ELTE Természettudományi Kar
Alkalmazott Analízis Tanszék
Andai Attila:

A kvantummechanika matematikai alapjairól

Diplomamunka

Témavezetők: Matolcsi Tamás és Fialowski Aliz

1998.

Általános bevezetés

A diplomamunkám célja a kvantummechanika alapjainak matematikailag pontos tisztázása. A logikai megfontolások és a reprezentációelmélet ötvözéséből született modellben a matematika több mély tételét használom fel, ezért bizonyítást csak a szükségesnek ítélt esetben írtam le.

Az első fejezetben a *kategóriaelmélet* azon ágának az alapjait tekintjük át, mely remélhetőleg egyesíteni tudja a topologikus térelméleteket (mint például a csomóelmélet) és a klasszikus reprezentációelméletet. A második fejezetben a Hilbert-tér mentes, *absztrakt kvantummechanikai modell*t alapozzuk meg univerzális algerbai eszközökkel. A harmadik fejezetben a kvantummechanikai jelenségek speciális logikájának a matematikai modelljeit vizsgáljuk meg. A negyedik fejezetben a kvantummechanikában használható valószínűségszámítást mutatjuk be. Az ötödik fejezetben, az előzőekben leírt matematiaki apparátusra támaszkodva, a kvantummechanika néhány matematikai modelljét adjuk meg. A hatodik fejezetben a fizikában fontos *csoportábrázolások* azon részének az elméletét tekintjük át, melyek később az elemi részek kvantummechanikai leírásához vezetnek. A hetedik fejezetben a *Poincaré-csoport* megfelelő ábrázolásait keressük meg, megadva ezzel a Poincaré-csoporthoz tartozó elemi részecskéket. A nyolcadik fejezetben megvizsgáljuk ezen elemi részek fizikai szempontból fontos tulajdonságait.

A fejezetek a matematika különböző területeit alkalmazzák, ezért minden fejezet önálló egységnek is tekinthető. Mindegyik elején található egy rövid bevezető, mely ismerteti a fejezetben szereplő szakaszok felépítését és a hozzájuk kapcsolódó irodalomjegyzéket.

Köszönettel tartozom a diplomamunka megírásában nyújtott ösztönző segítségért *Matolcsi Tamás*nak és *Fialowski Aliz*nak; a reprezentációelméletben nyújtott önzetlen segítségért *Kristóf János*nak, és a kategóriaelméletről szóló rész átnézéséért és értékes megjegyzéseiért *Makai Endré*nek.

I. Kvantumlogika

1. Kategóriaelméleti alapfogalmak

2. Univerzális algebra

3. Kvantumlogika

4. Kvantummechanikai valószínűségszámítás

5. A kvantummechanikai modellek alapjai

II. Reprezentációelmélet

6. Unitér-, projektív- és sugárábrázolások

7. A Poincaré-csoport ábrázolása

8. Elemi részek matematikai vizsgálata

I Kvantumlogika

1 Kategórielméleti alapfogalmak

1.0. Bevezető

A kategóriaelmélet alapjait Eilenberg és MacLane tették le az 1940-es évek elején. Rohamos fejlődése az 1950-es években kezdődött, főleg MacLane munkája nyomán [BuD]. Már az első lépéseknél észrevették, hogy a *kategóriák*nak létezik egy *objektummentes megközelítése*, melyet azonban nem használtak egészen a legutóbbi időkig. Az első szakaszban ezzel az objektummentes megközelítéssel definiáljuk majd [FS] alapján a kategóriákat és a kategóriák közti leképzéseket.

A második szakaszban a kategóriák egy speciális ágát, a *nyíl kategóriákat* adjuk meg. Ezekben a kategóriákban válnak külön az *objektumok* és a *morfizmusok*. Példaként megadunk a matematikában leggyakrabban előforduló kategóriák közül néhányat. Definiáljuk a *konkrét-, kis-* és *monoid kategóriá*kat, megvizsgáljuk, hogy a konkrét kategóriákban milyen szerepet tölt be a halmazelmélet, és ennek kapcsán megadjuk az általánosabb *K-monoid kategóriá*kat.

A harmadik szakaszban térünk rá a *2-kategóriák* vizsgálatára. Míg a kategóriákban csak objektumok közti morfizmusok voltak, a 2-kategóriákban már morfizmusok között ható *2-morfizmusok* is megjelennek. A *szigorú 2-kategória* után tárgyaljuk a modern kategóriaelméletben igen fontos *gyengítési elvet*, mely a szigorú egyenlőségek helyett mindenhol csak izomorfiát követel meg. Végül áttekintjük a 2-kategóriák két főbb fajtáját, a *szimpliciális-* és *dupla kategóriá*kat.

A 2-kategóriák általánosítását, a *k-adik monoid n-kategóriá*kat vizsgáljuk meg a negyedik szakaszban. Ezek kapcsán találkozunk a kategóriaelméleti kommutativitás megszületésével, melyet az *Eckmann-Hilton-érv* segítségével teszünk érthetővé, valamint itt jelennek meg a *fonott kategóriá*k, melyek a *kvantumcsoportok* elméletében jelentősek [Chr]. Érdekességként megemlítjük, hogy a matematikai alapjaihoz való *strukturalista* hozzáállás szerint jó eséllyel a gyenge 2-kategóriák adhatják a matematika korrekt alapjait [Mak].

A kategóriák egy fizikai alkalmazását vázoljuk az ötödik szakaszban. A *k-adik monoid n-Hilbert-terek kategóriája* igéretesnek látszik arra, hogy a részecskefizikában hasznos, topológiai ihletésű csomóelméletet és a klasszikus Hilbert-tereken történő ábrázolások elméletét ötvözze.

Ebben a fejezetben található tételek megtalálhatók az alábbi irodalomban.

Irodalom:

[Bae1] J. Baez: *An introduction to n-categories.*
Hálózaton elérhető
a *http://math.ucr.edu/home/baez/* helyen *q-alg/9705009* címen.
[Bae2] J. Baez: *Higher dimensional algebra II: 2-Hilbert Spaces.*
Hálózaton elérhető
a *http://math.ucr.edu/home/baez/* helyen helyen *bm2cat.ps* címen.
[Bat] M. Batanin: *On the definition of weak ω-category.*
Macquarie, Mathematics Report 96. évfolyam 207.
[BD1] J.Baez, J. Dolan: *Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory.*
Journal of Mathematical Physics. **36** (1995), 6073-6105.
[BD2] J. Baez, J. Dolan: *Higher-dimensional algebra III: n-Categories and the algebra of opetopes.*
Megjelenik az Adv. Math.-ban, hálózaton elérhető
a *http://math.ucr.edu/home/baez/* helyen *q-alg/9702014* címen.
[BD3] J. Baez, J. Dolan: *n-Categories* definíció vázlat.
Levél Ross Streetnek 1995. dec. 3. dátummal.
Hálózaton elérhető
a *http://math.ucr.edu/home/baez/* helyen *ncat.def.html* címen.
[BD4] J. Baez, J. Dolan :*Categorification.*
Hálózaton elérhető
a *http://math.ucr.edu/home/baez/* helyen *q-alg/9802029* címen.
[Bén] J. Bénabou: *Introduction to bicategories.*
Springer Lecture Notes in Mathematics, 47. kötet, 1-77.
[BuD] Ion Bucur, Aristide Delenau: *Introduction to the Theory of Categories and Functors.*
John Wiley & Sons, 1968.
[Car] Carlos Simpson: *Limits in n-categories.*
Hálózaton elérhető
a *http://www.lanl.gov* helyen *alg-geom/9708010* címen.
[Chr] Christian Kassel: *Quantum Groups.*
Springer-Verlag, New York, 1995.
[Eck] B. Eckmann, P. Hilton: *Grouplike structures in categories.*
Math. Ann. **145** (1962), 227-255.
[Eil] S. Eilenberg, G. Kelly: *Closed categories.*
Proceedings of the Conference on Categorical Algebra 421-562.
(Springer, Berlin, 1966)
[FS] P. J. Freyd, A. Scedrov:*Categories, Allegories.*
North-Holland, 1990.
[GPS] R. Gordon, A. J. Power, R. Street: *Coherence for tricategories.*

Memoirs Amer. Math. Soc. 117 (1995), 558-szám.
[Kel1] G. Kelly: *Basic Concepts of Enriched Category Theory.* London, Mathematics Society Lecture Notes, 64. kötet, Cambridge, University, England, 1982.
[Kel2] G. Kelly, R. Street: *Review of the elements of 2-categories.* Springer Lecture Notes in Mathematics 420. kötet, Berlin, 1974, 75-103.
[Law] F. W. Lawvere: *The Category of Categories as a foundation for mathematics.* Proc. Cont. on Categorical Algebra, Springer, 1966, 1-20.
[LS] J. Lambek, P. J. Scott: *Introduction to higher order categorical logic.* Cambridge University Press, 1986.
[Mak] M. Makkai: *Towards a Categorical Foundation of Mathematics.* Lecture Notes in Logic, **11.**, 1997, 153-190.
[Sch] H. Schubert: *Categories I-II.* Springer, 1972
[Tri] T. Trimble: *The definition of tetracategory* (1995).

1.1. Kategória megadása

A matematikában gyakran előfordul, hogy olyan fogalmakba ütközünk, melyek kivezetnek a megszokott ZFC halmazelmélet kereteiből. Ha például csoportokról beszélünk, akkor értelmezhetünk rajtuk egy számosság operációt, mely minden csoporthoz hozzárendeli a számosságát. Ez az operáció minden csoporton értelmezve van, hiszen minden csoport egy halmazra épül. Azonban gondba kerülünk, ha az operáció értelmezési tartományát kérdezzük, hiszen minden csoportok családja nem lehet halmaz (számossági megfontolások miatt). Az ilyen típusú problémák, amikor halmaznál 'bővebb' struktúrákkal találkozunk, vezettek a halmazelmélet axiómatikus meglapozásához. Ezen kérdések a kategoriaelmélet kidolgozásában is szerephez jutottak.

A kategória egy adott M osztályon értelmezett két unáris (egyváltozós) operációval és egy bináris parciális operációval adható meg. A két unáris operáció értékének a jele egy x elemen: $\Box x$ és $x\Box$. Vigyázni kell, hogy a $\Box$ jel két különböző operációt jelöl egyszerre, attól függően, hogy a változó előtt, vagy mögött áll. A bináris operáció jele adott x, y elempáron: xy. Az operációkat a következő módon mondjuk:

1.1.1. Definíció. Egy T *kategória* a következő négy elemből áll:
1. A $\mathrm{Cl}(T)$ egy osztály,
2. Minden $x \in \mathrm{Cl}(T)$ esetén $x \mapsto \Box x$ *eredet leképezés*, $\Box x$ neve: x *eredete.*
3. Minden $x \in \mathrm{Cl}(T)$ elemre $x \mapsto x\Box$ *cél leképzés*, $x\Box$ neve: x *célja.*
4. A $\cdot : \mathrm{Cl}(T) \times \mathrm{Cl}(T) \to \mathrm{Cl}(T) \quad (x, y) \mapsto yx$ parciálisan értelmezett művelet a *kompozíció.*

Minden $x, y, z \in \mathrm{Cl}(T)$ elemekre teljesülnek az alábbi operációaxiómák:
1. yx akkor és csak akkor definiált, ha $x\Box = \Box y$.
2. $(\Box x)\Box = \Box x$ és $\Box(x\Box) = x\Box$.
3. $(\Box x)x = x$ és $x(x\Box) = x$.
4. $\Box(yx) = \Box\big((\Box y)x\big)$ és $(yx)\Box = \big(y(x\Box)\big)\Box$.
5. $x(yz) = (xy)z$.

A definícióban az egyenlőség jel azt jelenti, hogy ha az egyik oldal definiált, akkor a másik is, és a két oldal egyenlő. A későbbiekben szükség lesz egy másik egyenlőségjelre is, a $\succeq$ -re. Ez azt jelenti, hogy ha a bal oldal definiált akkor a jobb oldal is, és ezek egyenlőek.

Megjegyzés.
1. A két kifejezés ekvivalens: $\Box(yx) = \Box\big((\Box y)x\big) \Leftrightarrow \Box(yx) \succeq \Box x$.
2. $\Box(\Box x) = \Box x$ és $(x\Box)\Box = x\Box$. Mert $\Box(\Box x) = \Box\big((\Box x)\Box\big) = (\Box x)\Box = \Box x$.

Ha adott egy A osztáky, akkor könnyen hozzá tudunk definiálni egy kategóriát: $\Box A = A\Box = AA = A$. Fordítva, ha egy kategória teljesíti valamelyik egyenletet, $\Box x = x$ vagy $x\Box = x$, akkor az szükségszerűen az előbbi módon kapható meg. Ezeket *diszkrét kategóriá*knak hívják. Bizonyos esetekben az x-et *morfizmus*nak, vagy *leképzés*nek nevezik. Továbbiakban mi is ezt a szóhasználatot követjük. Ilyenkor természetesen merül fel az igény az identikus leképzés létezésének a megkövetelésére.

1.1.1. Állítás. *A következő állítások ekvivalensek egy e morfizmusra:*

(1) *Létezik x, hogy $e = \Box x$,*
(2) *Létezik x, hogy $e = x\Box$,*
(3) $e = \Box e$,
(4) $e = e\Box$,
(5) *Minden x-re $ex \succeq x$,*
(6) *Minden x-re $xe \succeq x$.*

1.1.2. Definíció. Az előbbi feltételek közül valamelyiket teljesítő e morfizmust *identikus morfizmus*nak nevezzük. (Persze ekkor a többi feltételt is teljesíti.)

Az identikus leképzések segítségével tudjuk értelmezni egy morfizmus inverzét. Pontosabban x *balról invertálható*, ha létezik olyan y, hogy yx identikus morfizmus, valamint x *jobbról invertálható*, ha létezik olyan z, hogy xz identikus morfizmus. Ha x balról is, jobbról is invertálható, akkor x *izomorfizmus*. Egy izomorfizmusnak pontosan egy jobb és bal inverze van, mely látható a következő egyenletből:

$$y = y(xz) = (yx)z = z.$$

Ezek alapján bevezetünk egy unáris parciális operációt, az x^{-1} kifejezést és x inverzének fogjuk hívni.

1.1.3. Definíció. Az x^{-1} neve x *inverze*. Az x^{-1} akkor és csak akkor definiált, ha x izomorfizmus. A definiáló egyenletek:

(1) $\Box x = (\Box x)^{-1}$,
(2) $xx^{-1} \succeq x\Box$,
(3) $x^{-1}x \succeq \Box x$,
(4) $(x^{-1})^{-1} \succeq x$,
(5) $x^{-1}y^{-1} \succeq (yx)^{-1}$.

Eddig egy kategórián belüli dolgokkal foglalkoztunk. Most rátérünk a kategóriák közötti leképzések vizsgálatára.

1.1.4. Definíció. Ha adott A és B kategória, valamint egy $F : \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(B)$ leképezés, akkor F-et *kovariáns funktor*nak hívjuk, ha teljesíti a következő feltételeket:

(1) $\Box x = y$ esetén $\Box(Fx) = Fy$,
(2) $x\Box = y$ esetén $(Fx)\Box = Fy$,
(3) $xy = z$ esetén pedig $(Fx)(Fy) = Fz$.

F-et gyakran $F : A \to B$ leképzésnek írjuk.

1.1.2. Állítás. *F akkor és csak akkor kovariáns funktor, ha eleget tesz az alábbi egyenleteknek:*

(1) $F(\Box x) = \Box(Fx)$.
(2) $F(x\Box) = (Fx)\Box$.
(3) $F(xy) \succeq (Fx)(Fy)$.

Megjegyzés. A kovariáns funktor megőrzi a jobb- illetve bal invertálhatóságot. Az inverzre pedig $F(x^{-1}) \succeq (Fx)^{-1}$ teljesül.

1.1.5. Definíció. A es B kategóriák közötti $F : A \to B$ leképzés *kontravariáns funktor*, ha

(1) $F(\Box x) = (Fx)\Box$.
(2) $F(x\Box) = \Box(Fx)$.
(3) $F(xy) \succeq (Fy)(Fx)$.

