Kalkulus 2

Andai Attila*

2018. április 29.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Véges dimenziós terek topológiája

1.1. Skaláris szorzás és norma

1.1. Definíció. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren az alábbi műveleteket értelmezzük.

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} & ((x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}), (y_1, \ldots, y_{\mathfrak{n}})) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}} + y_{\mathfrak{n}}) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} & (\lambda, (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}})) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{\mathfrak{n}}) \end{array}$$

1.2. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér a fenti műveletekkel vektortér.*

1.3. Definíció. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} \overline{x_k} y_k$$

műveletet *skaláris szorzásnak* nevezzük.

1.4. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a skaláris szorzásra az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
2. $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
5. $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

1.5. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

1.6. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ *vektorok által bezárt szög*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}}.$$

1.7. Definíció. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren értelmezett

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} : \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér*, ha $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren.

1.8. Tétel. *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}\}$$

leképezések normák (melyet p-normának vagy sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

1.9. Tétel. *A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren minden $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ teljesül.*

1.10. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \setminus \{0\}$ vektorra*

$$\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \, \|y\|_2 \cos \alpha$$

teljesül, ahol α a vektorok által bezárt szög.

1.11. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

1.2. Topológiai alapfogalmak

1.12. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in \mathbb{K}^n$ pontra a

$$B_r^{\|\cdot\|}(x) \triangleq \{y \in \mathbb{K}^n |\ \|x - y\| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, a normát nem írjuk ki, tehát csak a $B_r(x)$ szimbólumot fogjuk használni.

1.13. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in]0, r - \|x - y\|[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$$

teljesül.

1.14. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezésre az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.15. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{K}^n \setminus X$ nyílt.
- Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.16. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

1.17. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x \in \mathbb{K}^n$ pont és $r \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

1.18. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*
1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

1.19. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.*
1. *Az üres halmaz és $\mathbb{K}^n$ zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

1.20. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $Z, U \subseteq \mathbb{K}^n$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

1.21. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy x
- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{K}^n \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

1.22. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, $X \subseteq \mathbb{K}^n$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

1.23. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X$$

halmazt.

1.24. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X-et.*

1.25. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz esetén*
1. *az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

1.26. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $X \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

1.27. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = \mathbb{K}^n \setminus \overline{\mathbb{K}^n \setminus X},$$
$$\overline{X} = \mathbb{K}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{K}^n \setminus X).$$

1.28. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Azt mondjuk, hogy az X halmaz
- *sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = \mathbb{K}^n$.

1.3. Sorozatok

1.29. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{K}^n$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

1.30. Tétel. *A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

1.31. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

1.32. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^n$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

1.33. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

1.34. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

1.35. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *és* $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$.

1. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan* $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ *sorozat, melyre* $\lim a = x$.
2. *Az* A *halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens* $a : \mathbb{N} \to A$ *sorozatra* $\lim a \in A$.

1.36. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *és* $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *konvergens sorozat.*

1. *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. *A* ca *sorozat konvergens és* $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. *Az* $\|a\|$ *sorozat konvergens és* $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

1.37. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[\cup \{\infty\}$, *és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *sorozat. Az* a *sorozat pontosan akkor konvergens a* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_p)$ *térben, ha minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *esetén az* $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ *sorozat konvergens és ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ *indexre*

$$\mathrm{pr}_i (\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$$

teljesül.

1.4. Cauchy-sorozatok

1.38. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \ \big((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon\big).$$

1.39. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

1.40. Tétel. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

1.41. Tétel. *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

1.42. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *teljes*, ha minden $a : \mathbb{N} \to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az A halmazban van. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér *teljes*, ha $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ teljes halmaz.

1.43. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér teljes, továbbá minden* $A \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ *zárt halmaz teljes.*

1.44. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

1.45. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér Banach-tér.*

1.5. Kompakt halmazok

1.46. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ normált tér.

- Az $X \subseteq \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i nyílt részhalmaza az $\mathbb{K}^\mathfrak{n}$ térnek.

1.47. Tétel. *A* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

1.48. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz.*

1. *Ekkor* X *korlátos és zárt.*
2. *Az* $Y \subseteq X$ *halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

1.49. Tétel. *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $(K_i)_{i\in I}$ *a* $\mathbb{K}^n$ *kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden* $i, j \in I$ *esetén létezik olyan* $k \in I$ *index, hogy* $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ *teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset.$$

1.6. Heine–Borel-tétel

1.50. Tétel. *Minden* $R \in \mathbb{R}^+$ *esetén a* $[-R, R]^n$ *halmaz kompakt az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált térben.*

1.51. Tétel. *(Heine–Borel-tétel végtelen normára.) Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

1.7. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

1.52. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel euklidészi terekben végtelen normára.) Legyen* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *normált térben az* A *halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden* A *halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az* A *halmaznak.*

1.8. Függvények határértéke

1.53. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{K}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big).$$

1.54. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *függvény, az* $a \in \mathbb{K}^n$ *pont az* f *függvény értelmezési tartományának torlódási pontja és legyen* $A, B \in \mathbb{K}^m$ *az* f *függvény határértéke az* a *pontban. Ekkor* $A = B$*.*

1.55. Definíció. (*A* lim *művelet.*) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény és az $a \in \mathbb{K}^n$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ jelöli.

