 + 2xy(x) - x},\ y(1) = 1$

XVII. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletrendszereket.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - \mathrm{e}^{2t} \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - \cos t \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin t \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + t \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_3(t) + 6\,\mathrm{e}^{2t} \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_3(t) + 9\,\mathrm{e}^{2t} \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) + 5\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$

XVIII. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges vektor. Keressük meg azokat az $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ függvényeket, melyekre

$$\dot{x} = \omega \times x.$$

XIX. Vezessük be az alábbi jelölést, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter

$$C_{\mathrm{L}}(a) = \left\{ f : [0, \infty] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ szakaszonként folytonos minden véges inter-} \\ \text{vallumon és } \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \le M\,\mathrm{e}^{ax} \end{array} \right\}.$$

Az $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvény *Laplace-transzformáltja*

$$\mathcal{L}(f) :]a, \infty[\to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}\,x.$$

Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám esetén jelölje a^+ az a szám pozitív részét, azaz $a^+ = 0$ ha $a \le 0$, valamint $a^+ = a$ ha $a > 0$. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények a megadott függvényosztályba tartoznak, valamint teljesülnek a Laplace-transzformáltjukra vonatkozó összefüggések. A függvényeknél $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ paraméterek.

1.	$f(x) = x^n$	$f \in C_{\mathrm{L}}(0)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
2.	$f(x) = \cos(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(0)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$
3.	$f(x) = \sin(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(0)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$
4.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p - a}$
5.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{b}{(p-a)^2 + b^2}$
6.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$
7.	$f(x) = \mathrm{sh}(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(\lvert a \rvert)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2 - a^2}$
8.	$f(x) = \mathrm{ch}(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(\lvert a \rvert)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2 - a^2}$

XX. Az f és g függvények konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

képlettel értelmezük, amikor az integrál létezik. Ha valamilyen $f, g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvények konvolúciójára $f * g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ teljesül valamilyen $a \in \mathbb{R}^+$ paraméterrel, akkor miden $p > a$ esetén

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p).$$

Ennek segítségével igazoljuk, hogy az alábbi Laplace-transzformáltak a megadott függvényekhez tartoznak. A feladatokban $a > 0$ paraméter.

1. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p^3 + ap}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1 - \cos(\sqrt{a}x)}{a}$
2. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p^3 + ap^2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{ax - 1 + \mathrm{e}^{-ax}}{a^2}$
3. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{(p-a)^2}$ $\qquad f(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$

XXI. Legyen $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ n-szer folytonosan differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

teljesül.

XXII. Az alábbi differenciálegyenleteket oldjuk meg Laplace-transzformációval, ahol $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ folytonosan differenciálható függvény és $A, B, C \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. Tekintsük az $y'' + 2y' + 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$ és $y'(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p+1)^2+1} + A\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + (A+B)\frac{1}{(p+1)^2+1},$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \left(f * \frac{\sin}{\exp}\right)(x) + A\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + (A+B)\,\mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

2. Tekintsük az $y''' - 2y'' + y' - 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$, $y'(0) = B$ és $y''(0) = C$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(p) = \quad & \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p-2)(p^2+1)} + \frac{1}{p-2} \cdot \frac{p^2}{p^2+1} + \\ & + (B-2A)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + (A-2B+C)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p^2+1},\end{aligned}$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \big(f * (\exp)^2 * \sin\big)(x) + A\,\mathrm{e}^{2x} - A\big((\exp)^2 * \sin\big)(x) + \\ & + (B-2A)\big((\exp)^2 * \cos\big)(x) + (A-2B+C)\big((\exp)^2 * \sin\big)(x),\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \left(\frac{(\exp)^2 - 2\sin - \cos}{5} * f\right)(x) + \\ & + \frac{A+C}{5}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{-2A+5B-2C}{5}\sin x + \frac{4A-C}{5}\cos x.\end{aligned}$$

3. Tekintsük az

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - \cos t \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin t$$

egyenletrendszert az $x_1(0) = A$ és $x_2(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor a keresett függvények Laplace-transzformáltjai

$$\mathcal{L}(x_1)(p) = -\frac{1}{p^2+1} + 2\frac{1}{(p^2+1)^2} + A\frac{p}{p^2+1} + B\frac{1}{p^2+1}$$
$$\mathcal{L}(x_2)(p) = 2\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} + B\frac{p}{p^2+1} - A\frac{1}{p^2+1}$$

vagyis

$$x_1(t) = A\cos t + B\sin t - t\cos t$$
$$x_2(t) = B\cos t - A\sin t + t\sin t.$$