1.2. Nyíl kategóriák

Eddig az általános algebrai kategóriaelmélet alapfogalmaival foglalkoztunk, most rátérünk annak egy speciális, számunkra érdekesebb ágára, a nyíl kategóriákra. Ebben az esetben válik érthetővé, hogy x-et miért nevezik morfizmusnak. Ezek után már csak az ilyen típusú kategóriákkal foglalkozunk.

1.2.1. Definíció. T *nyíl kategória*, ha kategória és a $\mathrm{Cl}(T)$ osztály két részből áll: $\mathrm{Ob}(T)$ *objektumok*ból és $\mathrm{M}(T)$ *protomorfizmusok*ból úgy, hogy $\mathrm{Ob}(T) \cap \mathrm{M}(T) = \emptyset$. Valamint a $\mathrm{Cl}(T)$ osztályon értelmezett eredet és cél operációk megszorításai teljesítik az alábbiakat:

(1) Minden $x \in \mathrm{Ob}(T)$ objektumra $\Box x = x$, $x\Box = x$ és $xx = x$.
(2) Minden $f, g \in \mathrm{M}(T)$ morfizmusokra $\Box f \in \mathrm{Ob}(T)$, $f\Box \in \mathrm{Ob}(T)$ és ha fg definiált, akkor $fg \in \mathrm{M}(T)$ és $\Box fg = \Box g$ valamint $fg\Box = f\Box$.
(3) Minden $f \in \mathrm{M}(T)$ és $x \in \mathrm{Ob}(T)$ elemekre $fx \succeq f$ és $xf \succeq f$.

Ezeken kívül a nyíl kategóriában létezik

$$1 : \mathrm{Ob}(T) \to \mathrm{M}(T) \quad x \mapsto 1_x$$

operáció, melyre minden $x \in \mathrm{Ob}(T)$ esetén teljesül, hogy

(1) $\Box 1_x = x$ és $1_x\Box = x$,
(2) Minden $f \in \mathrm{M}(T)$-re $1_x f \succeq f$ és $f 1_x \succeq f$.

Ezek után nyíl kategória helyett röviden csak kategóriát mondunk, vagy az objektumokról származtatott nevüket használjuk. Példák:

(1) *Halmazok kategóriája*: SET, $\mathfrak{S}$. Objektumai halmazok, a proto-morfizmusok a halmazt halmazba képző függvények.
(2) *Csoportok kategóriája*: GROUP, $\mathfrak{G}$. Objektumai csoportok, proto-morfizmusok a csoport homomorfizmusok.
(3) *Topológikus terek kategóriája*: TOP. Objektumai topológikus terek, protomorfizmusok a folytonos leképzések.
(4) *Vektorterek kategóriája*: VECT. Objektumai vektorterek, proto-morfizmusok a lineáris leképzések.
(5) *Véges dimenziós vektorterek kategóriája*: VECTF. Objektumai véges dimenziós vektorterek, protomorfizmusok a lineáris leképzések.

Megjegyzés.

(1) A felsorolt példákban a proto-morfizmusok halmaz leképezések voltak, ez azonban egyáltalán nem szükségszerű. Bármit nevezhetünk proto-morfizmusnak, ha teljesíti a rá vonatkozó feltételeket.
(2) Továbbá egy adott A, B objektumpárhoz a felsorolt kategóriákban csak halmaznyi sok proto-morfizmus tartozott. Ez a tulajdonság szintén nem szükségszerű.

A gyakorlati alkalmazás kapcsán azonban mégis az ilyen speciális tulajdonságokkal rendelkező kategóriák kerülnek elő. Ezekre külön elnevezést vezetünk be.

1.2.2. Definíció. Az olyan kategóriákat, melyek objektumai halmazok, a proto-morfizmusai halmaz leképezések, az egységmorfizmusok a halmazelméleti identitás leképezések valamint a morfizmusok kompozíciója a halmazleképezések kompozíciója, *konkrét kategóriá*knak nevezzük.

1.2.3. Definíció. A *valódi kategóriá*ban minden A, B objektumpárhoz tartozó $A \xrightarrow{x} B$ leképzések halmazt alkotnak, melyet $x \in \mathrm{Mor}(A, B)$-vel jelölünk. Erre az alábbiak igazak:

(1) $\forall A, B, C$ objektumokhoz létezik egy leképzés:

$$\circ_{A,B,C} : \mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C) \ (u, v) \mapsto v \cdot u$$

(2) $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(C, D) = \emptyset$ ha $A \neq C$ vagy ha $B \neq D$.
(3) $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ ha valamelyik oldal értelemezett.
(4) Minden A objektumhoz létezik $1_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ úgy, hogy

$$1_A \cdot u = u \quad \text{és} \quad v \cdot 1_A = v,$$

ha értelmezettek a kompozíciók.

1.2.4. Definíció. A (*szigorú*)*monoid kategóriá*ban létezik bármely két A, B objektumnak $A \times B$ szorzata , mely maga is objektum és a $\times$ szorzás asszociatív és egységelemes.

1.2.5. Definíció. Egy kategória *kicsi* vagy *kis kategória*, ha objektumainak osztálya halmaz.

Látható, hogy a VECT, GROUP, TOP és SET kategóriák valódi kategóriák. Minden konkrét kategória valódi, ez azonban fordítva nem igaz. SET monoid kategória ha $\times$ a Descartes-szorzat, VECTF is monoid, ha $\times$ a $\otimes$ tenzorszozat.

A valódi kategóriák definíciójánál fontos szerepet játszott a SET monoid kategória: minden A, B, C objektumhoz hozzárendeltünk két objektumot a SET-ből, $\mathrm{Mor}(A, B)$ és $\mathrm{Mor}(B, C)$-t. A $\circ_{A,B,C}$ leképzés a SET $\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C)$ objektumából a $\mathrm{Mor}(A, C)$ objektumba. Itt a $\times$ jelre mint egy monoid struktúra szorzásjelére tekintünk, mely most éppen a Descartes-szorzat. Ezért a valódi kategóriák neve *SET-tel gazdagított kategória* vagy *SET-kategória.* Általánosan minden K monoid kategóriára megadható a *K-kategória* [Kel1], ahol $\mathrm{Mor}(A, B)$ nem halmaz, hanem K objektuma és $\circ_{A,B,C}$ a K-beli $\otimes$ monoid műveletre nézve a következő alakú:

$$\circ_{A,B,C} : \mathrm{Mor}(A, B) \otimes \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C)$$

K-morfizmus. A kompozíció ilyen általánosításánál szintén meg kell még követelni az asszociativitást és az egység létezését.

Érdekes példa a VECTF, mely egyben VECTF-kategória, vagyis *zárt* [Eil] . Ugyanis A, B vektorterek esetén $\mathrm{Mor}(A, B)$ szintén vektortér és a vektorterek tenzorszorzatán értelmezett

$$\circ_{A,B,C} : \mathrm{Mor}(A, B) \otimes \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C)$$

kompozíció lineáris leképzés.

Legyen *Cat* az a kategória, melynek objektumai kis kategóriák, morfizmusai pedig funktorok. Russel-típusú paradoxonok elkerülése miatt van szükség a kis kategóriákra. Cat monoid: az egység egy tetszőleges csak egy elemet és egy morfizmust tartalmazó kategória, a szorzás pedig a kategóriák szorzata.

1.2.6. Definíció. Legyen C és D két K-kategória. $C \times D$ K-kategória objektumait $x \times y$ formában írjuk, ezek rendezett párok, ahol x C-nek, y pedig D-nek objektuma. $C \times D$ morfizmusait generátorok és relációk nyelvén adjuk meg. Ha $f : x \to x'$ és $g : y \to y'$ morfizmusok C-ben és D-ben, akkor léteznek az alábbi morfizmusok $C \times D$-ben:

$$x \times g : x \times y \to x \times y' \quad f \times y : x \times y \to x' \times y.$$

Ezek a generátorok, a relációk pedig:

$$(f \times y)(f' \times y) = ff' \times y \quad (x \times g)(x \times g') = x \times gg'.$$

A morfizmusok teljeísit az alábbi kommutatív diagrammot:

$$\begin{tikzcd}
x \times y \arrow[r, "f \times y"] \arrow[d, "x \times g"'] & x' \times y \arrow[d, "x' \times g"] \\
x \times y' \arrow[r, "f \times y'"'] & x' \times y'.
\end{tikzcd}$$

1.3. 2-Kategória

Ha adott egy halmaz, elemei lehetnek azonosak vagy különbözőek; többet nem tudunk róluk mondani. Az azonos elemekkel úgy dolgozunk, mintha csak egy lenne belőlük a halmazban. Egy kategóriában az izomorf objektumok lehetnek azonosak, de ebből még nem következik, hogy a bármely két izomorf objektum azonos lenne. Azonban ha A izomorf B-vel, és C izomorf D-vel, akkor a két objetum 'ugyanúgy' izomorf. Tehát az izomorfizmusokat tekintem valamilyen értelemben abszolútnak a kategóriáknál, míg halmazelméletben az elemeket. Felvetődik a kérdés, vajon hogyan lehetne megszabadulni az izomorfizmus abszolút voltától? Erre ad választ az n-kategóriák elmélete.

Az eddig megismert kategóriákat másképp 1-kategóriáknak hívjuk, a morfizmusokat pedig 1-morfizmusoknak. 1-kategóriában voltak objektumok, és köztük morfizmusok, melyek bizonyos esetekben össze tudtunk ragasztani:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

esetén $g \cdot f$ egy $x \to z$ leképezést jelöl. Ha adott az x és y objektumokhoz két 1-morfizmus $f, g \in \mathrm{Mor}(x, y)$ akkor megadható egy 2-morfizmus: $a : f \to g$ azaz azonos eredetű és célú 1-morfizmusok közötti leképzés. A 2-morfizmusok vezetnek a 2-kategóriák definíciójához. 2-morfizmusok kompozícióját már alapvetően kétféle módon lehet értelmezni, mint ahogy az ábrák mutatják.

Először, ha $f, g, h \in \mathrm{Mor}(x, y)$ elemekhez adott $a : f \to g$ és $b : g \to h$ 2-morfizmusok, akkor értelmezhető $b \cdot a : f \to h$ szorzat. Ezt vertikális kompozíciónak hívják.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "h"'] & y \end{tikzcd} \quad a, b \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "b \cdot a"] & y \end{tikzcd}$$

Másodszor, ha $f, g \in \mathrm{Mor}(x, y)$ és $h, i \in \mathrm{Mor}(y, z)$ leképzésekhez adottak $a : f \to g$ valamint $b : h \to i$ 2-morfizmusok, akkor képezhetjük a $ab : hf \to ig$ szorzatot. Ezt horizontális kompozíciónak nevezzük.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "a"] & y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "i"'] \arrow[r, phantom, "b"] & z \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "ig"'] \arrow[r, phantom, "ab"] & z \end{tikzcd}$$

1.3.1. Definíció. *Szigorú 2-kategória* tartalmaz *objektumokat, morfizmusokat* és *2-morfizmusokat.* Az $\{u, v, w, x, y, z\}$, $\{g, h, i, j, k, l\}$ és $\{a, b, c, e, d, f\}$ szimbólumok objektumokat, morfizmusokat és 2-morfizmusokat jelölnek.
Minden *objektum eredete* és *célja* önmaga: $\square x = x$ és $x\square = x$.
Minden *morfizmus eredete* és *célja* egy objektum: $\square f = x$ és $f\square = y$.
Minden *2-morfizmus eredete* és *célja* egy morfizmus: $\square a = f$ és $a\square = g$, ahol $\square f = \square g$ és $f\square = g\square$. (Vagy $\square\square a = \square(a\square)$ és $(\square a)\square = a\square\square$.)
Morfizmusok kompozíciója: Ha $f\square = \square g$ akkor létezik gf *kompozíció*, mely morfizmus az alábbi tulajdonságokkal:

$$\square f = \square fg, \quad g\square = fg\square.$$

2-morfizmusok kompozíciója:

(1) Ha $a\Box = \Box b$, akkor létezik $b \cdot a$ *vertikális kompozíció*, mely 2-morfizmus, és teljesíti a következőket:

$$\Box a = \Box(b \cdot a), \quad b\Box = (b \cdot a)\Box.$$

(2) Ha teljesülnek

$$\Box\Box a = \Box(a\Box), \quad a\Box\Box = (\Box a)\Box = \Box(b\Box) = \Box\Box b$$

egyenletek, akkor létezik *ab horizontális kompozíció*, mely 2-morfizmusra és igaz rá, hogy:

$$\Box ab = (\Box b)(\Box a), \quad ab\Box = (b\Box)(a\Box).$$

Asszociativitás: Morfizmusok kompozíciója, 2-morfizmusok horizontális és vertikális kompozíciója asszociatív.
Identitás:

(1) Minden x-hez létezik 1_x *identitás morfizmus*, melyre:

$$\Box 1_x = 1_x\Box = x.$$

(2) Minden f-hez létezik 1_f *identitás 2-morfizmus*, melyre:

$$\Box 1_f = 1_f\Box = f \quad \text{és} \quad 1_{fg} = 1_f 1_g.$$

Egység: Az identitás morfizmus az egység szerepét játsza a morfimusok kompozíciójára nézve. Az identitás 2-morfizmus az egység a 2-morfizmusok horizontális kompozíciójára nézve és 1_{1_x} egység a 2-morfizmusok horizontális kompozíciójára nézve.
A vertikális és horizontális szorzat *felcserélési szabálya*:

$$(b \cdot a)(d \cdot c) = (bd) \cdot (ac)$$

igaz, ha valamelyik oldal értelmes.

A felcserélési szabályt mutatja az alábbi ábra:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "a"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "b"] & y \arrow[r, bend left=60, "i"] \arrow[r, "j"] \arrow[r, bend right=60, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "c"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "d"] & z & \Longrightarrow & x \arrow[r, bend left=60, "if"] \arrow[r, "jg"] \arrow[r, bend right=60, "kh"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "ac"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "bd"] & z
\end{tikzcd}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, "b \cdot a"] & y \arrow[r, bend left=50, "i"] \arrow[r, bend right=50, "k"'] \arrow[r, phantom, "d \cdot c"] & z & \Longrightarrow & x \arrow[r, bend left=50, "if"] \arrow[r, bend right=50, "kh"'] \arrow[r, phantom, "(b\cdot a)(d\cdot c)"] & z
\end{tikzcd}$$

Az 1-kategóriáknál nem beszélhettünk izomorf 1-morfizmusokról, sajnos 2-kategóriáknál sem beszélhetünk izomorf 2- morfizmusokról. Általánosan az *n-kategória* lehetőséget ad, hogy osztályozzuk az $n-1$ *morfizmusokat*, de n-morfizmusok egymáshoz való viszonyáról értelmetlen beszélni.

Ha a 2-kategóriánál nem követeljük meg a morfizmusokra és a 2-morfizmusokra szigorúan az asszociativitást és az egység létezését a kétféle szorzásra nézve, hanem csak izomorfizmus erejéig kell ezeknek a feltételeknek teljesülniük, akkor a 2-kategóriáknál általánosabb *bikategóriá*kat [Bén] kapunk. Ekkor minden komponálható morfizmus hármashoz létezik egy invertálható 2-morfizmus, az *asszociátor*:

$$a_{f,g,h} : (fg)h \to f(gh).$$

Továbbá minden $f : A \to B$ morfizmushoz létezik két invertálható 2-morfizmus:

$$l_f : 1_A f \to f, \qquad r_f : f 1_B \to f,$$

melyeket *jobb-* illetve *balegység*nek nevezünk. Az asszociátornak teljesítenie kell néhány egyenletet; természetes igény, hogy ha egy zárójeles kifejezést egy máshogy zárójelezett kifejezéssé alakítunk át az asszociátor iterált alkalmazásával, amit persze sokféle módon tehetünk meg, a kapott eredmény legyen mindig ugyanaz. Ezt fogalmazza meg *Stasheff kommutatív diagramja*:

$$\begin{tikzcd}
((fg)h)i \arrow[r, "a_{fg,h,i}"] \arrow[d, "a_{f,g,h}1_i"'] & (fg)(hi) \arrow[r, "a_{f,g,hi}"] & f(g(hi)) \\
(f(gh))i \arrow[r, "a_{f,gh,i}"'] & f((gh)i) \arrow[r, equal] & f((gh)i) \arrow[u, "1_f a_{g,h,i}"']
\end{tikzcd}$$

Adott $f : A \to B$ és $g : B \to C$ morfizmusok esetén a bal- illetve jobb egységnek kommutatívvá kell a tennie a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
(f1_B)_g \arrow[r, "a_{f,1_B,g}"] \arrow[d, "r_f g"'] & f(1_B g) \arrow[d, "f l_g"] \\
fg \arrow[r, equal] & fg
\end{tikzcd}$$

A bikategóriák komplikáltabbnak tűnnek a 2-kategóriáknál, alkalmazásokban mégis a bikategóriák fordulnak elő gyakrabban.