1.56. Tétel. *(Átviteli elv határértékre.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ *függvény és a* $z \in \mathbb{K}^n$ *pont a* $\operatorname{Dom} f$ *halmaz torlódási pontja. A* $\lim\limits_z f$ *határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan* $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f \setminus \{z\}$ *sorozatra, mely a* z *ponthoz konvergál, létezik a* $\lim f \circ a$ *határérték.*

1.57. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$*,* $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $a \in \mathbb{K}^n$ *torlódási pontja a* $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$ *halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik* $\lim\limits_a f$*,* $\lim\limits_a g$ *és* $\lim\limits_a \varphi$*. Akkor az* a *pont torlódási pontja a* $\operatorname{Dom}(f+g)$*, a* $\operatorname{Dom}(\lambda f)$*, a* $\operatorname{Dom}(\varphi f)$ *és a* $\operatorname{Dom}(\|f\|)$ *halmaznak, valamint*

1. $\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g$;
2. $\lim_a (\lambda f) = \lambda (\lim_a f)$;
3. $\lim_a (\varphi f) = (\lim_a \varphi)(\lim_a f)$;
4. $\lim_a \|f\| = \left\|\lim_a f\right\|$.

1.9. Függvények folytonossága

1.58. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvény folytonos az* a *pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

1.59. Tétel. *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ és $z \in \operatorname{Dom} f$. A f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozatra, mely a z ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

1.60. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, és az $a \in \operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.*

1.61. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $f, g : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$, $\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi$. Tegyük fel, f, g és φ folytonos az a pontban. Ekkor az a pontban*

1. $f + g$;
2. λf;
3. φf;
4. $\|f\|$

folytonos.

1.62. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, $\lambda \in \mathbb{K}$, valamint $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ és $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor $f + g$, λf, φf és $\|f\|$ is folytonos.*

1.63. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1.64. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az f függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq \mathbb{K}^m$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

1.65. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

1.66. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

1.67. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér és* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *bijekció. Az* f *függvény pontosan akkor nyílt, ha* f^{-1} *folytonos.*

1.68. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér $U \subseteq \mathbb{K}^n$ és $V \subseteq \mathbb{K}^m$. Az $f : U \to V$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy az U *és* U *részhalmazok homeomorfak*, ha létezik $f : U \to V$ homeomorfizmus.

1.10. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

1.69. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor az* $f(K)$ *halmaz is kompakt.*

1.70. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor létezik* $x, y \in K$*, melyekre* $f(x) = \inf f(K)$ *és* $f(y) = \sup f(K)$ *teljesül.*

1.71. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos injektív függvény. Ekkor az* f^{-1} *függvény is folytonos.*

1.72. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz,* $V \subseteq \mathbb{K}^m$ *és* $f : K \to V$ *folytonos bijekció. Ekkor* f *homeomorfizmus.*

1.11. Egyenletesen folytonos függvények

1.73. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *egyenletesen folytonos az* A *halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d(x,y) < \delta \;\to\; d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1.74. Tétel. *Normált terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

1.75. Tétel. *(Heine-tétel.) Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér,* $K \subseteq \mathbb{K}^n$ *kompakt halmaz és* $f : K \to \mathbb{K}^m$ *folytonos függvény. Ekkor* f *egyenletesen folytonos.*

1.12. Normák ekvivalenciája

1.76. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* $\mathbb{K}^n$ *vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $\|\cdot\|$ *norma szerinti* $X \subseteq \mathbb{K}^n$ *nyílt halmaz nyílt a* $\|\cdot\|'$ *norma szerint is.*
2. *Minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *és* $r \in \mathbb{R}^+$ *paraméterekhez létezik olyan* $R \in \mathbb{R}^+$*, melyre* $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$*.*
3. *Létezik olyan* $K \in \mathbb{R}^+$ *szám, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *vektorra* $\|x\| \leq K \|x\|'$*.*

1.77. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ *normák ekvivalensek egymással*, ha ugyanazok a nyílt halmazok a térben, azaz, ha minden $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint és minden $\|\cdot\|'$ szerint nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint is.

1.78. Tétel. *Legyen* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *norma a* $\mathbb{K}^n$ *vektortéren. A* $\|\cdot\|'$ *és* $\|\cdot\|$ *normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan* $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ *paraméterek, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *vektorra* $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ *és* $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ *teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *paraméterek, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^n$ *vektorra* $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$*.*

1.79. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $p \in [1, \infty[$ *esetén a* $\|\cdot\|_p$ *és a* $\|\cdot\|_\infty$ *normák ekvivalensek a* $\mathbb{K}^n$ *téren.*

1.80. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén a* $\mathbb{K}^n$ *vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

1.13. Normák ekvivalenciájának következményei

1.81. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ halmaz nyíltsága, zártsága, korlátossága és kompaktsága független attól, hogy a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tér milyen normával van ellátva.*

1.82. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat és $A \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Az a sorozat határértéke pontosan akkor A, ha minden olyan $\Omega \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmazra, melyre $A \in \Omega$ teljesül létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $N < n$ esetén $a_n \in \Omega$ teljesül.*

1.83. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozat konvergenciája és határértéke független a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ téren választott normától.*

1.84. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ olyan pont, mely torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Az f függvény a pontbeli határértéke független az $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tereken választott normától.*

1.85. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$.*

1. *Az f függvény a pontbeli folytonossága független az $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tereken választott normától.*
2. *Az f függvény folytonossága független az $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tereken választott normától.*

1.86. Tétel. *(Heine–Borel-tétel.) Az $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

1.87. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-tétel véges dimenziós normált terekben.) Legyen a $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. Az A halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden A halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az A halmaznak.*

1.88. Tétel. *Az $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér Banach-tér, továbbá minden zárt részhalmaza teljes.*

1.89. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $L \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ lineáris altér, akkor L teljes.*

1.90. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$, akkor a*

$$\operatorname{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény folytonos.

1.91. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak. Pontosan akkor létezik a $\lim\limits_a f$ határérték, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén létezik a $\lim\limits_a f_i$ határérték és ekkor minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre*

$$\left(\lim_a f\right)_i = \lim_a f_i$$

teljesül.

1.92. Tétel. *Ha $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, $f : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén az f_i függvény folytonos az a pontban.*

1.14. Sorok

1.93. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ tetszőleges sorozat.

– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az a *sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum\limits_n a_n$ szimbólummal jelöljük.

– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$ jelölést használjuk.
– Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

1.94. Tétel. *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *olyan sorozat, melyre a* $\sum a$ *sor konvergens. Ekkor* $\lim a = 0$ *teljesül.*

1.95. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *sorozat. Ha a* $\sum a$ *sor abszolút konvergens, akkor a* $\sum a$ *sor konvergens és*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \,.$$

1.96. Tétel. *Legyen* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *olyan sorozat, melyből képzett sor konvergens. Ekkor minden* $\lambda \in \mathbb{K}$ *esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

teljesül.

1.15. Lineáris leképezések

1.97. Definíció. A

$$A : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto A(x)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ számra

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

teljesül. A $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelölést használjuk.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K})$ teret a $\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektortér duálisának* nevezzük, jele $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^*$.
A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ halmazra a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})$ jelölést fogjuk használni.

1.98. Tétel. *Ha* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$*, akkor a*

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K} \qquad (x_1, \ldots, x_{\mathfrak{n}}) \mapsto x_i$$

függvény lineáris.

1.99. Tétel. *Legyen* $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ *és minden* $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$*,* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *esetén legyen* $A_{ji} = (Ae_i)_j$*. Ekkor minden* $x \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ *vektorra és* $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ *indexre*

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} A_{ji} x_i$$

teljesül.

1.100. Definíció. Adott $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ leképezés esetén az $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,\mathfrak{m}\}\\ j\in\{1,\ldots,\mathfrak{n}\}}}$ rendszert nevezzük az *A lineáris leképezés mátrixának*, ahol minden $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ indexre $A_{ij} = A(e_j)_i$. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az A leképezés mátrixának az elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \ldots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}$$

módon szokás felírni.

1.101. Tétel. *(Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenzióban.) Minden $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

teljesül.

1.102. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : \mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{m}$ lineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*
$$X = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n} \;\middle|\; \|x\| \leq 1\right\}$$
jelölés mellett $\sup\limits_{x\in X} \|Ax\|' < \infty$ teljesül;
2. *minden $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ vektorra*
$$\|Ax\|' \leq \|x\| \cdot \sup_{x\in X} \|Ax\|' ;$$
3. *A folytonos.*

1.103. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér. A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$

leképezés norma.

1.104. Definíció. A $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált terek esetén a

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m}) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|'$$

leképezést *operátornormának* nevezzük.

1.105. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^\mathfrak{m}, \|\cdot\|')$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ és $x \in \mathbb{K}^\mathfrak{n}$. Ekkor*

$$\|Ax\|' \leq \|A\| \cdot \|x\| .$$

1.106. Tétel. *Legyen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_i}, \|\cdot\|_{(i)})$ normált tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_1}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}_2}, \mathbb{K}^{\mathfrak{n}_3})$. Ekkor*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

1.107. Tétel. *A $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}, \mathbb{K}^\mathfrak{m})$ tér Banach-tér.*

1.108. Tétel. *(Carl Neumann-féle sor.) Ha az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n})$ leképezésre $\|A\| < 1$ teljesül, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol id *jelöli a $\mathbb{K}^\mathfrak{n} \to \mathbb{K}^\mathfrak{n}$ identitásfüggvényt.*

1.109. Tétel. *Legyen*

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{a \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\mathfrak{n}) \middle|\; \exists a^{-1}\right\} .$$

(Vagyis $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ jelöli az invertálható lineáris leképezések halmazát.) Ekkor

1. *minden $a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$;*
2. *a $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

1.16. Multilineáris leképezések

1.110. Definíció. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$A : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}} \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto A(x_1, \ldots, x_k)$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *k-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $(x_i)_{i=1,\ldots,k}, (y_i)_{i=1,\ldots,k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorrendszere, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + \mu A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

teljesül.

A k-lineáris $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^k\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ vagy a $\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$ jelölést használjuk.

1.111. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, valamint $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right)$. Minden $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ esetén legyen $A_{ji_1 \ldots i_k} = A(e_{i_1} \ldots e_{i_k})_j$. Ekkor minden $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektor és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$A(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})_j = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} A_{ji_1, \ldots, i_k} x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(k)}_{i_k} \tag{1.1}$$

teljesül.

1.112. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér és $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ multilineáris leképezés. Ekkor*

1. *a*

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left\{ x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} \;\middle|\; \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

jelölés mellett $\sup_{x \in X} \|A(x)\|' < \infty$ teljesül;

2. *minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*

$$\|A(x_1, \ldots, x_k)\|' \leq \|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_k\| \cdot \sup_{x \in X} \|A(x)\|';$$

3. *A folytonos.*

1.113. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér. Ekkor a*

$$\|\cdot\| : \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup\left\{ \|Ax\|' \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{k} \{x_i \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}} | \; \|x_i\| \leq 1\} \right\}$$

leképezés norma.

1.114. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}}, \|\cdot\|)$ és $(\mathbb{K}^{\mathfrak{m}}, \|\cdot\|')$ normált tér, akkor $\left(\mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}\right), \|\cdot\|\right)$ Banach-tér.*

1.115. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy az $A : (\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ függvény *szimmetrikus leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ permutációra és minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ elemre

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

teljesül. A $(\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}_{\mathrm{s}}^k((\mathbb{K}^{\mathfrak{n}})^k, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli a továbbiakban.

1.116. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *és* $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|')$ *normált tér. A*

$$\rho : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right) \to \mathrm{Lin}^{k+1}\left((\mathbb{K}^n)^{k+1}, \mathbb{K}^m\right)$$
$$A \mapsto \left((x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (A(x_1))(x_2, \ldots, x_{k+1})\right)$$

leképezés izometrikus bijekció, azaz ρ *bijekció és minden* $A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{K}^n, \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{K}^m\right)\right)$ *elemre*

$$\|\rho(A)\| = \|A\|$$

teljesül.