Legyen C egy bikategória egyetlen x objektummal. C-ből képezhetünk egy másik $\tilde{C}$, úgynevezett *gyenge kategóriát*, melynek objektumai C morfizmusai, morfizmusai pedig C 2-morfizmusai. A 'gyenge' jelző arra utal, hogy az egység és az asszociativitásra vonatkozó szabályok csak izomorfia erejéig teljesűlnek. A $\tilde{C}$ egy speciális típusú gyenge kategória, mivel objektumait össze tudjuk szorozni a vertikális kompozícióval. Az ilyen kategóriákat *gyenge monoid kategóriák*nak nevezzük. Ha nem egyelemű bikategóriából indulunk ki, hanem egyobjektumú szigorú 2-kategóriából, akkor *szigorú monoid kategóriát* kapunk.

A halmazok kategóriájából kaphatunk gyenge monoid kategóriát, ha az objektumok szorzatának a direkt szorzatot tekintjük. Ez azonban nem lesz szigorú monoid kategória, mert a direkt szorzat nem szigorúan asszociatív:

$$(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z).$$

Hogy ezt lássuk, vegyünk minden halmazból egy-egy elemet, és vegyük ezek direkt szorzatát. Legyen $x \in X$, $y \in Y$ é $z \in Z$, ekkor:

$$((x,y),z) = \Big\{\Big\{\{\{x\},\{x,y\}\}\Big\}, \Big\{\{\{x\},\{x,y\}\},z\Big\}\Big\} \in (X \times Y) \times Z$$

$$\text{és } (x,(y,z)) = \Big\{\{x\}, \Big\{x, \{\{y\},\{y,z\}\}\Big\}\Big\} \in X \times (Y \times Z).$$

A szigorú asszociativitási szabály helyett azonban létezik egy asszociátor:

$$a_{X,Y,Z} : (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z).$$

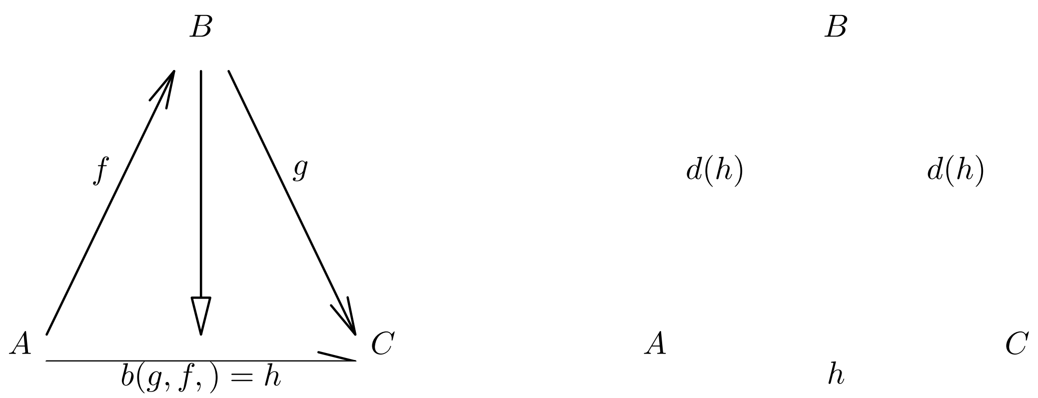
A halmazok kategóriája egy tipikus példa, arra hogy a természetes módon adódó bikategóriák nem szigorú 2-kategóriák.

Az eljárást, amivel szigorú 2-kategóriákból bikategoriákat kapunk az előbbi módszerrel, tehát szigorú egyenlőségek helyett, azok csak egy izomorfizmus erejéig való teljesülését követeljük meg, *gyengítés*nek nevezzük.

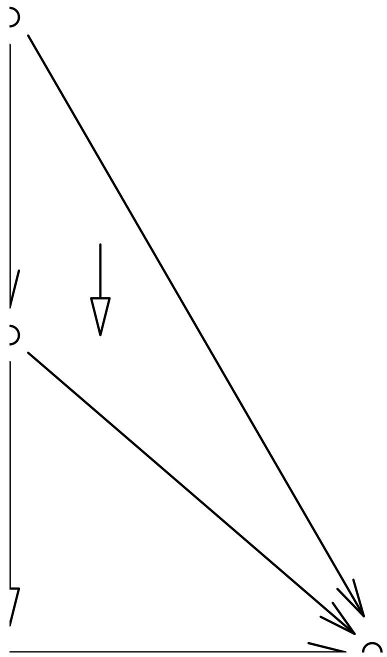
Eddig speciális 2-morfizmusokkal foglalkoztunk, most áttekintjük a 2-morfizmusok főbb típusait:

(1) Két $f, g : A \to B$ 1-morfizmus esetén 2-morfizmus az $a : f \to g$ leképzés. Ezekkel foglalkoztunk eddig.

(2) Adott 1-morfizmuspárhoz $f : A \to B$, $g : B \to C$ hozzárendelhetünk egy $h : A \to C$ morfizmust, melyre $h = gf$, ekkor $b : (g,f) \to h$ leképzés 2-morfizmus. Ezekre a 2-morfizmusokra nehéz természetes megkötéseket tenni, ezért megengedjük a fordított 2-morfizmus létezését, mely $h : A \to C$ leképzéshez egy ($f : A \to B$, $\quad g : B \to C$) leképzéspárt rendel, úgy, hogy $h = gf$. A fordított 2-morfizmus a $d : h \to (f,g)$ leképzés, amit gyakran *faktorizáció*nak hívnak. Ezeket a műveleteket szemléleteti az alábbi ábra.



A műveletekre természetes megkötést úgy kaphatunk, hogy néhány háromszöget összeragasztunk egy nagyobb háromszöggé. Erre a legegyszerűbb példát a következő ábra mutatja.



Tisztán topológiai és kombinatorikai meggondolásokkal könnyen adhatunk a fenti példához hasonló megkötést a háromszögek magasabb dimenziós általánosítására. Ez az ötlet vezetett a *szimpliciális 2-kategóriá*k definiálásához.

A kompozíciós egyenlet könnyen általánosítható *szimpliciális n-kategóriá*kra.

(3) Morfizmuspárhoz morfizmuspárt rendel a 2-morfizmus a *dupla kategóriá*k [Kel2] esetében. Adott $f : A \to B$ és $g : B \to C$ morfizmusokhoz $h : A \to D$ és $i : D \to C$ morfizmusokat rendel a 2-morfizmus: $a : (f, g) \to (h, i)$,úgy hogy az alábbi kommutatív diagram teljesül:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "i"'] & C \end{tikzcd}$$

A szigorú 2-kategóriák jobb megértése céljából megadjuk az általánosabb dupla kategóriák definíciójának az elvét (tehát nem lesz teljesen egzakt a definíció!), melyek más oldalról világítják a szigorú 2-kategóriák elméletét.

1.3.2. 'Definíció'. A dupla kategóriában szerepelnek *objektumok* (A), *vízszintes nyilak* (a), *függőleges nyilak* (x) és *négyzetek* (α). Rajzban jelölve ezeket:

$$A \quad a \quad B \qquad\qquad \begin{matrix} A \\ x \\ C \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} & a & \\ A & & B \\ x & \alpha & y \\ C & & D \\ & b & \end{matrix}$$

Az objektumok és a vízszintes nyilak 1-kategóriát alkotnak, ahol az egység:

$$h_A : A \to A$$

valamint az objektumok és a függőleges nyilak is 1-kategóriát alkotnak

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "A^1"'] \\ A \end{tikzcd}$$

egységgel.Ebben a felépítésben a négyzetek felelnek meg a *2-morfizmus*oknak. A négyzeteket *vízszintesen* (*horizontálisan*)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "y"] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & E \arrow[d, "z"] \\ C \arrow[r, "b"'] & D \arrow[r, "d"'] & F \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, "ca"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\beta"] & E \arrow[d, "z"] \\ C \arrow[r, "db"'] & F \end{tikzcd}$$

és *függőlegesen* (*vertikálisan*)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & B \arrow[d, "y"] \\ C \arrow[r, "b"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\gamma"] & D \arrow[d, "v"] \\ G \arrow[r, "e"'] & H \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "ux"'] \arrow[dr, phantom, "\gamma \cdot \alpha"] & B \arrow[d, "vy"] \\ G \arrow[r, "e"'] & H \end{tikzcd}$$

lehet összeragasztani. Ezek a *2-morfizmusok kompozíciói*t jelentik. Ezekre az asszociativitás mindkét kompozícióra teljesül. Továbbá erre a kompozícióképzésre megköveteljük, hogy az alábbi esetben ha először a vízszintes kompozíciókat képezzük, utána a függőlegest, és ha előbb a függőlegest, utána a vízszintest akkor a két eredmény legyen azonos:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\gamma"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

Legyen továbbá két speciális 2-morfizmus család 1_x és 1_a (tetszőkeges x, illetve a függőleges és vízszintes nyilakra), amelyek a horizontális illetve vertikális kompozícióra egységek:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "1_x"] & A \arrow[d, "x"] \\ C \arrow[r, "h_C"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "A^1"'] \arrow[dr, phantom, "1_a"] & B \arrow[d, "B^1"] \\ A \arrow[r, "a"'] & B \end{tikzcd}$$

Az 1_x és 1_y *négyzetek függőleges* $1_x \cdot 1_y$ *kompozíciója* legyen 1_{yx}, valamint az 1_a és 1_b *négyzetek vízszintes* $1_a 1_b$ *kompozíciója* legyen 1_{ab}. Ezenkívül teljesüljön az alábbi egyenlet:

$$1_{A^1} = 1_{h_A}.$$

Megjegyzés. A szigorú 2-kategória olyan dupla kategória, melyben a függőleges nyilak az identitást jelentik.

Az előző fejezetben láttuk, hogy Cat gyenge monoid kategória (a kis kategóriák szorzásával) és minden K monoid kategóriára megadhatjuk a K-kategóriákat. Az n-kategóriák definíciójánál ezt kihasználva a szigorú 2-kategóriát gyakran *Cat*-kategóriának definiálják [BD1] . Ebben a megközelítésben az alábbi gondolatmenet vezet az n-kategóriákhoz: Legyen *2Cat* az a kategória, melynek objektumai kis szigorú 2-kategóriák, morfizmusai pedig funktorok (tehát olyan 2-kategóriák közötti műveletek, amelyek az objektumokat, 1-, és 2-morfizmusokat hasonlókba viszik és a definícióban szereplő összes egyenletet megtartják). Igazolható, hogy 2Cat gyenge monoid kategória egy alkalmas monoidális struktúrára (a szorzásra). Így eljutunk a szigorú 3-kategóriákhoz, melyek 2Cat-kategóriák. Általánosan megfogalmazva: ha definiáltuk $(n-1)$Cat-ot, akkor az $(n-1)$Cat-kategóriák lesznek a szigorú n-kategóriák. Ekkor nCat monoid kategória objektumai kis szigorú n-kategóriák, morfizmusai funktorok.

Látszik, hogy a 2-kategóriák elméletének a 2-morfizmusok értelmezése alapján sok különböző ága van. Mindegyikben elképzelhető olyan 3-morfizmusnak nevezett leképzés, melynek eredete és célja egy-egy 2-morfizmus. A 3-morfizmusok kompozíciós szabálya már átláthatatlanul sokféle lehet, hiszen nagymértékben függ a 2-morfizmus értelmezésétől. Tetszőleges n-re megadható n-kategória [Bae1], melynek alapja az n-morfizmus, azaz $n-1$-morfizmusok egymásba képzése. Nehéz feladat a sokféle kompozíciós lehetőség közül kiválasztani a könnyen általánosítható, jól használható szabályokat. Ezért az n-kategóriáknak nagyon eltérő definícióival találkozhatunk az irodalomban.

2-morfizmus értelmezése alapján legkönnyebb a szigorú 2-kategóriák általánosítása, amit szigorú n-kategóriának hívunk. Ezek elmélete meglehetősen jól ismert [Eil], az alkalmazásokban viszont ritkán találkozunk velük. A gyengített változata, a *gyenge n-kategóriák* elmélete [BD2], jelent igazi kihívást és ez jelenik meg a legtöbb alkalmazásnál. A gyengítés elve, hogy az $x = x$ alakú egyenletek teljesen feleslegesek, amik hasznosak, az $x = y$ alakúak. A szigorú egyenlőség helyett azonban elég, ha létezik valamilyen $f : x \to y$ ekvivalencia. A szigorú 2-kategóriánál láttunk példát a gyengítésre, amikor az asszociativitás nem egyenlet formájában volt igaz, hanem úgy, hogy létezett egy asszociátor, mely az egyenlőség helyett kötötte össze a kifejezéseket. A gyenge n-kategóriákat viszont csak $n = 1, 2, 3, 4, \omega$ esetre sikerült meghatározni egységesen, ezek a *Gordon-, Power-, Street-féle trikategóriák* [GPS], valamint a *Trimble-féle tetrakategóriák* [Tri] és a *Batanini-féle gyenge ω-kategóriák* [Bat] .

1.4. k-adik monoid n-Kategóriák

*k-adik monoid n-kategóriá*k azok az $n+k$-kategóriák melyeknek egy objektumuk és minden $j < k$ esetén csak egy j-morfizmusuk van. A 0-morfizmus az objetkum. Az n és k függvényében az alábbi kategóriákat kapjuk [BD1] :

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$k = 0$	osztályok	kategóriák	2-kategóriák
$k = 1$	monoidok	monoid kategóriák	monoid 2-kategóriák
$k = 2$	kommutatív monoidok	fonott monoid kategóriák	fonott monoid 2-kategóriák
$k = 3$	kommutatív monoidok	szimmetrikus monoid kategóriák	gyengén involútív monoid 2-kategóriák
$k = 4$	kommutatív monoidok	szimmetrikus monoid kategóriák	erősen involútív monoid 2-kategóriák
$k = 5$	kommutatív monoidok	szimmetrikus monoid kategóriák	erősen involútív monoid 2-kategóriák

Nézzük meg az $n = 0$ oszlopot. $k = 0$ esetén 0-kategóriát kapunk, mely osztály. Míg a $k = 1$ esethez természetesen tartozik a monoid struktúra, a $k = 2$ esetben a kommutatív jelző már magyarázatra szorul, ezt gyakran Eckmann, Hilton érvként [Eck] emlegetík. Legyen C 2-kategória egy x objektummal és egy 1_x morfizmussal. A 2-morfizmusok $\mathrm{Mor}(1_x, 1_x)$ elemei. Legyenek α, β 2-morfizmusok. Akár vertikálisan, akár horizontálisan szorozzuk őket össze, $\mathrm{Mor}(1_x, 1_x)$-beli elemeket kapunk. Legyen 1_{1_x} az identitás 2-morfizmus, ekkor az alábbi három egyenletet felhasználva

$$1_{1_x} \cdot \alpha = \alpha \cdot 1_{1_x} = \alpha, \quad 1_{1_x}\alpha = \alpha 1_{1_x} = \alpha, \quad (\alpha \cdot \alpha')(\beta \cdot \beta') = (\alpha\beta) \cdot (\alpha'\beta')$$

érthetővé válik az Eckmann, Hilton érv:

$$\alpha\beta = (1_{1_x} \cdot \alpha)(\beta \cdot 1_{1_x}) = (1_{1_x}\beta) \cdot (\alpha 1_{1_x}) = \beta \cdot \alpha$$
$$\beta \cdot \alpha = (\beta 1_{1_x}) \cdot (1_{1_x}\alpha) = (\beta \cdot 1_{1_x})(1_{1_x} \cdot \alpha) = \beta\alpha.$$

Vagyis ekkor a horizontális kompozíció megegyezik a vertikálissal, és mindkettő kommutatív.

Az $n = 1$ esetet vizsgálva találkozunk először a *fonott kategóriá*kkal. Ennek a pontos definícióját most nem adjuk meg. Jelölje $\oplus$ a $k = 1$ esetén fellépő monoid struktúrában a szorzást. A fonott monoid kategóriában minden x, y objektumpárhoz létezik egy izomorfizmus, a *fonás*:

$$B_{x,y} : x \oplus y \to y \oplus x.$$

Ennek a fonásnak a megjelenése jellemzi a $k = 2$ esetet. Ha $k = 3$, akkor a következő egyenletet kapjuk egy kanonikus megadott fonásra:

$$B_{x,y} = B_{y,x}^{-1}.$$

Ezt fejezzük ki a szimmetrikus jelzővel.

Az $n = 2$-nél $k = 1$ esetben megjelenik a $\oplus$ monoid szorzás, $k = 2$ esetben a $B_{x,y}$ fonás. A $k = 3$ esetben egy 2-izomorfizmus születik:

$$I_{x,y} : B_{x,y} \to B_{y,x}^{-1}.$$

Ennek a neve *involúció*. A $k = 4$ esetben erre az involúcióra kapunk egy egyenletet: az $I_{x,y}$ és az $I_{y,x}^{-1}$ horizontális kompozíciója az egység:

$$I_{x,y} I_{y,x}^{-1} = 1_{1_{x \oplus y}}.$$

1.5. 2-Kategóriák a fizikában

Tekintsünk egy A_0 halmazt, mely tartalmaz két elektront. Határozzuk meg A_0 elemszámát. Ha az elektront egy valószínűségi eloszlással leírható objektumnak tekintem, és ezt a matematikai modellt is az elektron lényegi tulajdonságának tartom, akkor a halmaznak két eleme van. Ha megfigyelő nélküli világból veszek két elektront, akkor a halmaz elemszáma 1, hiszen nem tudom a két elektront egymástól megkülönböztetni. Ebben az esetben $A_0 = \{e, e\}$, azaz $|A| = 1$. Tehát a megkülönböztethetetlen részecskéket nem célszerű halmaz elemeinek tekinteni, hiszen az csak egyelemű lenne.

Próbáljuk meg a halmazoknál (kis 0-kategóriáknál) általánosabb modell segítségével megoldani ezt a problémát. Tekintsük egy A_1 1-kategória objektumainak a két elektront. Ekkor nem lesz azonos a két elektron, de mégis megkülönböztethetetlenek maradnak. Az A_1 kategóriaelméleti modell jobban írja le a világot, mint az A_0, azaz halmazelméleti megfelelője. Az A_1 kategóriának tehát van két objektuma: e és e. Ekkor indexek írására nélkül is jól működne a modell, de a jobb áttakinthetőség kedvéért mégis indexelni fogjuk az objektumokat. Ez azonban csak a mi kényelmünket szolgálja, és nem tartozik modellhez.

Nézzük meg, mik lesznek A_1 morfizmusai. A morfizmusokról csak annyit kell állítani, hogy eleget tesznek néhány axiómának. A $\mathrm{Mor}(e_1, e_1)$ és $\mathrm{Mor}(e_2, e_2)$ az identitásból fog állni. Ennek a jele legyen id_{e_1} és id_{e_2}. $\mathrm{Mor}(e_1, e_2)$ és $\mathrm{Mor}(e_2, e_1)$ elemei 'egymásba transzformálják' az elektronokat izomorf módon, tehát

$$\{c_{e_1,e_2}\} = \mathrm{Mor}(e_1, e_2), \quad \{c_{e_2,e_1}\} = \mathrm{Mor}(e_2, e_2)$$

úgy, hogy:

$$c_{e_2,e_1} c_{e_1,e_2} = id_{e_1} \qquad c_{e_1,e_2} c_{e_2,e_1} = id_{e_2}$$

teljesüljön. Két elektron példája után látható, hogyan lehet a modellt kiterjeszteni tetszőleges számú (számosságú) elektronra.

Legyen $\mathfrak{G}$ és $\mathfrak{C}$ kategória, F pedig egy kovariáns funktor $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{C}$. Ez a leképzés a $\mathfrak{G}$ kategória *ábrázolása* $\mathfrak{C}$-n. Ha $\mathfrak{G}$-nek csak egy objektuma van és minden morfizmusa izomorfizmus, akkor $\mathfrak{G}$ morfizmusai (az objektumtól függetlenül) csoportot alkotnak. Vagyis a kategóriák nyelvén úgy definiálhatjuk a csoportot, hogy egy kategória egy objektummal, amelynek minden morfizmusa izomorfizmus. Egy $\mathfrak{G}$ csoport esetén az ábrázolás a $\mathfrak{G}$ egyetlen x objektumához hozzárendeli $\mathfrak{C}$ egy $F(x)$ objektumát, és $\mathfrak{G}$ minden f morfizmusához $\mathfrak{C}$ egy $F(f)$ morfizmusát. Ha F minden Mor halmazon injektív, akkor *hű ábrázolás*ról beszélünk.

Legyen F és G ábrázolása $\mathfrak{G}$-nek $\mathfrak{C}$-n. A két ábrázolást *ekvivalens*nek nevezzük, ha $\mathfrak{G}$ minden $f : x \to y$ morfimusához léteznek i és j izomorfizmusok a

$$\Box i = G(x) \quad i\Box = F(x) \quad \Box j = G(y) \quad j\Box = F(y)$$

tulajdonságokkal úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} G(x) & \xrightarrow{\ i\ } & F(x) \\ {\scriptstyle G(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ G(y) & \xrightarrow[\ j\ ]{} & F(y) \end{array}$$

diagram kommutatív. Ha $\mathfrak{G}$ csoport, akkor elég megkövetelni i és j izomorfizmusok közül csak az egyiknek a létezését.

Legyen $\mathfrak{D}$ 2-kategória és $\mathfrak{G}$ csoport. Ekkor $\mathfrak{G}$-t az 1-kategóriák köréből felemeljük a 2-kategóriák közé, oly módon, hogy az eddigi morfizmusokat 2-morfizmusoknak, az objektumot identitás 1-morfizmusnak tekintjük, és hozzáveszünk egy új objektumot (amelynek az indentitás morfizmusa az 1-morfizmus) és a horizontális kompozíció tetszőleges lehet (persze a 2-kategóriák definíciójában szereplő feltételeket teljesítenie kell):

1-kategória	$\longrightarrow$	*2-kategória*
	$\longrightarrow$	objektum
objektum	$\longrightarrow$	1-morfizmus
morfizmus	$\longrightarrow$	2-morfizmus
1-identitás	$\longrightarrow$	2-identitás
kompozíció	$\longrightarrow$	vertikális kompozíció
	$\longrightarrow$	horizontális kompozíció

A $\mathfrak{G}$ csoport 2-ábrázolásainak egy típusa egy $T : \mathfrak{G} \to \mathfrak{D}$ '2-funktor', mely $\mathfrak{G}$ x objektumához $T(x)$ objektumot, 1_x 1-morfizmushoz $T(1_x) = 1_{T(x)}$ 1-morfizmust és a 2-morfizmusokhoz $T(a)$ 2-morfizmusokat rendeli, úgy, hogy $T(1_{1_x})$ identitás 2-morfizmus, és $ab = c$ esetén $T(a)T(b) = T(c)$, és amely a 2-kategória definíciójában szereplő összes tulajdonságot és relációt megtartja.

Ha T nem funktor, csak leképezés $\mathfrak{G}$ i-morfizmusairól $\mathfrak{C}$ i-morfizmusaira, ahol $i = 0, 1, 2$, akkor 1_x-hez hozzárendelhet olyan $T(1_x)$ 1-morfizmust $\mathfrak{D}$-ben, melyre igaz, hogy

$$\square T(1_x) = u \quad T(1_x)\square = v.$$

Az 1_{1_x} identitás 2-morfizmus képe $1_{T(1_x)}$, minden a 2-morfizmus $T(a)$ képére teljesül, hogy

$$\square T(a) = T(a)\square = T(1_x),$$

valamint $ab = c$ esetén $T(a) \cdot T(b) = T(c)$. A horizontális kompozícióra nincs feltétel. Ezt a leképzést szintén ábrázolásnak nevezzük.

A fizikában főként Hilbert-tereken operátorokkal ábrázolunk csoportokat, vagyis a Hilbert-terek 1-kategóriájának objektumain. Ekkor egy $g \in G$ csoportelemhez egy $A_g \in \mathrm{Aut}(H)$ operátort rendelünk. Ez a G csoport 1-ábrázolása. A 2-funktornak megfelelő ábrázolás esetén a g elemet egy $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(H))$-val jelölt struktúra [Bae2] egy elemével ábrázoljuk. Ennek a struktúrának a mibenlétét itt nem részletezzük. Elégedjünk meg annyival, hogy nem egyszerű csoportreprezentációról van szó, ugyanis $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(H))$ egy speciális típusú *2-funktor kategória*, aminek pontos definiálásához egy sor további kategóriaelméleti fogalom ismeretére lenne szükségünk. A nem funktor típusú 2-ábrázolás esetén a g csoportelemhez $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lin}(H_1, H_2))$-vel jelölt kategória egy objektumát rendeljük.

A Hilbert-terek kategóriájából kiindulva felírhatjuk a k-adik monoid n-Hilbert-terek-kategóriákat [Bae2] :

	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$k=0$	Hilbert-terek	2-Hilbert-terek	3-Hilbert-terek
$k=1$	H^*-algebrák	2-H^*-algebrák	3-H^*-algebrák
$k=2$	kommutatív H^*-algebrák	fonott 2-H^*-algebrák	fonott 3-H^*-algebrák
$k=3$	kommutatív H^*-algebrák	szimmetrikus 2-H^*-algebrák	gyengén involútív 3-H^*-algebrák
$k=4$	kommutatív H^*-algebrák	szimmetrikus 2-H^*-algebrák	erősen involútív 3-H^*-algebrák
$k=5$	kommutatív H^*-algebrák	szimmetrikus 2-H^*-algebrák	erősen involútív 3-H^*-algebrák

A fenti táblázatban szereplő fogalmak közül néhánynak megadjuk a definícióját példaképpen. A továbbiakban csak véges dimenziós Hilbert-terekkel foglalkozunk, ezek szerkezete könnyen áttekinthető, valamint végtelen dimenziós esetekben a definíciók formailag nagyon elbonyolódnak. Legyen *Hilb* az a kategória, melynek objektumai véges dimenziós komplex Hilbert-terek, morfizmusok a lineáris leképzések. A $\otimes$ tenzor-szorzat gyenge szimmetrikus monoid kategóriává teszi Hilb-et. A gyenge egység a $\mathbb{C}$, a gyenge szimmetria pedig:

$$S_{x,y}(v \otimes w) = w \otimes v$$

x, y objektumokra Hilb-ből és minden $v \in x$ és $w \in y$ vektorra.

A $*$-*struktúra* egy C kategórián egy $* : C \to C$ kontravariáns funktor, mely identitásként hat az objektumokon, valamint teljesíti az

$$*^2 = 1_C$$

egyenletet. Egy $*$-struktúrával ellátott kategória neve $*$-*kategória.* A Hilbert-tereket a duális terükkel a szokásos módon azonosítva a Hilb kategórián a morfizmusok adjungálása egy $*$-struktúrát ad. A $*$-struktúrával ellátott Hilb-kategória neve H^*-*kategória.* Egy A Hilbert-teret, melynek elemein értelmezett egy

$$\cdot : A \times A \to A$$

asszociatív és az összeadással disztributív szorzás, létezik egységeleme, és egy

$$* : A \to A$$

antilineáris involúció az alábbi tulajdonsággal

$$\langle a \cdot b, c \rangle = \langle b, a^* \cdot c \rangle = \langle a, c \cdot b^* \rangle,$$

H^*-*algebrá*nak hívunk.

A táblázat alapján látható, hogy a kvantummechanikai formalizmus szempontjából oly fontos Hilbert-térnek milyen 'magasabb dimenziós' általánosításait lehet megadni. Ezeken az új tereken történő ábrázolásokról azonban még nagyon keveset tudunk.

2. Univerzális algebra

2.0. Bevezető

Az univerzális algebrában fellépő konstrukciók segítenek pontos matematikai alapot nyújtani a fizikában gyakran intuitíven bevezetett fogalmaknak.

Elsőként tisztázzuk, hogy az univerzális algebrában mi az *algebra* szó jelentése, és megadunk egy módszert, mellyel minden algebrához egy (*kongruencia-*) hálót rendelünk. A későbbiekben ennek a hálónak a segítségével fogalmazzuk meg az *absztrak kvantummechanikai rendszert* tetszőleges algebra esetén.

A második fejezet 'technikai' jellegü, célja a *nemstandard struktúrák* definíciójának előkészítése az *ultraszorzat* segítségével. Látni fogjuk, hogy a nemstandard valós számok miként tartalmaznak (minden pozitív valósnál kisebb) *infinitezimális* mennyiségeket, melyek matematikailag teljesen korrekt nagymértékű általánosításai a fizikában bevezetett dx 'kicsiny' mennyiségeknek. Részletesen megvizsgáljuk a nemstandard természetes számok tulajdonságait, példát adunk olyan, minden standard egésznél nagyobb, 'végtelen' nemstandard a egészre, mely kisebb mint $a + 1$.

A fejezet végén a matematika három különbözőnek tűnő területe közti hasonlóságot vizsgáljuk meg: a *logiká*hoz közel álló *Boole-algebrá*kat, speciális tulajdonságokkal rendelkező gyűrűket és bizonyos topologikus tereket. Megadunk pontos konstrukciókat, melyek segítségével ezen elméletek speciális ágai azonosíthatók, vagyis egy logika miként feleltethető meg topologikus térnek és viszont, egy topológikus térhez miként rendelhető egy speciális gyűrű és egy logika típus.

Végül ismertetjük az univerzális algebrában sokat használt *Boole-hatvány* fogalmát, ami a későbbiekben alapja lesz a *mérés* matematikai megfogalmazásának, ugyanis bizonyos szinten leírja a *klasszikus-* és a *kvantumlogika* 'kölcsönhatását'.

Az univerzális algebrából és a nemstandard analízisből itt szereplő tételek bizonyításai az alábbi helyeken találhatók meg:

Irodalom

[Bur] S. Burris, H. P. Sankappanavar:*Bevezetés az univerzális algebrába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[Coh] P. M. Cohn:*Universal Algebra.* Reidel, 1981.

[Grä] G. Grätzer:*Universal Algebra.* Springer, 1979.

[Jón] B. Jónsson:*Topics in Universal Algebra.* Springer, 1972.

[HII] Hajnal Andréka, István Németi, Ildikó Sain: *Universal Algebraic Basics for Algebraic Logic* 1994, preprint.

[Rob] Abraham Robinson: *Nonstandard Analysis, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland, 1966.

[Mar] Martin Davis:*Applied Nonstandard Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1977.

[HL] A. E. Hurd, P. A. Loeb:*An introduction to nonstandard real analysis.* Academic Press, 1982.

[LS] W. Luxemburg, K. Stroyan:*Introduction to the theory of infinitesimals.* Academic Press, 1976.

2.1. Algebra definíciója

Az algebra szónak a matematikában többféle jelentése van, az alább megadandó algebra definíció, mint látni fogjuk, magába foglalja a legtöbb közismert algebrai struktúrafajtát. Durván szólva algebrának hívnak egy halmazt a rajta értelmezett relációkkal és függvényekkel együtt. Ha a halmazon csak relációk vannak értelmezve, akkor $\mathcal{R}$-típusú (reláció) algebráról beszélünk, ha csak függvények, akkor $\mathcal{F}$-típusú (függvény) algebráról. Mi az utóbbiakkal foglalkozunk részletesen, és a félreérthetőség veszélye nélkül a továbbiakban az $\mathcal{F}$-típusú algebra kifejezés helyett gyakran csak algebrát használunk.