1.117. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$.

- Az A *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az A *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az A *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az A *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in \mathbb{K}^n$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

1.118. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$ *és* $A \in \mathrm{Lin}^k\left((\mathbb{K}^n)^k, \mathbb{R}\right)$*. Ha A leképezés pozitív definit, akkor létezik olyan* $K \in \mathbb{R}^+$*, hogy minden* $v \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $A(v^{[k]}) \geq K\|v\|^k$*; illetve ha A negatív definit, akkor létezik olyan* $K' \in \mathbb{R}^+$*, hogy minden* $v \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $A(v^{[k]}) \leq -K'\|v\|^k$*.*

1.17. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

1.119. Definíció. Egy $f : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$ függvény *kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0,1[\, \forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : \quad \left(d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)\right).$$

A C számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

1.120. Tétel. *Minden kontrakció folytonos.*

1.121. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel euklidészi terekben.) Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ *egy teljes részhalmaz és* $f : \Omega \to \Omega$ *kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan* $y \in \Omega$ *pont melyre* $f(y) = y$ *teljesül.*

1.18. Konvex halmazok szétválasztása

1.122. Definíció. Legyen $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Ekkor az *A halmaztól való távolság függvénye*

$$\mathrm{dist}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z, x).$$

1.123. Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $A \subseteq \mathbb{K}^n$ *nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden* $x, y \in \mathbb{K}^n$ *esetén*
$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \leq d(x, y)$$
teljesül;
2. *a* dist_A *függvény egyenletesen folytonos és folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$.

1.124. Definíció. Az $A, B \subseteq \mathbb{K}^n$ *halmazok távolsága* a $\|\cdot\|$ norma szerint

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

1.125. Definíció. A $K \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz *konvex*, ha minden $x, y \in K$ pontra és $t \in [0,1]$ paraméterre $(1-t)x + ty \in K$ teljesül.

1.126. Tétel. *(Zárt konvex és kompakt konvex halmazok szétválasztása.) Tegyük fel, hogy $K, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan diszjunkt konvex halmazok, hogy K kompakt és Z zárt.*

1. *Létezik olyan $a \in K$ és $b \in Z$, melyre $d(a,b) = \operatorname{dist}(K,Z)$ teljesül.*
2. *Létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in K$ esetén $\langle z, x \rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x \rangle < c$.*

1.127. Tétel. *(Zárt konvex halmaz és pont szétválasztása.) Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $p \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\langle z, p \rangle > c$ és minden $x \in Z$ esetén $\langle z, x \rangle < c$.*

1.128. Tétel. *Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és*

$$H = \{(z,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \forall x \in Z:\ \langle z, x \rangle < c\}.$$

Ekkor

$$Z = \bigcap_{(z,c) \in H} \{y \in \mathbb{R}^n |\ \langle z, y \rangle < c\}$$

teljesül.

1.19. Az algebra alaptétele

1.129. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{C}:\ r < |x| \ \to\ C < |f(x)|$$
$$\forall x \in \mathbb{C}:\ f(x) \neq 0 \ \to\ \exists y \in \mathbb{C}:\ |f(y)| < |f(x)|$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{C}$, melyre $f(a) = 0$.

1.130. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

1.131. Tétel. *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

1.132. Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

2. Függvénysorozatok, függvénysorok véges dimenzióban

2.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

2.1. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^n$ nem üres halmaz, $A \subseteq M$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^m)$.
Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \lim_{n \to \infty} f_n(t) \right\} \to \mathbb{K}^m \qquad t \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(t)\,.$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim_{n \to \infty} f_n$ jelölést használjuk.
Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\lim_{n \to \infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha létezik olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;

– *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon konvergál az f függvényhez;
– *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
– *egyenletesen konvergál f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \ \big(N < n \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon\big)$$

teljesül;
– *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
– *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész M halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
– *egyenletesen konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
– *lokálisan egyenletesen konvergens* ha minden $t \in \operatorname{Dom} f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

2.2. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.
– Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozathoz rendelt függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}}) \qquad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^{k} f_j(t)\right)$$

képlettel definiáljuk.
– A $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összegfüggvénye*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left\{t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} f_n \mid \exists \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\right\} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \qquad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \ .$$

– Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor az *A halmazon pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a M halmazon pontonként abszolút konvergens.

2.3. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ nem üres halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in M : \ (N < n, m \ \rightarrow \ \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon)$$

teljesül.

2.4. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

2.5. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és a $\sum\limits_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$.*

2.6. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathrm{m}})$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény, $\operatorname{Dom} f = M$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.*

2.2. A korlátos folytonos függvények tere

2.7. Definíció. Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ nem üres halmaz és $f : M \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény korlátos*, ha $\operatorname{Ran} f \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ korlátos halmaz. Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, akkor az $M \to \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}$ folytonos korlátos függvények halmazát $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ jelöli.

2.8. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$. A*

$$\|\cdot\|_{\sup} : C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ vektortéren, azaz

1. $\forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) : \ \|f\|_{\sup} = 0 \ \leftrightarrow \ f = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) : \ \|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$;
3. $\forall f, g \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}) : \ \|f + g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.

2.9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha konvergens a $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ normált térben, azaz, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ \Big(N < n \ \to \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon\Big)$$

teljesül.

2.10. Tétel. *Ha $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$, akkor $(C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}), \|\cdot\|_{\sup})$ Banach-tér, azaz minden olyan $C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz, melyre*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : \ (N < n, m \ \to \ \|f_n - f_m\|_{\sup} < \varepsilon),$$

teljesül, létezik olyan $f \in C^{\mathrm{b}}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$, melyre

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \ (N < n \ \to \ \|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon).$$

2.11. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.*

2.12. Tétel. *(Weierstrass-tétel.) Legyen $M \subseteq \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}^{\mathfrak{m}})$ halmazban haladó függvénysorozat. Ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in M} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor a $\sum_n f_n$ függvénysor konvergens és egyenletesen is konvergens.