2.1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{F}$ nem üres halmaz, és legyen adott egy $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{N}_0$ leképzés. Ekkor az $(\mathcal{F}, \mu)$-párt *algebratípus*nak nevezzük. Ha $\mu(f) = n$, akkor azt mondjuk, hogy f egy *n-változós függvényjel.*

2.1.2. Definíció. Legyen $(\mathcal{F}, \mu)$ egy algebratípus. $\boldsymbol{A} = \langle A, F, \phi\rangle$ hármast $(\mathcal{F}, \mu)$-*típusú algebrának* hívjuk, ha

(1) A nemüres halmaz.
(2) F halmaz, melynek minden $g \in F$ eleméhez létezik $n \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$g : A^n \to A$$

függvény. Vagyis F elemei véges sok változós függvények egy halmaza.
(3) Ha $f \in \mathcal{F}$ egy n-változós függvényjel, akkor egyértelműen hozzárendelhető egy F-beli n-változós függvény injektív módon:

$$\phi : \mathcal{F} \to F.$$

Továbbiakban használunk egy új jelölést: f^A legyen f-nek μ általi képe: $f^A = \mu(f)$.

Az A halmazt *alaphalmaz*nak hívjuk, F elemeit pedig az *algebra alapműveleteinek.*

Az ötletet, hogy ilyen általánosan értelmezzünk egy algebrát, a klasszikus algebra más-más ágaiban (csoportelméletben, gyűrűelméletben,...stb.) felbukkanó hasonló típusú tételek adták. (Pl.: Ezek mindegyikében találtak homomorfizmus- és izomorfizmus-tételeket, melyek szerkezetükben meglepő módon azonosak voltak.) Az előbb definiált tágas algebrafogalom segítségével egységesen kezelhetővé váltak az eddigi algebrai struktúrák, letisztult formában kaptunk vissza tételeket, melyeket egy felbukkanó teljesen új struktúra esetén is tudunk alkalmazni.

A csoportelméletben Galois fedezte fel a normális részcsoport fogalmát, amely alapvetőnek bizonyult a homomorfizmus- és izomorfizmus-tételeknél. Ezen tételek gyűrűelméleti megfelelőiben a Dedekind által bevezetett ideálok játszanak hasonló szerepet. Most megadjuk e fogalom az univerzális algebrai megfelelőjét, a kongruenciát.

2.1.3. Definíció. Legyen $\boldsymbol{A}$ egy $(\mathcal{F}, \mu)$ típusú algebra, ϑ pedig A-nak egy ekvivalenciarelációja. Azt mondjuk, hogy ϑ *kongruenciája* $\boldsymbol{A}$-nak, ha eleget tesz a *kompatibilitási feltételnek*: Ha $f \in \mathcal{F}$ egy n változós függvényjel, és $a_i, b_i \in A$ úgy, hogy $a_i \vartheta b_i$ $i = 1, ..., n$ akkor:

$$f^A(a_1, ..., a_n) \vartheta f^A(b_1, ..., b_n).$$

Ellenőrizhető, hogy a bevezetett kongruenciafogalom csoport esetében a normálosztót, gyűrű esetében pedig az ideált jelenti. A kongruenciák segítségével nyerhetünk új faktoralgebrákat a régiből. A kongruenciarelációk halmazát könnyen felruházhatjuk hálóstruktúrával.

2.1.4. Definíció. Legyen r_1 és r_2 két ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor $r_1 \circ r_2$ *relációszorzatot* a következő módon értelmezzük:
$a, b \in A$ -ra $\langle a, b \rangle \in r_1 \circ r_2$ pontosan akkor, ha $\exists c \in A$ melyre $\langle a, c \rangle \in r_1$ és $\langle c, b \rangle \in r_2$teljesül.

2.1.5. Definíció. Az $\boldsymbol{A}$ elgebra *kongruenciahálója* az a háló, melyenek tartóhalmaza $\boldsymbol{A}$ kongruenciarelációiból áll, a műveletek pedig:
$\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 = \vartheta_1 \cap \vartheta_2$
$\vartheta_1 \vee \vartheta_2 = \vartheta_1 \cup (\vartheta_1 \circ \vartheta_2) \cup (\vartheta_1 \circ \vartheta_2 \circ \vartheta_1) \cup (\vartheta_1 \circ \vartheta_2 \circ \vartheta_1 \circ \vartheta_2) \cup ...$
A kongruenciaháló jele **Con** $\boldsymbol{A}$.

Az $\boldsymbol{A}$ algebra *kongruencia-disztributív* (*kongruencia-moduláris*), ha **Con** $\boldsymbol{A}$ disztributív (moduláris) háló. Az $\boldsymbol{A}$ algebra *kongruencia-felcserélhető*, ha:

$$\forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathrm{Con}\boldsymbol{A} \text{ esetén } \vartheta_1 \circ \vartheta_2 = \vartheta_2 \circ \vartheta_1$$

.

Megjegyzés.

(1) Birkhoff tétel: Ha $\boldsymbol{A}$ kongruencia-felcserélhető, akkor $\boldsymbol{A}$ kongruencia-moduláris.
(2) Minden háló kongruencia-disztributív.
(3) Minden csoport, kvázicsoport és gyűrű kongruencia-felcserélhető.
(4) **Con** $\boldsymbol{A}$ algebrai háló.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon mindegyik algebrai háló előáll-e bizonyos algebrák kongruenciahálójaként. 1963-ban Grätzer és Schmidt bizonyította, hogy igen. Azonban ha megköveteljük, hogy az algebrában csak egy alapművelet legyen, akkor már nem igaz az állítás (McKenzie-tétele).

2.2. Direkt szorzat és Łos-féle ultraszorzat

Egy olyan eljárást mutatunk be, mely struktúrák egy halmazából egyetlen struktúrát állít elő, mégpedig úgy, hogy az eredmény valamilyen értelemben tükrözi a kiindulási struktúrák leggyakrabban előforduló tulajdonságait. Az eljárás az ultraszorzat képzés. Csírái már T. Skolem 30-as években megjelent munkájában megtalálhatók, de a módszer általánosan ismertté csak J. Łos 1955-ben megjelent dolgozata nyomán vált. Ahhoz, hogy az ultraszorzatot megértsük, előbb az algebrák direkt szorzatát kell definiálni, majd ennek a 'faktorizálásával' kapjuk az ultraszorzatot.

2.2.1. Definíció. Legyenek $\xi \in I$-re $\boldsymbol{A}_\xi$-k közös $(\mathcal{F}, \mu)$ típusú struktúrák. Az $\boldsymbol{A}_\xi$-k *direkt szorzatán* azt a $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi$-vel jelölt $(\mathcal{F}, \mu)$ típusú $\boldsymbol{B}$ struktúrát értjük, amiben

(1) az alaphalmaz $B = \prod_{\xi \in I} A_\xi$, vagyis az alaphalmazok Descrates-szorzata,
(2) az n-változós $f \in \mathcal{F}$ függvényjel interpretáltja az a függvény, melynek ξ-edik koordinátája éppen f-nek $\boldsymbol{A}_\xi$-beli interpretáltja, azaz minden $a_1, ..., a_n \in B$ esetén, ha $a_i(\xi)$ jelöli a_i-nek a ξ-edik koordinátáját, akkor

$$\big(f^{\boldsymbol{B}}(a_1, ..., a_n)\big)(\xi) = f^{\boldsymbol{A}_\xi}\big((a_1(\xi), ..., a_n(\xi))\big).$$

A direkt szorzat konstrukció gyakran előfordul alkalmazásoknál, azonban könynyen megadható két algebra és egy formula, úgy, hogy mindkét algebrában igaz a formula, azonban direkt szorzatukban már nem! Vagyis ami igaz a szorzat tagjaira, már nem biztos, hogy igaz a szorzatukra. A továbbiakban megmutatjuk, hogyan lehet a direkt szorzatot úgy módosítani, hogy ilyen formula ne létezhessen, előbb azonban előkészítjük az ultraszorzat definícióját.

2.2.2. Definíció. Egy nemüres X halmaz részhalmazainak $U \subset \mathcal{P}(X)$ redszere *szűrő* (*filter*), ha

(1) U nem üres, és az üres halmaz nem eleme,
(2) *felszálló*, azaz $A \in U$ és $A \subset B \subset X$ esetén $B \in U$,
(3) *metszetre zárt*, azaz $A, B \in U$ esetén $A \cap B \in U$.

$U \in \mathcal{P}(X)$ *ultraszűrő*, ha szűrő, és még a következő feltételt is teljesíti:

(4) minden $A \subset X$-re vagy $A \in U$ vagy $X\ A \in U$.

Az X részhalmazainak egy $F \subset \mathcal{P}(X)$ rendszere *véges metszet tulajdonságú* vagy másképp *centrált*, ha véges sok F-beli halmaz metszete nem üres.

Tetszőleges X halmazra szűrő az egyelemű X rendszer is, általában $\emptyset \neq A \subset X$ mellett a

$$\{B \subset X | A \subset B\}$$

halmazrendszer. Az ilyen alakú szűrőket *főszűrőknek* vagy *triviális szűrőknek* nevezzük. Egy főszűrő nyilván akkor ultraszűrő, ha A egyelemű. Nem ilyen alakú ultraszűrőket az alábbi lemma alapján kaphatunk.

Lemma. *Legyen X nemüres halmaz, és $F \subset \mathcal{P}(X)$ véges metszet tulajdonságú. Ekkor F kiterjeszthető ultraszűrővé.*

Belátható, hogy véges halmazon minden ultraszűrő főszűrő. Egészen más a helyzet végtelen alaphalmaz esetén.

Lemma. *Minden végtelen X halmazon létezik olyan $U \subset \mathcal{P}(X)$ ultraszűrő, ami nem főszűrő.*

Bizonyítás:. Álljon F az X-nek azokból a részhalmazaiból, melyek komplementuma véges. F-nek az üres halmaz nem eleme, metszetre zárt, és így véges metszet tulajdonságú. Az előző lemma alapján kiterjeszthető egy U ultraszűrővé. Ha most U főszűrő lenne, akkor valamely $a \in X$-re $a \in U$. De ez nem lehet, mivel $X \setminus \{a\} \in F$.

A véges komplementerű halmazok rendszere mellett van egy másik fontos véges metszet tulajdonságú halmazrendszer, amit használni fogunk. Legyen X végtelen halmaz, $[X]^{<\omega}$ jelöli X véges részhalmazainak rendszerét:

$$[X]^{<\omega} = \{A \subset X| \quad |A| < \omega\}.$$

Az alaphalmaz, aminek részhalmazai alkotják a rendszert, $[X]^{<\omega}$. Minden egyes $a \in X$-re legyen $\hat{a}$ az $[X]^{<\omega}$-nak a következő része:

$$\hat{a} = \{A \in [X]^{<\omega} | a \in A\}.$$

Az $F = \{\hat{a} | a \in X\} \subset \mathcal{P}([X]^{<\omega})$ véges metszet tulajdonságú.

Most rátérünk a direkt szorzat módosítására. Legyen U egy ultraszűrő az I indexhalmazon, és jelölje $\boldsymbol{B}$ az $\boldsymbol{A}_\xi$ struktúrák $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi$ direkt szorzatát. Definiáljuk B-n a $\approx$ kétváltozós relációt a következőképpen: $a, b \in B$-re $a \approx b$, ha

$$\{\xi \in I | a_\xi = b_\xi\} \in U.$$

Világos, hogy ez a reláció szimmetrikus és $I \in U$ miatt reflexív is. A tranzitivitás abból adódik, hogy U szűrő, s így két elemével együtt azok metszeténél bővebb halmazokat is tartalmazza. Ezért $\approx$ ekvivalenciareláció, jelölje $a \in B$ ekvivalencia osztályát $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \{b \in B | a \approx b\}.$$

2.2.3. Definíció. Legyenek $\xi \in I$-re $\boldsymbol{A}_\xi$-k közös $(\mathcal{F}, \mu)$ típusú struktúrák, U pedig egy ultraszűrő I-n. Jelölje $\boldsymbol{B}$ a $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi$ direkt szorzatot. Az $\boldsymbol{A}_\xi$ *struktúrák U szerinti ultraszorzatán* azt a $\prod \boldsymbol{A}_\xi / U$-val jelölt $(\mathcal{F}, \mu)$ típusú struktúrát értjük, amiben

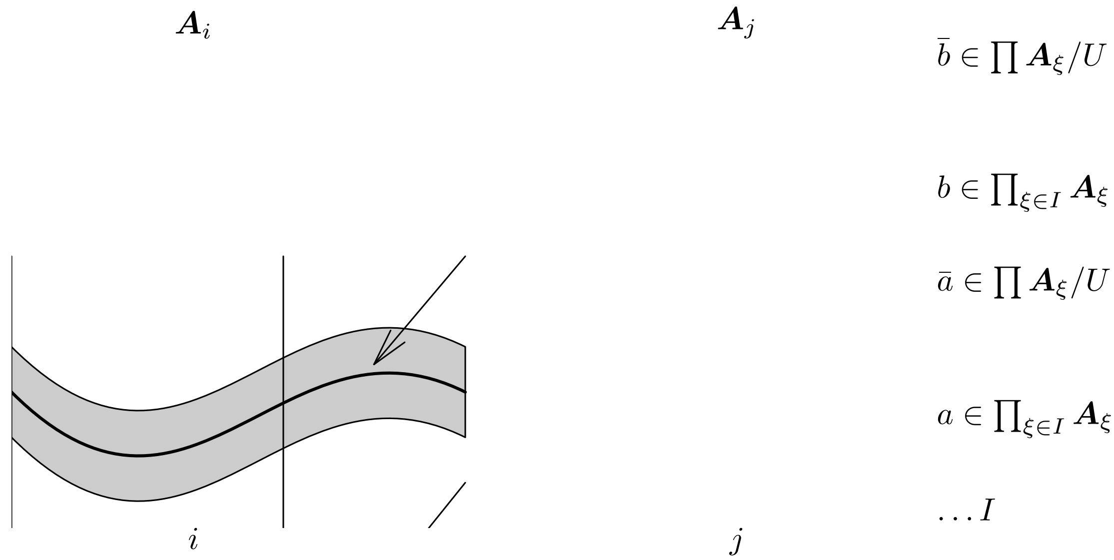
(1) az A alaphalmaz B-nek a fenti $\approx$ szerinti ekvivalenciaosztályaiból áll:

$$A = \{\bar{a} | a \in B\},$$

(2) egy n-változós $f \in \mathcal{F}$ függvényjelre és $a_1, ..., a_n \in B$-re:

$$f^{\boldsymbol{A}}(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = \overline{f^{\boldsymbol{B}}(a_1, ..., a_n)}.$$

Ahhoz, hogy a definíció értelmes legyen, szükséges, hogy a (2) alatt definiált érték független legyen az ekvivalenciaosztályok reprezentánsainak választásától. Ez azonban könnyen igazolható. Az ultraszorzat konstrukciót szemlélteti az alábbi ábra:



Az ultraszorzatok egyik kiemelkedő tulajdonságát ragadja meg az alábbi tétel.

Ultraszorzatok alaptétele. *Minden φ formula pontosan akkor igaz a $\prod \boldsymbol{A}_\xi/U$-struktúrában (azaz $\prod A_\xi/U \models \varphi$), ha:*

$$\{\xi \in I | \boldsymbol{A}_\xi\text{-ban igaz} \quad \varphi\} \in U.$$

Ezzel a tétellel gyakran Łos lemma néven találkozhatunk. Látszik, hogy sikerült célunkat elérni: elkerültük a direkt szorzatnál fellépő kényelmetlenséget, hogy van formula, amely minden struktúrában igaz, de a direkt szorzatban nem. Ultraszorzatnál ha minden $\xi \in I$-re $\boldsymbol{A}_\xi$-ben igaz egy φ formula ($\boldsymbol{A}_\xi \models \varphi$), akkor $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi/U$-ban is igaz φ.

Ha az ultraszorzatban mindegyik $\boldsymbol{A}_\xi$ azonos $\boldsymbol{B}$-vel, akkor $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi/U$ helyett az ${}^I\boldsymbol{B}/U$ jelölést használjuk, és ezt $\boldsymbol{B}$ *ultrahatványának* nevezzük.

Ha U főszűrő, amit például az $\eta \in I$ generál, vagyis $U = \{X \subset I | \eta \in X\}$, akkor $\prod_{\xi \in I} \boldsymbol{A}_\xi/U$ izomorf $\boldsymbol{A}_\eta$-val. Ezért véges sok struktúra ultraszorzata mindig izomorf a tényezők valamelyikével, az ultraszorzat csak nem főszűrők esetén adhat új struktúrát.

2.3. Nemstandard struktúrák

A nemstandard analízis a valósaknál bővebb, infinitezimális és 'végtelen' elemeket is tartalmazó (nem archimédeszi) számtestek tulajdonságaival foglalkozik. Részletesen fogjuk vizsgálni a nemstandard természetes- és valós számokat és egy érdekes kvantummechanikai alkalmazását mutatjuk be a későbbiekben.

2.3.1. Definíció. Legyen F egy olyan ultraszűrő az $\mathbb{N}$ természetes számok halmazán, mely nem főszűrő. Több ilyen szűrő is létezik, ezért a továbbiakban F-et rögzítettnek tekintjük. Egy $\boldsymbol{A}$ algebra F szerinti ultraszorzatát, $\prod \boldsymbol{A}_\xi/F$-t, *nemstandard* $\boldsymbol{A}$ *algebrának* hívjuk és ${}^*\boldsymbol{A}$-val jelöljük.

Példaként vizsgáljuk meg részletesen ${}^*\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}$ közötti különbségeket!

Legyen a_n és b_n két természetes számokból álló sorozat. Az a_n sorozat ugyanazt a nemstandard $u \in^* \mathbb{N}$ elemet reprezentálja mint b_n, jelben $a_n \sim b_n$ ha:

$$\{i | a_i = b_i\} \in F.$$

A sorozatok halmazán $\sim$ ekvivalenciareláció, és a_n ekvivalenciaosztályának a jele $[a_n]$. Könnyen látható, hogy:

$$^*\mathbb{N} = \{[a_n] | a_n \quad \text{természetes számok sorozata.}\}.$$

Az ulraszorzat jóldefiniált, ami a jelen esetben azt jelenti, hogy az összeadás, szorzás és a rendezés ${}^*\mathbb{N}$-en kompatibilis a $\sim$-relációval:

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$$
$$[a_n][b_n] = [a_n b_n]$$
$$[a_n] < [b_n] \iff a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Az $[a_n] \in^* \mathbb{N}$ írásmódból elhagyva a sorozatra és ekvivalenciaosztályra utaló jeleket, röviden csak $a \in^* \mathbb{N}$ jelölést alkalmazzuk.

Az $\mathbb{N}$ halmaz beágyazható ${}^*\mathbb{N}$-be, mint konstans sorozat, az $x \in \mathbb{N}$ elem beágyazás utáni képét szintén x-szel jelöljük, a beágyazás értékkészletét $\mathbb{N}$-nel. Azok a nemstandard természetes számok, melyek nem egy konstans sorozat ekvivalenciaosztályát reprezentálják, az ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ halmazban vannak.

Megjegyzés. Minden struktúra elemien beágyazható az ultrahatványába.

Állítás. *Ha* $u \in^* \mathbb{N}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *akkor* $n < u$.

Ez az állítás motiválja az alábbi definíciót.

2.3.2. Definíció. Ha $x \in^* \mathbb{N}$, azt modjuk, hogy x *véges*, ha $x \in \mathbb{N}$, egyébként x *végtelen.*

A végtelen elemek tulajdonságait jól kifejezi a következő tétel.

Tétel. *Legyen u végtelen, ekkor az u-hoz tartozó 'blokk'*

$$\cdots < u-3 < u-2 < u-1 < u < u+1 < u+2 < u+3 \ldots$$

elemei végtelenek és nem létezik olyan $v \in^* \mathbb{N}$*, melyre*

$$u < v < u + 1$$

igaz. Legyen $w = u + u$, akkor a w-hez tartozó blokk elemei nagyobbak az u blokk elemeinél.

Az ${}^*\mathbb{N}$ halmaz tartalmazza $\mathbb{N}$-et mint kezdőrészt és blokkok rendezett halmazát. A blokkok halmaza sűrűn rendezett, nincs legkisebb és legnagyobb eleme. Minden blokk rendezés-izomorf az egészek halmazával.

A nemstandard természetes számokhoz hasonlóan definiálhatjuk az ${}^*\mathbb{R}$ *nemstandard valósakat*, másnéven a *hipervalós számokat*, valamint a ${}^*\mathbb{C}$ *hiperkomplex számokat*. A fenti megjegyzés értelmében $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) beágyazható ${}^*\mathbb{R}$-be (${}^*\mathbb{C}$-be), de a beágyazás utáni képeket jelben nem különböztetjük meg a standard struktúrák jelétől.

Tétel. ${}^*\mathbb{C}$ *test és* ${}^*\mathbb{R} \subset^* \mathbb{C}$ *rendezett résztest.*

2.3.3. Definíció. ${}^*\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}$ (${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$) elmeit *nemstandard komplex* (*valós*) *számoknak* hívjuk, $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) elemeit *standard komplex* (*valós*) *számoknak.*

A ${}^*\mathbb{C}$ halmazon a komplex konjugálás és az abszolútérték-képzés a sorozatok nyelvén az

$$[a_n]^* = [a_n^*]$$
$$|[a_n]| = [|a_n|]$$

összefüggésekkel adhatók meg.

2.3.4. Definíció. Egy $x \in^* \mathbb{C}$ elem
- *infinitezimális*, ha $|x| < a$ minden $a \in \mathbb{R}^+$ esetén,
- *véges*, ha $|x| < a$ valamely $a \in \mathbb{R}^+$ elemre,
- *végtelen*, ha nem infinitezimális és nem véges.

Az infinitezimális elemek halmazának jele Mon(0), az $A \subseteq^* \mathbb{C}$ halmaz végtelen elemeit A_∞ szimbolummal jelöljük. Például az $a_n = n$ sorozat egy végtelen nemstandard elemet reprezentál, a $b_n = 1/n$ sorozat egy infinitezimálisat.

Tétel. *Minden véges $x \in^* \mathbb{C}$ elem egyértelműen felírható $x = a + \varepsilon$ alakban, ahol $a \in \mathbb{C}$ és $\varepsilon \in$Mon(0). Az a számot x standard-, ε-t az x infinitezimális részének nevezzük.*

Elterjedt az $a = x^\circ$ vagy $a = st(x)$ jelölés.

Lemma. *Legyenek x, y infinitezimális, u, v véges elemek akkor*

(1) $x + y, xy \in$*Mon(0),*
(2) $(u + v)^\circ = u^\circ + v^\circ$,
(3) $(uv)^\circ = u^\circ v^\circ$,
(4) $u \leq v$ *akkor és csak akkor, ha* $u^\circ \leq v^\circ$.

Legyen $A \subseteq \mathbb{C}$, ekkor definiáljuk az ${}^*A \subseteq^* \mathbb{C}$ nemstandard halmazt:

$${}^*A = \{[a_n] \in^* \mathbb{C} | a_n \in A \quad \forall n\}.$$

Az $f : A \to \mathbb{C}$ függvény kiterjesztése legyen:

$$^*f :^* A \to^* \mathbb{C} \quad ^*f([a_n]) = [f(a_n)].$$

Az ilyen alakú $^*f$ függvényeket *standard függvényeknek* nevezzük. Ezeknek a differenciálszámítása értelmezhető a Leibniz-féle infinitezimális módszerrel.

Például, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f(x) = x^2$, akkor $^*f(x) = x^2$ és

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx,$$

ahol $dx \in$Mon(0). A derivált ekkor $2x+dx$ standard része (mely egyértelmű!), azaz $2x$. A példa érzékelteti a módszer lényegét, de ennél mélyebb tételek szükségesek az elmélet kidolgozásához.

Látható, hogy a $^*\mathbb{R}$ bővebb mint $\mathbb{R}$, azonban ismeretes, hogy $\mathbb{R}$-et modellelméleti szempontból egyértelműen meghatározzák alábbi tulajdonságai: archimédeszi rendezett kommutatív test, mely valósan zárt (azaz a -1 nem áll elő két négyzetszám öszegeként, bármely számra vagy ő vagy az ellentettje négyzetszám és minden páratlan fokú polinomnak van gyöke). Ezen tulajdonságok közül csak az archimédeszi axióma (vagyis, hogy minden pozitív elem kisebb az 1,1+1,1+1+1,... elemek valamelyikénél) nem teljesül $^*\mathbb{R}$-ben. Az archimédeszi tulajdonság nem axiomatizálható (pontosabban az archimédeszi testek osztálya nem axiomatizálható).

Az archimédeszi tulajdonság elhagyásával találtunk olyan struktúrát, mely hasonló a standard valós számokhoz, de léteznek benne infinitezimális mennyiségek. Sőt nagyon sokféle végtelen számosságú $\mathbb{R}$-hez hasonló testet adhatunk meg, azáltal, hogy az F ultraszűrőt különböző végtelen számosságú halmazokon adjuk meg. Ennek a felfedezésnek nagy jelentősége van a fizika olyan területein, ahol a infinitezimális és végtelen mennyiségekkel számolnak.

Nagy kihívást jelent a kvantummechanikai perturbációszámítás és a részecskefizikában megjelenő végtelen sajátenergiák egzakt matematikai kidolgozása a nemstandard analízis segítségével. Ezek még megoldatlan problémák, de máris sok kisérleti megfigyelést sikerült elegáns, korrekt módon megmagyarázni az új számtestet véve alapul.

2.4. Boole-algebrák és topologikus terek kapcsolata, Boole-hatvány

Amikor a Boole-algebrákat fogjuk általánosítani, a Boole-hálók szabályait gyengítjük. A Boole-algebrákra mint speciális hálókra gondolunk. Stone fedezte fel, hogy a Boole-algebrák nagyon szoros kapcsolatban állnak a Boole-gyűrűkkel, valamint bizonyos tulajdonságú topologikus terekkel. Ezeket a kapcsolatokat vizsgáljuk most meg, így lehetőségünk lesz, hogy a matematika más-más területein jelentkező struktúrákat a Boole-algebrák különböző megjelenésének tekintsük.

2.4.1. Definíció. $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ *Boole-algebra*, ha két művelete binér, egy unér, a további kettő pedig 0-változós művelet, úgy, hogy az alábbiak teljesülnek:

(1) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$;
(2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
(3) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$;
(4) $x = x \vee (x \wedge y)$, $x = x \wedge (x \vee y)$;
(5) $x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(6) $x \wedge 0 = 0$ és $x \vee 1 = 1$;
(7) $x \wedge x' = 0$ és $x \vee x' = 1$.

2.4.2. Definíció. Az $\boldsymbol{R} = \langle R, +, *, -, 0, 1\rangle$ gyűrű *Boole-gyűrű*, ha kielégíti az

$$x * x = x$$

azonosságot.

Lemma. *Ha $\boldsymbol{R}$ Boole-gyűrű, akkor kielégíti az*

$$x + x = 0 \qquad x * y = y * x$$

azonosságokat.

Most következik Stone tétele, mellyel azonosítani lehet a Boole-algebrákat a Boole-gyűrűkkel.

Stone tétele.

(1) *Legyen $\boldsymbol{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ Boole-algebra; jelölje $\boldsymbol{B}^{\otimes}$ azt a $\langle B, +, *, -, 0, 1\rangle$ algebrát, melyben*

$$\begin{aligned} a + b &:= (a \wedge b') \vee (a' \wedge b), \\ a * b &:= a \wedge b, \\ -a &:= a. \end{aligned}$$

Ekkor $\boldsymbol{B}^{\otimes}$ Boole-gyűrű.

(2) *Legyen $\boldsymbol{R} = \langle R, +, *, -, 0, 1\rangle$ Boole-gyűrű; jelölje $\boldsymbol{R}^{\otimes}$ azt a $\langle R, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ algebrát, amelyben*

$$\begin{aligned} a \vee b &:= a + b + a * b, \\ a \wedge b &:= a * b, \\ a' &:= 1 + a. \end{aligned}$$

Ekkor $\boldsymbol{R}^{\otimes}$ Boole-algebra.

(3) *A $\boldsymbol{B}$-re és $\boldsymbol{R}$-re:*

$$(\boldsymbol{B}^{\otimes})^{\otimes} = \boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{R}^{\otimes})^{\otimes} = \boldsymbol{R}.$$

A Boole-algebrák és a topologikus terek kapcsolatának a megértéséhez szükség van a szűrő és az ideál fogalmára.

2.4.2. Definíció. A $\boldsymbol{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ Boole-algebra I részhalmaza *ideál*, ha
(1) $0 \in I$,
(2) Ha $a, b \in I$ akkor $a \vee b \in I$,
(3) Ha $a \in I$ és $b \leq a$ akkor $b \in I$.

B egy F részhalmazát *szűrő*nek nevezzük $\boldsymbol{B}$-ben, ha
(1) $1 \in F$,
(2) Ha $a, b \in F$ akkor $a \wedge b \in F$,
(3) Ha $a \in F$ és $b \geq a$ akkor $b \in F$.

Az ideál itteni definíciója összhangban van a gyűrűelméletben megszokott definícióval:

Tétel. *Legyen $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra. Az I részhalmaz pontosan akkor ideál $\boldsymbol{B}$-ben, ha I ideál $\boldsymbol{B}^{\otimes}$-ben.*

2.4.3. Definíció. Ha $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra, és $X \subseteq B$, legyen

$$X' = \{a' | a \in X\}.$$

A következő állítás szerint a szűrők és ideálok párban jelentkeznek.

Tétel. *Legyen $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra, ekkor*
(1) *$I \subseteq B$-re I pontosan akkor ideál, ha I' szűrő.*
(2) *$F \subseteq B$-re F pontosan akkor szűrő, ha F' ideál.*

2.4.4. Definíció. Legyen F szűrő (I ideál) $\boldsymbol{B}$-ben. F *ultraszűrő* (I *maximális ideál*), ha minden $a \in B$-re a és a' közül pontosan az egyik eleme F-nek (I-nek).

Stone-dualitásnak nevezzük majd azt a dualitást, amelyet Stone állapított meg a Boole-algebrák és bizonyos topologikus terek között. Egy topologikus tér valamely részhalmazát *zártnyílt*nak fogjuk hívni, ha a halmaz egyidejűleg zárt és nyílt.

2.4.5. Definíció. Egy topologikus teret *Boole-tér*nek nevezünk, ha
(1) Hausdorff-féle,
(2) kompakt,
(3) létezik zártnyílt halmazokból álló bázisa.

2.4.6. Definíció. Legyen $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra. Értelmezzük a $\boldsymbol{B}^*$ topologikus teret a következőképpen: alaphalmazának elemei $\boldsymbol{B}$ ultraszűrői, topológiáját pedig az

$$N_a = \{U \in \boldsymbol{B}^* | a \in U\} \qquad a \in B$$

halmazokból álló szubbázis határozza meg.

Állítás. *Ha $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra és $a, b \in B$, akkor*

$$N_a \cup N_b = N_{a \vee b}$$
$$N_a \cap N_b = N_{a \wedge b}$$
$$N_{a'} = (N_a)'$$

2.4.7. Definíció. Ha X topologikus tér, akkor jelölje X^* a $\mathcal{P}(X)$-nek azt a részalgebráját, amelynek tartóhalmaza éppen X zártnyílt részhalmazaiból áll.