2.3. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása

2.13. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén a

$$\{tx + (1 - t)y | \ t \in [0, 1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $\mathfrak{n} > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $\mathfrak{n} = 1$ esetben, pedig $\lfloor a, b \rfloor$.

2.14. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték és az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*

2. *az* $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *függvényhez egyenletesen konvergál az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat;*
3. *minden* $x \in B_r(a)$ *esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2.15. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum, valamint minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény. Ha az* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az* Ω *halmazon és létezik olyan* $a \in \Omega$ *pont, melyre létezik a* $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ *határérték, akkor*

1. *minden* $x \in \Omega$ *esetén létezik a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *határérték;*
2. *az* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2.16. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény. Ha a* $\sum_n f_n'$ *függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az* Ω *halmazon és létezik olyan* $a \in \Omega$ *pont, melyre konvergens a* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ *sor, akkor*

1. *minden* $x \in \Omega$ *esetén konvergens a* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *sor;*
2. *az* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a* $\sum_n f_n$ *függvénysor;*
3. *minden* $x \in \Omega$ *esetén*
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

2.17. Tétel. *(Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$
teljesül.

2.18. Tétel. *(Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $C([a,b],\mathbb{R})$ *halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a* $\sum_n f_n$ *függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$
teljesül.

2.4. Hatványsorok

2.19. Definíció. (*Hatványsorok.*)

– Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha} \quad 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha} \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

2.20. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.*

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.

2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.

3. Ha $r \in [0, R_a[$, akkor a $B_r(0)$ halmazon a P_a hatványsorra

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty$$

teljesül.

4. A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.

5. A P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.

2.21. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz*

$$P_a'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

2.22. Tétel. *(Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_k x^k \,\mathrm{d}\, x.$$

2.5. Abel-tétel

2.23. Tétel. *Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_n a_n$ sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = 0.$$

2.24. Tétel. *(Abel-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ teljesül. Ha a P_a hatványsor konvergens az $x_0 \in \{R_a, -R_a\}$ pontban, akkor egyenletesen konvergens a $\lfloor 0, x_0 \rfloor$ szakaszon és a $P_a|_{\lfloor 0, x_0 \rfloor}$ függvény folytonos.*

2.6. Approximáció polinomokkal

2.25. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *f függvény n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

2.26. Tétel. *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]}\left|B_n^f(t) - f(t)\right|\right) = 0.$$

2.27. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban

3.1. Differenciálhatóság

3.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

teljesül. Ekkor $u = v$.

3.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, melyre

  $$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

  teljesül. Ezt az A leképezést az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

  $$\mathrm{D}f = \left\{(a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0\right\}$$

  függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^m$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ jelöli.

3.3. Tétel. *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés pontosan akkor az f függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n : \Big(\|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\|\Big)$$

teljesül.

3.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága és $(\mathrm{D}f)(a)$ értéke független az $\mathbb{R}^\mathfrak{n}$ és $\mathbb{R}^\mathfrak{m}$ tereken választott normától.*

3.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0$$

teljesül. Továbbá ekkor

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a).$$

3.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.*

3.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén az $f_i : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Továbbá ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ index esetén*

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(a)$$

teljesül, amit a mátrixok nyelvén úgy is kifejezhetünk, hogy ha minden $i \in \{1,\dots,\mathfrak{m}\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f_i)(a) = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{i\mathfrak{n}} \end{pmatrix},$$

akkor

$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\mathfrak{n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\mathfrak{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathfrak{m}1} & A_{\mathfrak{m}2} & \dots & A_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \end{pmatrix}.$$

3.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

3.8. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}^\mathfrak{m}$, $\varphi : \mathbb{R}^\mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá a tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom}\varphi)$ halmaznak és legyen f, g és φ differenciálható az a pontban. Ekkor*

1. *$f+g$ differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *φf differenciálható az a pontban és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a)\cdot(\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$.*

3.9. Tétel. *Minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathfrak{n}$ nyílt halmaz esetén $C^1(\Omega, \mathbb{R}^\mathfrak{m})$ vektortér.*

3.10. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $g : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2}$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_2} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_3}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és*

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a).$$

3.3. Iránymenti derivált

3.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{m}}$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$. Azt mondjuk, hogy az f *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az f *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

3.12. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{m}}$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az f függvény e iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D} f)(a))(e)$ teljesül.*

3.4. Néhány speciális függvény deriváltja

3.13. Tétel. *Az $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \mathbb{R}^{\mathsf{m}})$ lineáris leképezés minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D} A : U \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \mathbb{R}^{\mathsf{m}}) \qquad a \mapsto A$$

teljesül.

3.14. Tétel. *Ha $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i}$, és $j \in \{1, \ldots, k\}$, akkor az*

$$\mathrm{in}_{u,j} : \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i} \qquad x \mapsto (u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_k)$$

inklúzió függvény deriváltjára minden $a \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j}$ pontban

$$(\mathrm{D}\, \mathrm{in}_{u,j})(a) = \mathrm{in}_{0,j}$$

teljesül, azaz

$$(\mathrm{D}\, \mathrm{in}_{u,j})(a) : \mathbb{R}^{\mathsf{n}_j} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathsf{n}_i} \qquad x \mapsto (0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{j.\ hely}, 0, \ldots, 0).$$

3.15. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, $f(a) = a^k$. Ekkor minden $a \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ esetén*

$$(\mathrm{D} f)(a) : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \qquad b \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a^i b a^{k-1-i}$$

teljesül.

3.16. Tétel. *Ha*

$$\mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R}) = \left\{ a \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \middle|\ \exists a^{-1} \right\},$$

akkor az invertálás $i : \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R})$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére minden $a \in \mathrm{GL}_{\mathsf{n}}(\mathbb{R})$ pontban

$$(\mathrm{D} i)(a) : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \qquad b \mapsto -a^{-1} b a^{-1}$$

teljesül.

3.5. Vektor-vektor függvény deriváltja

3.17. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \operatorname{Dom} f$, valamint $i \in \{1, \ldots, k\}$ tetszőleges index.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény parciálisan deriválható a i-edik változója szerint az a pontban*, ha az
$$f \circ \mathrm{in}_{a,i} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \qquad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$
függvény differenciálható az a_i pontban és ekkor a
$$(\partial_i f)(a) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i)$$
jelölést használjuk.
- Az f függvény *i-edik változó szerinti deriváltfüggvényének* nevezzük a
$$\partial_i f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Dom} f) \times \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \circ \mathrm{in}_{a,i} \text{ differenciálható az } a_i \text{ pontban} \\ \text{és } A = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{a,i}))(a_i) \end{array} \right\}$$
függvényt.
- Az f *függvény parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha $\operatorname{Dom} \partial_i f = \operatorname{Dom} f$.
- Az f *függvény parciálisan folytonosan differenciálható az i-edik változója szerint*, ha parciálisan differenciálható az i-edik változója szerint és $\partial_i f$ folytonos.

3.18. Tétel. *Ha az $f : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_i}$ vektorra*
$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{k} ((\partial_i f)(a))(x_i)$$
teljesül.

3.19. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor minden $x \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ vektorra*
$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_i f)(a)) x_i$$
teljesül, vagyis a mátrixok nyelvén
$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a) & (\partial_2 f)(a) & \ldots & (\partial_{\mathfrak{n}} f)(a) \end{pmatrix}.$$

3.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixa*
$$(\mathrm{D}f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}.$$

3.21. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ pontban. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ lineáris leképezés mátrixát az f *függvény a pontbeli Jacobi-mátrixának* nevezzük. Az Jacobi-mátrix alakja
$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_2)(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 f_{\mathfrak{m}})(a) & (\partial_2 f_{\mathfrak{m}})(a) & \cdots & (\partial_{\mathfrak{n}} f_{\mathfrak{m}})(a) \end{pmatrix}$$
Az $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ esetben ezen mátrix determinánsát nevezzük *Jacobi-determinánsnak.*

3.22. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ *és legyen* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *tetszőleges index. Ekkor az* f *függvénynek pontosan akkor létezik a* k*-adik változó szerinti parciális deriváltja az* a *pontban, ha létezik az* e_k *iránymenti deriváltja az* a *pontban és ebben az esetben* $(\partial_k f)(a) = (\mathrm{D}_{e_k} f)(a)$ *teljesül.*

3.6. Gradiens, divergencia és rotáció

3.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $((\partial_1 f)(a), \ldots, (\partial_n f)(a)) \in \mathbb{R}^n$ vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény gradiensének* nevezzük a

$$\operatorname{grad} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R}^n \qquad a \mapsto ((\partial_1 f)(a), \ldots, (\partial_n f)(a))$$

  függvényt.

Bevezetjük a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{grad} f$ jelölést, ahol a ∇ szimbólumot *nabla-operátornak* nevezzük.

3.24. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, mely differenciálható az* $a \in \mathbb{R}^n$ *pontban. Ekkor minden* $x \in \mathbb{R}^n$ *vektor esetén*

$$((\mathrm{D}f)(a))(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), x \rangle$$

teljesül.

3.25. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tetszőleges függvény és legyen* $a, e \in \mathbb{R}^n$*. Ha az* f *függvény differenciálható az* a *pontban, akkor létezik az* f *függvény* a *pontbeli* e *iránymenti deriváltja és*

$$(\mathrm{D}_e f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), e \rangle .$$

3.26. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény.

- Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $\operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$ számot az *f függvény a pontbeli divergenciájának* nevezzük és a $(\operatorname{div} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az *f függvény divergenciájának* nevezzük a

$$\operatorname{div} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \operatorname{Tr}((\mathrm{D}f)(a))$$

  függvényt.

A divergenciára használjuk még a $\nabla f \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{div} f$ jelölést.

3.27. Tétel. *Ha* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *differenciálható az* $a \in \mathbb{R}^n$ *pontban, akkor*

$$(\operatorname{div} f)(a) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_i)(a).$$

3.28. Definíció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényhez bevezetjük a

$$\Delta f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)) \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto (\operatorname{div}\operatorname{grad} f)(a)$$

jelölést és a Δ szimbólumot *Laplace-operátornak* nevezzük. Tehát formálisan $\Delta = \nabla^2$.

3.29. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tetszőleges függvény. Ekkor minden* $a \in \operatorname{Dom}(\Delta f)$ *elemre*

$$(\Delta f)(a) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k^2 f)(a)$$

teljesül.

3.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges függvény.

– Ha az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^3$ pontban, akkor a

$$((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a)) \in \mathbb{R}^3$$

vektort az f *függvény a pontbeli rotációjának* nevezzük és a $(\operatorname{rot} f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az f *függvény rotációjának* nevezzük a

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} f : \operatorname{Dom}(\mathrm{D} f) &\to \mathbb{R}^3 \\ a &\mapsto ((\partial_2 f_3)(a) - (\partial_3 f_2)(a), (\partial_3 f_1)(a) - (\partial_1 f_3)(a), (\partial_1 f_2)(a) - (\partial_2 f_1)(a))\end{aligned}$$

függvényt.

A rotációra használjuk még a $\nabla \times f \triangleq \operatorname{rot} f$ jelölést.