Stone tétele. *Legyen* $\boldsymbol{B}$ *Boole-algebra, ekkor*

(1) $\boldsymbol{B}^*$ *Boole-tér és* $\boldsymbol{B}$ *izomorf* $(\boldsymbol{B}^*)^*$*-gal; az*
$$a \mapsto N_a$$
leképzés izomorfizmus $\boldsymbol{B}$*-ből* $(\boldsymbol{B}^*)^*$*-ba.*

(2) *Ha* X *Boole-tér, akkor* X^* *Boole-algebra és* X *homeomorf* $(X^*)^*$*-gal; ekkor az*
$$x \mapsto \{N \in X^* | x \in N\}$$
leképzés homeomorfizmus X*-ből* $(X^*)^*$*-ba.*

Stone valójában még tovább is ment, és összefüggéseket állapított meg az alábbi párokra:

$$\begin{aligned} \text{Boole-algebrák} &\longleftrightarrow \text{Boole-terek} \\ \text{szűrők} &\longleftrightarrow \text{zárt részhalmazok} \\ \text{ideálok} &\longleftrightarrow \text{nyílt részhalmaok} \\ \text{homomorfizmusok} &\longleftrightarrow \text{folytonos leképzések.} \end{aligned}$$

Megjegyzés.

(1) Egy véges topologikus tér pontosan akkor Boole-tér, ha diszkrét (azaz minden részhalmaza nyílt).

(2) Tetszőleges I halmazra $(\mathcal{P}(I))^*$ megegyezik a diszkrét I tér Stone-Čech-féle kompaktifikációjával.

(3) Egy $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra atomjainak a $\boldsymbol{B}^*$ tér izolált pontjai felelnek meg.

A Stone-tétel nagyszerűsége abban rejlik, hogy látszólag két különböző matematikai struktúráról bizonyítja, hogy egymás duálisai.

Probléma. Felmerül a kérdés, hogyan lehet a Boole-tereket általánosítani úgy, hogy duálisuk szintén hálónak feleljen meg valamilyen értelemben. Létezik-e a Stone-tételnek általánosítása?

A Boole-algebrák segítenek egy már meglévő $\boldsymbol{A}$ algebrából új algebrát nyerni, a Boole-hatvány konstrukció segítségével. Ennek eredete Arens és Kaplansky egy 1948-as cikkére nyúlik vissza, ugyanakkor hasonlók már Gelfand korábbi munkáiban is fellelhetők. Arens és Kaplansky gyűrűkre használta a konstrukciót, majd 1953-ban Foster általánosította tetszőleges algebrákra. Főleg univerzális algebrai alkalmazásokban szerepel a Boole-hatvány, de a *mérés, műszer, kísérlet* fizikai fogalmak formalizálása is ezen a konstrukción alapul.

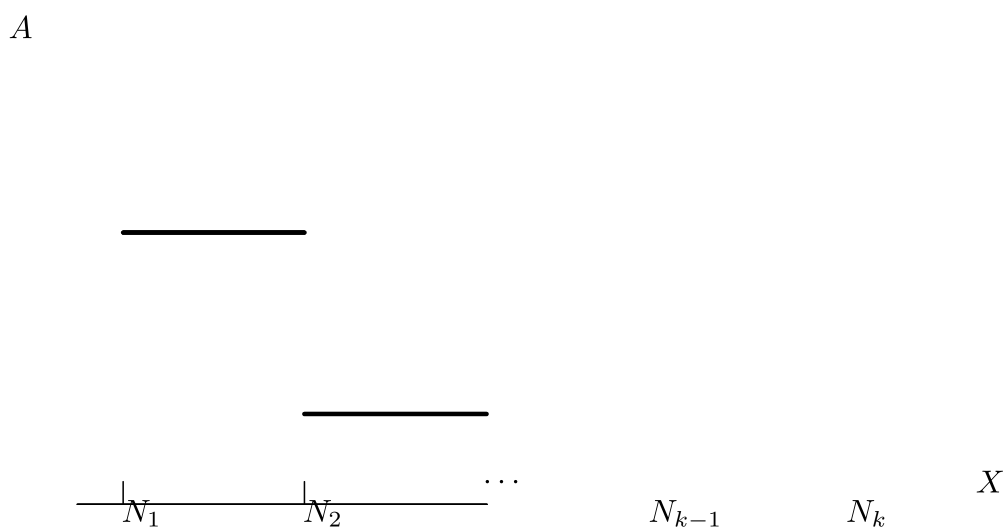
2.4.8. Definíció. Legyen $\boldsymbol{B}$ Boole-algebra, $\boldsymbol{A}$ pedig tetszőleges algebra. Tekintsük A-t a diszkrét topologiával ellátott topologikus térnek. Jelölje $A[\boldsymbol{B}]^*$ a $\boldsymbol{B}^*$-ból az A-ba képző folytonos függvények halmazát.

Lemma. *A fenti* $\boldsymbol{A}$*-ra,* $\boldsymbol{B}$*-re valamint* $X = \boldsymbol{B}^*$*-ra értelmezett* $A[\boldsymbol{B}]^*$ *halmaz egy* $\boldsymbol{A}^X$*-beli részalgebra tartóhalmaza.*

2.4.9. Definíció. Legyen $\boldsymbol{A}$ tetszőleges algebra, $\boldsymbol{B}$ pedig Boole-algebra. Legyen $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}]^*$ az a részalgebra $\boldsymbol{A}^X$-ben ($X = \boldsymbol{B}^*$), melynek tartóhalmaza $A[\boldsymbol{B}]^*$. Az $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}]^*$ algebra az $\boldsymbol{A}$ *algebra* $\boldsymbol{B}$ *szerinti* (*korlátos*) *Boole-hatványa.*

Nézzük meg az előző lemma bizonyítását, az ábra seg´ itségével, mely rávilágít a Boole-hatvány értelmezésére!

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $c_1, ..., c_n \in A[\boldsymbol{B}]^*$. Az X kompaktsága miatt mindegyik c_i értékkészlete véges, és bármely $a \in A$-ra $c_i^{-1}(a)$ zártnyílt részhalmaz X-ben. $A[\boldsymbol{B}]^*$ tetszőleges elemét tehát olyan lépcsős függvénynek képzelhetjük, amelynek véges sok lépcsője van, és minden lépcsőfok egy zártnyílt N_i halmaz felett helyezkedik el. Ha $\boldsymbol{A}$ típusa $\mathcal{F}$, akkor feltehetjük, hogy $N_1, .., N_k$ az X-nek egy zártnyílt halmazokból álló partíciója, és minden i-re és j-re c_i konstans az N_j halmazon. Világos, hogy ekkor $f(c_1, ..., c_n)$ is konstans mindegyik N_j-n, következésképpen $f(c_1, ..., c_n) \in A[\boldsymbol{B}]^*$. QED.



Tétel. *A Boole-hatványokra érvényesek az alábbiak:*

(1) *Ha* $\boldsymbol{B}$ *nemtriviális, akkor* $\boldsymbol{A}$ *beágyazható* $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}]^*$*-ba.*
(2) $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2]^* \cong \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_1]^* \times \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_2]^*$.

A Boole-hatványokat sikerült tovább általánosítani, melynek neve *Boole-szorzat.* A legújabb Boole-típusú konstrukciók egyike a Burris által bevezetett *módosított Boole-hatvány*, mely rendkívül speciális szubdirekt hatvány, de mégsem Boole-szorzatok. Ezek a konstrukciók azonban további mélyebb fogalmakat igényelnek, ezért ezekre nem térünk ki.

3. Kvantumlogika

3.0. Bevezető

A *kvantumlogika* a fizikai *események* logikája. Feladata többek között megfelelő matematikai hátteret biztosítani az események közti 'és', 'vagy', 'nem', 'következik' szavak értelmezéséhez.

Az eseményeket *hálóelemeknek* szokás tekinteni, az előbb felsorolt logikai konnexiókat pedig *hálóműveletek*nek. Ezért elengedhetetlenül fontos a hálók elméletének legalább bevezető szintű tárgyalása a kvantumlogika jobb megértése céljából. Az első és a második fejezetben részletesen foglalkozunk a hálók felépítésével. Szerkezetük alapján különböztetjük meg a hálókat, így definiálunk pl.: disztributív, moduláris, ortmodouláris, ortokomplementumos hálókat. Megadjuk pl. a *modularitás* és a *disztributivitás* Dedekind- és Birkhoff-féle szemléletes jellemzését és sok más tételt, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

A harmadik fejezetben egy speciális hálóval, a *Hilbert-háló*val foglalkozunk, melynek elemei a Hilbert-tér zárt lineáris alterei, a hálóműveletek pedig operátorműveletekkel kifejezhetők. Ez rendkívül fontos a kvantummechanika szempontjából, hiszen itt azonosítjuk az eseményeket a *projektorokkal*.

A negyedik fejezetben egy érdekes esetet tárgyalunk: a *nemstandard Hilbert-terek* eseményhálóját vizsgáljuk meg. Látni fogjuk, hogy pusztán az a tény, hogy kontinuumnál nagyobb számosságú test feletti Hilbert-térrel foglalkozunk, alapvetően megváltoztatja a Hilbert-hálók szerkezetét. Egy ilyen érdekesség például, hogy míg a valós vagy komplex számtest feletti szeparábilis Hilbert-tér projektor-hálóján egy esemény *ellentetjének* a tagadása megegyezik az eseménnyel, addig nemstandard komplexek feletti Hilbert-hálón már csak annyit mondhatunk, hogy az esemény kétszeres tagadásából *következik* maga az esemény; de egy esemény bekövetkezéséből nem következik, hogy az esemény ellentetjének az ellentettje bekövetkezne. Ilyen és ehhez hasonló érdekességekre adunk konkrét példákat a negyedik fejezetben. A fejezet végén általánosabban közelítjük meg a Hilbert-terek eseményhálóját, kilépünk a nemstandard komplex számok köréből, és tetszőleges számosságú testre felépített Hilbert-hálók szerkezetét elemezzük.

Az ötödik fejezetben a *C^*-algebrákkal* és a *Neumann-hálók*kal foglalkozunk. Ismertetjük, hogyan lehet szép tulajdonságú topologikus tereket egyértelműen megfeleltetni kommutatív C^* algebráknak és viszont. Ennek alapján leírunk egy szótárat, mely a topológiában gyakran használatos fogalmakat a C^*-algebák nyelvére fordítja.
A *Neumann-hálók* bizonyos értelmű általánosításai a *Hilbert-hálók*nak. Így tehát az események hálójának tekinthetjük ezeket, többek között ezért is fontos a vizsgálatuk. Megadjuk a Neumann-hálók főbb típusait, és az osztáyozásukról szóló tételt is megemlítjük. A részecskefizikában használatos *Grassmann-algebrá*k segítségével adunk példát a legösszetettebb, III_λ típusú Neumann-hálókra.

A hatodik fejezetben az implikációval, azaz a következtetéssel foglalkozunk részletesen. Első ránézésre talán nem tűnik nehéznek pontosan megadni, hogy mit jelent az 'a-ból következik b' kijelentés, de amint kilépünk a *Boole-logika* keretei közül máris elbonyolódik a helyzet. Különösen nehezíti az implikáció megadását az a tény, hogy míg az 'a esemény vagy b esemény' kifejezés értéke tekinthető események, addig az 'a-ból következik b' kijelentés már nem esemény. Ezek ellenére megadunk egy implikációt, mely egyértelműen létezik bizonyos hálókon, azonban a 'szokásos' implikációnál gyengébb feltételeket teljesít csak. Ezt fogjuk *kvantumimplikációnak* hívni. Egyik érdekessége, hogy nem tranzitív, vagyis az 'a-ból következik b ' és a 'b-ből következik c' állításokból nem következik az 'a-ból következik b' kijelentés. Ezenkívül egyéb érdekes tulajdonságai vannak a kvantumimplikációnak, melyeket részletesen megvizsgálunk. A kvantummechanikában paradoxonnak tűnő tények nagy részét valószínüleg azért tartjuk paradoxonoknak, mert a 'szokásos' implikációval gondolkodunk, és nem vesszük figyelembe, hogy kvantumos esetben már megváltoznak a logikai konnexiók.

Irodalom

[Bran] Robert Brandom:*Semantic Paradox of Material Implication*
Notre Dame Journal of Formal Logic, 22. kötet, 2. szám
129-132., 1981., április.

[Bur] S. Burris, H. P. Sankappanavar:*Bevezetés az univerzális algebrába*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[Gud1] Stanley Gudder:*Event Structures in Nonstandard Quantum Mechanics*
Journal of Mathematical Physics, 1997, 6332-6343.

[Gud2] S. Gudder:*Nonstandard Scalar Quantum Field*
Journal of Mathematical Physics, **35.**, 3817-3844, 1994.

[Har1] Gary. M. Hardegree:*Material Implication in Orthomodular (and Boolean) Lattices*
Notre Dame Journal if Formal Logic, 22. kötet, 2. szám
163-182., 1981, április.

[Har2] Gary M. Hardegree:*The Conditional in Quantum Logic*
Logic and Probability in Quantum Mechanics, 55-72.
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

[Kir1] A. A. Kirillov (szerkesztő):*Representation Theory and Harmonic Analysis I.*
Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 22. kötet
Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Kir2] A. A. Kirillov (szerkesztő):*Representation Theory and Harmonic Analysis III.*
Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 59. kötet
Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Mar] Martin Davis:*Applied Nonstandard Analysis.*
John Wiley & Sons, New York, 1977.

[Mat1] Matolcsi Tamás, Székely Sándor:*Matematikai Fizika*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[Mat2] Tamás Matolcsi:*A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics*
Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.

[Mit] Peter Mittelstaedt:*Quantum Logic.*
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1978.

[Mor] R. Morash:*Orthomodularity and Nonstandard Constructions*
Glasnik Mat., **10.**, 207-218. 1975.

[Réd] Miklós Rédei:*Introduction to Quantum Logic*
Eötvös University Press, 1995.

[Rob] Abraham Robinson: *Nonstandard Analysis, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.*
North-Holland, 1966.

[TF] Fáy Gyula, Tőrös Róbert:*Kvantumlogika.*
Gondolat, Budapest, 1978.

[Top] David M. Topping:*Lectures on Von Neumann Algebras*
Von Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

A hálóelmélet [Bur], [Mat1], [Mat2] és [Réd] könyveken alapul; a Hilbert-hálók elmélete [Mat1], [Mat2] és [Réd] könyveken; a nemstandard Hilbert-terek eseményhálójáról szóló rész [Gud1], [Gud2], [Mor], [Rob], [Mar] cikkeken. A C^*-algebrák leírt reprezentációelméleti tulajdonságairól részletesen olvashatunk [Kir1] és [Kir2] könyvekben, a Neumann-hálók elméletének részletes tárgyalása pedig megtalálható pl. [Top] és [Réd] könyvében. A kvantumimplikációról szóló szakasz alapja [Réd], [Mit], [Har1], [Har2], [Bran] és [TF].

3.1. Klasszikus logika általánosítása

A kvantumlogika feladata a fizikai, főként kvantummechanikai ítéletek sajátos logikájának a vizsgálata. A klasszikus matematikai logika alapjait Boole állította fel, amikor tanulmányozta a 'helyes gondolkodás' alaptörvényeit. Azóta a Boole-algebrák nélkülözhetetlenné váltak az axiomatikus halmazelmélet, modellelmélet, valamint a matematika és a fizika főbb ágaiban. Ha Boole-logikát alkalmazunk a kvantummechanika folyamatainak a megértéséhez, ellentmondásokat, paradoxonokat kapunk. Ezért a Boole-algebráknál lazább, kevesbé merev logikai gondolkodásmód szükséges az ellentmondásmentes, ugyanakkor a kísérletekkel egyező matematikai modell felepítéséhez. Az új logika matematika leírásához a hálóelmélet nyújt segítséget. Áttekintjük a hálók definicióit és főbb tulajdonságait.

A hálókat kétféleképpen szokás definiálni: vagy algebrai módon, mint például a csoportokat, vagy a geometriai szemléltetést kínáló részbenrendezés segítségével.

3.1.1. Definíció. Egy L nemüres halmazt $\vee$ és $\wedge$ binér műveletekkel *hálónak* nevezünk, ha a következő azonosságok teljesülnek:

(1) $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$. (Kommutativitás.)
(2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. (Asszociativitás.)
(3) $x \wedge x = x$ és $x \vee x = x$. (Idempotencia.)
(4) $x = x \vee (x \wedge y)$ és $x = x \wedge (x \vee y)$. (Elnyelési tulajdonság.)