3.7. Folytonosan differenciálható függvények

3.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon. Ekkor létezik olyan $c \in \,]a, b[$, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \le \|(\mathrm{D} f)(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

ahol

$$\|(\mathrm{D} f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|((\mathrm{D} f)(c))x\|_2 .$$

3.32. Tétel. *(Véges növekmények formulája.) Ha $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \le \left(\sup_{c \in]a,b[} \|(\mathrm{D} f)(c)\| \right) \cdot \|b - a\|_2 ,$$

ahol

$$\|(\mathrm{D} f)(c)\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|((\mathrm{D} f)(c))x\|_2 .$$

3.33. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ konvex nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{D} f = 0$ teljesül. Ekkor f állandó.*

3.34. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} \partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

3.35. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ és $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az Ω halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ és $j \in \{1, \ldots, \mathfrak{m}\}$ index esetén a $\partial_i f_j$ függvény folytonos az Ω halmazon.*

3.8. Függvénysorozat és függvénysor differenciálhatósága

3.36. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_n f_n(a)$ határérték és az $(\mathrm{D} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor*

1. *minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat;*
3. *minden $x \in B_r(a)$ esetén*

$$(\mathrm{D} f)(x) = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{D} f_n)(x).$$

3.37. Tétel. *(Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ határérték, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték;*
2. *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergenál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

3.38. Tétel. *(Függvénysor differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Ha a $\sum\limits_n (\mathrm{D}f_n)$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $x_0 \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ összeg, akkor*

1. *minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ összeg;*
2. *az $\sum\limits_n (f_n)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergál az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez;*
3. *minden $x \in \Omega$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_n)(x)$.*

3.9. Inverzfüggvény tétel

3.39. Tétel. *(Inverzfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény és $a \in \mathbb{R}^n$. Ha $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az a pontban és $\det(\mathrm{D}f)(a) \neq 0$, akkor létezik olyan $\Omega \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt környezete az a pontnak, melyre*

1. *$f|_\Omega$ injektív;*
2. *$f(\Omega)$ nyílt halmaz;*
3. *$f|_\Omega$ homeomorfizmus Ω és $f(\Omega)$ között;*
4. *az $(f|_\Omega)^{-1}$ függvény differenciálható;*
5. *minden $x \in \Omega$ pontra*
$$(\mathrm{D}((f|_\Omega)^{-1}))(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$$
teljesül;
6. *a $\mathrm{D}(f|_\Omega)^{-1}$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban.*

3.10. Implicitfüggvény tétel

3.40. Tétel. *(Implicitfüggvény tétel.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tetszőleges függvény. Ha $(a_1, a_2) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$, $\mathrm{D}f$ folytonos az (a_1, a_2) pontban és $\det(\partial_2 f)(a_1, a_2) \neq 0$, akkor létezik olyan Ω_1, Ω_2 nyílt környezete az a_1, a_2 pontnak, melyre*

1. *$\Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \operatorname{Dom}(Df)$;*
2. *létezik egyetlen olyan $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ differenciálható függvény, melyre $\varphi(a_1) = a_2$, minden $x \in \Omega_1$ esetén*
$$f(x, \varphi(x)) = f(a_1, a_2) \quad \text{és} \quad (D\varphi)(x) = -\left((\partial_2 f)(x, \varphi(x))\right)^{-1} (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$$
teljesül, valamint $\mathrm{D}\varphi$ folytonos az a_1 pontban.

3.11. Többszörös deriváltak

3.41. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ függvény és $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

– Az *f függvény k-szor differenciálható az a pontban* ha $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f)$.
– Az $a \in \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f)$ esetben $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f))(a) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}))$, ennek a kompozícióját a

$$\rho_{k-1} : \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}, \operatorname{Lin}^{k-1}((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{k-1}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})) \to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$$
$$A \mapsto \Big((x_1, \dots, x_n) \mapsto (A(x_1))(x_2, \dots, x_n)\Big)$$

izometrikus bijekcióval jelölje $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$. Az f függvény *k-adik deriváltjának* nevezzük a

$$\mathrm{D}^{(k)}f : \operatorname{Dom} \mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f) \to \operatorname{Lin}^{k}((\mathbb{R}^{\mathfrak{n}})^{k}, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}) \qquad a \mapsto \rho_{k-1} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{(k-1)}f))(a)$$

függvényt.
– Az *f függvény k-szor differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}^{(k)}f$.
– Az *f függvény k-szor folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}^{(k)}f$ folytonos függvény. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ értékű, k-szor folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^k(A, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ jelöli.
– Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható. Az $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ értékű, végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R}^{\mathfrak{m}})$ jelöli.

3.42. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-szor differenciálható függvény. Ekkor minden $a \in \Omega$ és $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ esetén*

$$((\mathrm{D}^{(k)}f)(a))(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(a)) \cdot x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \dots x^{(k)}_{i_k}.$$

3.43. Tétel. *(Schwarz-tétel vagy Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_i \partial_j f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor minden $i, j \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ indexre $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ teljesül az Ω halmazon.*

3.44. Tétel. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ nyílt halmaz, $k \in \mathbb{N}^+$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \mathfrak{n}\}$ index esetén a $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Ekkor f k-szor folytonosan differenciálható és minden $a \in \Omega$ pontban $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ szimmetrikus k-lineáris leképezés.*

3.12. Taylor-sorfejtés

3.45. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^{(k)}f)$. Az *$f$ függvény a pontbeli k-ad fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{k,a} : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad (x) \mapsto T^f_{k,a}(x) \triangleq \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} ((\mathrm{D}^{(l)}f)(a))(x-a)^{[l]}$$

polinomot, amit az

$$T^f_{k,a}(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l = 1}^{\mathfrak{n}} ((\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f)(a)) \, (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \dots \cdot (x_{i_l} - a_{i_l}).$$

alakban is felírhatunk. Ha f végetelenszer differenciálható az $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban, akkor az *f függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a : \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \to \mathbb{R} \qquad T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((\mathrm{D}^{(k)}f)(a))(x-a)^{[k]}$$

hatványsort.

3.46. Tétel. *(Taylor-formula skalárértékű függvényekre.)* *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k + 1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}((\mathrm{D}^{(i)} f)(a))(b - a)^{[i]} + \frac{1}{(k + 1)!}(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(\xi)(b - a)^{[k+1]}.$$

3.47. Tétel. *(Taylor-formula.)* *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(k + 1)$-szer differenciálható az $]a, b[$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$\left|f(b) - T^f_{k,a}(b)\right| \le \left(\sup_{x\in]a,b[} \left\|(\mathrm{D}^{(k+1)} f)(x)\right\|\right) \cdot \frac{\|b - a\|^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

3.48. Tétel. *(Infinitezimális Taylor-formula skalárértékű függvényekre.)* *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Ekkor*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^f_{k,a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0.$$

3.13. Lokális szélsőérték jellemzése

3.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \ge f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \le f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \ne x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális minimuma vagy szigorú lokális maximuma van az a pontban.

3.50. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(a) = 0$.*

3.51. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 < k \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^n$, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy az f függvény k-szor differenciálható a $B_r(a)$ halmazon és $\mathrm{D}^{(k)} f$ folytonos az a pontban. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i < k$ esetén $(\mathrm{D}^{(i)} f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a) \ne 0$.*

1. *Ha az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív.*
2. *Ha az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, akkor k páros és a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív.*
3. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés pozitív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban.*
4. *Ha a $(\mathrm{D}^{(k)} f)(a)$ multilineáris leképezés negatív definit, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban.*

5. *Ha a* $(\mathrm{D}^{(k)}f)(a)$ *multilineáris leképezés indefinit, akkor az* f *függvénynek nincs lokális szélsőértéke az* a *pontban.*
6. *Ha* k *páratlan, akkor az* f *függvénynek nincs lokális szélsőértéke az* a *pontban.*

3.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$. Ha az f függvény kétszer differenciálható az a pontban, $(\mathrm{D}f)(a) = 0$ és $(\mathrm{D}^{(2)}f)(a)$ indefinit leképezés, akkor azt mondjuk, hogy a *nyeregpontja az* f *függvénynek.*

3.14. Feltételes szélsőérték

3.53. Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény, valamint minden* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *esetén legyen* $g_i : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük a* $H = \bigcap_{i=1}^{k} \overset{-1}{g_i}(0)$ *halmazt. Tegyük fel, hogy az* $a \in H \cap \operatorname{Dom} f$ *olyan pont, hogy a* $((\mathrm{D}g_i)(a))_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ *rendszer lineárisan független. Ekkor, ha az* $f|_H$ *függvénynek lokális szélsőértéke van az* a *pontban, akkor egyértelműen léteznek olyan* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *paraméterek, melyekre*

$$(\mathrm{D}f)(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i((\mathrm{D}g_i)(a))$$

teljesül.

3.15. Konvexitás differenciális jellemzése

3.54. Definíció. Legyen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq \mathbb{K}^n$ konvex halmaz.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in [0, 1]$ esetén
$$f(tx + (1 - t)y) \le tf(x) + (1 - t)f(y)$$
teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *f függvény szigorúan konvex az A halmazon*, ha minden $x, y \in A$ és $t \in \,]0, 1[$ esetén
$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$
- Az *f függvény konkáv az A halmazon*, ha $-f$ konvex az A halmazon.
- Az *f függvény szigorún konkáv az A halmazon*, ha $-f$ szigorúan konvex az A halmazon.
- Az *f függvény (szigorúan) konvex/konkáv*, ha f (szigorúan) konvex/konkáv a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

3.55. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az* f *függvény konvex.*
2. *Minden* $x, y \in \Omega$ *esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) \le f(y).$$
3. *Minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ *pozitív.*

3.56. Tétel. *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható függvény.*

1. *Az* f *függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha minden* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ *esetén*
$$f(x) + ((\mathrm{D}f)(x))(y - x) < f(y)$$
2. *Minden* $x \in \Omega$ *esetén* $(\mathrm{D}^{(2)}f)(x)$ *pozitív definit, akkor* f *szigorúan konvex.*

4. Fourier-sorok

4.1. Trigonometrikus polinomok

4.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V: \ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V: \ \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x,y,z \in V: \ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$;
- $\forall x,y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \langle \lambda x,y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x,y\rangle$;
- $\forall x,y \in V: \ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

4.2. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x,y \in V$ vektorra*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

teljesül.

4.3. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \ne e_i \in V$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i,j \in I$ elemre, ha $i \ne j$, akkor $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha
$$\forall x \in V\Big((\forall i \in I : \langle e_i, x\rangle = 0) \to x = 0\Big)$$
teljesül.

4.4. Definíció. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\ldots,n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

4.5. Tétel. *(A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.)*

1. *A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ algebrát alkot.*
2. *Minden $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom esetén $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
3. *Minden $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén a $t \mapsto f(t+x)$ függvény is trigonometrikus polinom.*

4.6. Tétel. *(Weierstrass approximációs tétele.) Minden $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, melyre $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül.*

4.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

4.7. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k,l,m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \ne k \ne l \ne m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}\,x = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(lx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

4.8. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az*

$$S_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}\, t, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \,\mathrm{d}\, t$$

teljesül.

4.9. Tétel. *A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \to \mathbb{R} \qquad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$$

leképezést.

1. *A fent definiált művelet skaláris szorzás.*
2. *A*
$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.
3. *A*
$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \ \middle|\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$
vektorrendszer ortonormált és teljes.

4.3. Függvény Fourier-sora

4.10. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \,\mathrm{d}\, t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n -$ edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

4.11. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)} \right|$ *jelölés mellett minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *számra*

$$|a_n| \leq \frac{D_k}{n^k} \qquad |b_n| \leq \frac{D_k}{n^k}.$$

4.12. Tétel. *Minden* $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π *szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergál az* f *függvényhez.*