Példák:.

(1) Ha L az ítéletek halmaza, $\vee$ a 'vagy' , $\wedge$ pedig az 'és' kötöszó, akkor a háló axiómái az ítéletkalkulus jól ismert tulajdonságai.
(2) Legyen L a természetes számok halmaza, $\wedge$ legyen a legnagyobb közös osztó, $\vee$ a legkisebb közös többszörös. Ekkor L ezekkel a műveletekkel háló lesz.

3.1.2. Definíció. Legyen P részbenrendezett halmaz, A pedig P tetszőleges részhalmaza. A P halmaz valamely p eleme A felső korlátja, ha $a \leq p$ teljesül A minden a elemére. A P-beli p elem A legkisebb felső korlátja (szuprémuma, jele: sup$A$), ha felső korlátja A-nak és, ha valamely b elemére $a \leq b$ teljesül A minden a elemére, úgy $p \leq b$ (azaz p az A felső korlátainak legkisebbike). Hasonlóan definiálhatjuk A alsó korlátját és legnagyobb alsó korlátját (infimumát, inf$A$). A P halmaz a és b elemeire azt mondjuk, hogy szomszédosak, és a alsó szomszédja b-nek, illetve b felső szomszédja a-nak, ha $a \leq b$, és $a \leq c \leq b$ esetén $a = c$ vagy $b = c$. Az $a \lessdot b$ jelölést használjuk a továbbiakban arra az estre, ha b felső szomszédja a-nak. Algebrai szóhasználattal a $a \lessdot b$ relációra azt mondjuk, hogy b fedése a-nak.

3.1.3. Definíció. Az L részbenrendezett halmaz *háló*, ha bármely két elemére létezik L-ben sup$\{a, b\}$ és inf$\{a, b\}$.

Megjegyzés:.

(1) 1. Ha L háló az első definíció szerint, akkor értelmezzük L elemei között a $\leq$ részbenrendezést: legyen $a \leq b$ pontosan akkor, ha $a = a \wedge b$.
(2) 2. Legyen L háló a második definíció szerint. Értelmezzük az $\wedge$ és $\vee$ műveleteket a következőképpen: $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

A részbenrendezett halmazok sajátossága, hogy lerajzolhatók. Az alábbiakban ismertetjük, hogyan rendelhetünk egy ábrát, a *Hasse-diagramot* egy véges P részbenrendezett halmazhoz. A P elemeit egy-egy köröcskével ábrázoljuk. Ha az a, b elemekre $a \lessdot b$ teljesül, akkor a b-nek megfelelő köröcskét az a-t reprezentáló köröcske fölé rajzoljuk és összekötjük őket egy egyenes szakkasszal. A kapott diagramból a $\leq$ reláció a következő észrevétel alapján olvasható le: $a < b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$a = c_1 \lessdot c_2 \lessdot \cdots \lessdot c_{n-1} \lessdot c_n = b$$

igaz, alkalmas P-beli $c_1, \ldots, c_n$ elemekkel.

Az M_5 és az N_5 nevű háló Hasse-diagramja lerajzolva a következő:

1 1

a

a b c c

b

0 0

M_5 N_5

Két struktúrára akkor használjuk az 'izomorf' kifejezést, ha azok, elemeik mibenlététől eltekintve, megegyeznek. Hálók esetében ezt matematikailag a következő módon lehet megfogalmazni:

3.1.4. Definíció. Az L_1, L_2 hálókat *izomorfaknak* hívjuk, ha létezik L_1-nek olyan α bijekciója L_2-be, melyre az $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$ és $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$ egyenlőség az L_1 bármely a, b elemeire teljesül. Az α leképzést ilyenkor izomorfizmusnak nevezzük.

3.1.5. Definíció. Az L háló *részhálója* egy olyan részhalmaza L-nek, amely önmaga is háló az eredeti L-beli műveletekkel.

3.1.6. Definíció. Az L_1 háló *beágyazható* az L_2 hálóba, ha létezik L_2-nek L_1-gyel izomorf részhálója.

A hálókat az axiómákból nem levezethető azonosságok teljesülése alapján osztályozhatjuk.

Állítás. *Egy L hálóra a következő két azonosság ekvivalens:*

(1) $x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
(2) $x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

3.1.7. Definíció. Egy hálót *disztributívnak* nevezzünk, ha igaz benne valamelyik azonosság az előbbi állításból. (Ekkor persze mindkettő teljesül.)

3.1.8. Definíció. Legyen $\{a, b, c\}$egy $a, b, c \in L$ elemkből álló rendezetlen hármas. Azt mondjuk, hogy $\{a, b, c\}$ *disztributív hármas*, ha:

(1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
(2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Könnyű ellenőrizni, hogy egy háló akkor és csak akkor disztributív, ha elemeiből készített hármasok disztributívak.

3.1.9. Definíció. Egy L háló *korlátos*, ha létezik $0, 1 \in L$, úgy, hogy $0 \neq 1$ és:

$$0 \leq b \leq 1 \qquad \forall b \in L.$$

3.1.10. Definíció. Egy (a, b) hálóelemekből álló rendezett párt *modulárisnak pár*nak hívunk, ha:

$$\text{Ha} \qquad c \leq b \qquad \text{akkor} \qquad \{a, b, c\} \qquad \text{disztributív.}$$

Azt modjuk, hogy L *moduláris*, ha az elemeiből álló rendezett párosok modulárisak. Az (a, b) pár *duál-moduláris pár*, ha minden $b \leq x$ esetén

$$(x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b).$$

Egy háló akkor és csak akkor moduláris, ha teljesül benne valamelyik az alábbi ekvivalens azonosságok közül:

(1) $x \leq y \longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.
(2) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z)$.

Egyszerű számolással igazolható az alábbi tétel:

Tétel. *Minden disztributív háló moduláris.*

A következő két tételben a moduláris és a disztributív hálóknak igen szép jellemzését kapjuk két, M_5-nek és N_5-nek nevezett 5-elemű háló révén.

Tétel. *(Dedekind) Az L háló akkor és csak akkor nem moduláris, ha N_5 beágyazható L-be.*

Tétel. *(Birkhoff) Az L háló akkor és csak akkor nem disztributív, ha M_5 vagy N_5 beágyazható L-be.*

3.1.11. Definíció. Legyen L korlátos háló. Azt modjuk, hogy adott $b \in L$ elem *komplementere* $c \in L$, ha:

$$c \wedge b = 0 \qquad \text{és} \qquad c \vee b = 1.$$

Az L háló *komplementumos*, ha minden elemenék van komplementere. Az L háló *egyértelműen komplementumos*, ha minden elemének pontosan egy komplementere van.

3.1.12. Definíció. Egy $\perp\colon L \to L \quad a \mapsto a^\perp$ leképzést *ortokomplementációnak* nevezünk, ha teljesíti az alábbi azonosságokat:

(1) $(a^\perp)^\perp = a$.
(2) Ha $a \leq b$ akkor $b^\perp \leq a^\perp$.
(3) $a \wedge a^\perp = 0$.
(4) $a \vee a^\perp = 1$.

Az ortokomplementáció a negáció általánosítása. A második feltétel azt sugallja, hogy ha az ortokomplementációt tagadásként interpretáljuk, akkor a hálóelméleti $\leq$ jel az implikációnak felel meg. Ez, mint látni fugjuk, nem igaz!

Állítás. *Ha L ortokomplementumos, azaz ortokomplementációval ellátott háló, akkor:*

(1) $\perp$ *bijekció.*
(2) $0^\perp = 1$ *és* $1^\perp = 0$.
(3) *Ha* $a \leq b^\perp$ *akkor* $x \wedge y = 0$.

Egy komplementumos hálót ortokomplementációval ellátva röviden *ortohálónak* hívunk.

3.1.13. Definíció. A $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ hatos *Boole-algebra*, ha két binér, egy unér és két 0-változós műveletére teljesül, hogy:

(1) $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ disztributiv háló.
(2) $x \wedge 0 = 0$ es $x \vee 1 = 1$.
(3) $x \wedge x' = 0$ es $x \vee x' = 1$.

Ez a definíció összhangban van a 2.4.1. definícióval.

Állítás. *Egy L háló pontosan akkor Boole-algebra, ha komplementumos disztributív háló.*

A disztributív ortohálókat *Boole-ortohálón*ak nevezzük.

3.1.14. Definíció. Azt modjuk, hogy $a, b \in L$ elemek *ortogonálisak*, ha $a \leq b^\perp$, jelben: $a \perp b$.

3.1.15. Definíció. Egy L ortoháló *ortomoduláris*, ha minden ortogonális pár moduláris:

Ha minden $a \perp b$ esetén (a, b) moduláris pár.

Állítás. *Egy L ortoháló ortomoduláris ortoháló, ha teljesíti az alábbi ekvivalens ortomodularitási feltételek valamelyikét:*

(1) *Ha* $a \leq b$ *és* $a^\perp \leq c$ *akkor* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
(2) *Ha* $a \leq b$ *akkor* $b = a \vee (a^\perp \wedge b)$.
(3) $a \vee (a^\perp \wedge (a \vee b)) = a \vee b$.

A klasszikus logika általánosításának egyik módja, hogy az állításokat egy korlátos ortomoduláris ortoháló elemeinek tekintjük, az ’és’ valamint a ’vagy’ kötőszóknak a hálóban szereplő $\wedge$ és $\vee$ műveleteket feleltetjük meg, a ’nem’ tagadószót mint ortokomplementációt értelmezzük. Ekkor speciális háló esetén visszakapjuk a Boole-logikát.

Fizikában az események halmazát szokás azonosítani hálóelemekkel. A $\vee, \wedge$ hálóelméleti operációk eseményekhez eseményt rendelnek, az ortokomplementációt úgy értelmezzük, mint az ellentett eseményt. Fontos megjegyezni, hogy az esemény szó mint definiálatlan alapfogalom szerepel még ebben a szövegösszefüggésben.

A teljesség igénye nélkül nézzük át milyen, a fizikában is használható, a klasszikustól eltérő logikai modellek léteznek:

(1) A következtetés, $\rightarrow$ szabályait is figyelembe vevő egyik struktúra a Birkhoff által bevezetett *Brouwer-algebra*, mai nevén *Heyting-algebra*. Ennek a szerkezete egy $\langle H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ ötös, azonosságai:
$\langle H, \vee, \wedge\rangle$ disztributív háló.
$x \wedge 0 = 0$ es $x \vee 1 = 1$.
$x \rightarrow x = 1$.
$(x \rightarrow y) \wedge y = y$ és $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$.
$x \rightarrow (r \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ és $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$.

(2) A prédikátumkalkulus algebrai modellezésére Tarski és Thompson bevezette az *n-dimenziós cilindrikus algebrákat*.

(3) Az *n-edrendű Post-algebrák* szintén egy logika algebrai megfelelőjét modellezik.

(4) A *Kunsemüller-féle logikai axiómarendszerben* három logikai jel szerepel, a diszjunkció ($\vee$) , negáció ($\neg$), valamint a kvantumimplikáció ($\Rightarrow$). A kvantumimplikáció szabályai nem egyeznek meg a megszokott következtetés szabályaival.

(5) A *Kotas-féle axiómarendszerben* kétfele implikáció létezik: az egyik a klasszikus logika szabályainak eleget tevő implikáció ($\rightarrow$) , a másik pedig a kvantummechanika következtetési szabályait modellező kvantumimplikáció ($\Rightarrow$). Az axiómáiban ezeken kivül csak a negációt ($\neg$) használja. Ezekből definiálja az 'és' illetve 'vagy' konnexiókat. (A Kotas- és a Kunsemüller-féle kvantumimplikáció nem esik egybe.)

(6) Az eddigiektől eltérő szemléletű a *protologika*, másnéven a *dialogika*. Az alapgondolata szerint a logikai következésfogalom az emberek vitatkozásai, dialógusai során alakult ki. Az 'őslogika' értelmében akkor tekinthető a B ítélet az A ítélet következményének, ha alkalmas ember valamely vitapartnert meg tud győzni arról, hogy amennyiben elfogadja az A ítéletet, úgy el kell fogadnia B-t is.

(7) A *Reichenbach-féle logika* megengedi, hogy egy A ítélet értéke határozatlan legyen, ha kísérletekkel nem lehet eldönteni, hogy az A esemény bekövetkezett-e vagy sem. Ennek nyomán definiálja a háromértékű logikában az 'és' , 'vagy' konnexiókat, valamint bevezet háromféle következésfogalmat és negációt. Ezzel a logikai rendszerrel tisztázott néhány paradoxonnak tűnő kvantummechanikai kísérletet.

(8) *Destouches-Février* egy másik *háromértékű kvantumlogika* axiómarendszerét adta meg, melynek alapgondolata a 'makroszkopikus-' valamint a 'kvantumos-' logika ötvözése.

(9) A *modális logika* a kijelentések modalitásait vizsgálja, vagyis abból a szem-

szögből nézi a kijelentéseket, hogy azok igazsága, illetve hamissága szükségszerű, lehetséges, lehetetlen vagy véletlen.

(10) A *temporális logika* a kijelentések idővonatkozását vizsgálja.

3.2. Hálóelméleti alapok

A továbbiakban a háló kifejezés mindenhol korlátos hálót jelent, hacsak nincs külön említve az ellenkezője.

3.2.1. Definíció. A P részbenrendezett halmazt *teljesnek hívjuk*, ha P bármely A részhalmazára létezik P-ben $\sup A$ és $\inf A$. Utóbbiakra az $\vee A$, illetve $\wedge A$ jelölést fogjuk használni. Nyilván minden teljes részbenrendezett halmaz háló; az L hálót teljes hálónak nevezzük, ha L, mint részbenrendezett halmaz, teljes.

3.2.2. Definíció. Az L háló a elemét *kompaktnak* hívjuk, ha L minden olyan A részhalmazára, melyre $\vee A$ létezik és $a \leq \vee A$, akkor $a \leq \vee B$ is teljesül az A valamely B véges részhalmazára. L háló *kompaktan generált*, ha L minden eleme egy alkalmas, kompakt elemekből álló halmaz szuprémuma.

3.2.3. Definíció. Az L hálót *algebrai hálónak* nevezzük, ha teljes és kompaktan generált.

3.2.4. Definíció. Egy hálót *σ-hálónak* hívunk, ha bármely megszámlálható részhalmazának létezik infimuma és szuprémuma.

3.2.5. Definíció. Az L háló egy a eleme *atom*, ha az $b \leq a$ egyenletből következik, hogy $a = b$ vagy $b = 0$. Az L-et *atomos hálónak* nevezzük, ha minden $b \in L$ elemhez létezik a atom, hogy $a \leq b$. Egy háló *teljesen atomos*, ha minden $0 \neq b \in L$ elem előáll $b = \vee_i a_i$ alakban, ahol minden i-re a_i atom, és $a_i \leq b$.

3.2.6. Definíció. Egy $d : L \to [0, \infty]$ leképezés *dimenziófüggvény*, ha a rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) Ha $a \leq b$ és $a \neq b$ akkor $d(a) < d(b)$.
(2) $d(a) + d(b) = d(a \vee b) + d(a \wedge b)$.

Állítás. *Ha az L hálón létezik véges értékkészletű dimenziófüggvény, akkor L moduláris.*

Állítás. *Minden moduláris háló ortomoduláris.*

Állítás. *Egy ortokomplemtumos L hálóban a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *Ortomodularitás:*

$$\text{Ha} \quad a \leq b \quad \text{és} \quad a^{\perp} \leq c \quad \text{akkor} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

(2) *Ortomodularitás rövid formája:*

$$\text{Ha} \quad a \leq b \quad \text{akkor} \quad b = a \vee (a^{\perp} \wedge b).$$

(3) *Ortomodularitás rövid formájának duálisa:*

$$\textit{Ha} \quad b \leq a \quad \textit{akkor} \quad b = a \wedge (a^{\perp} \vee b).$$

(4) *Kvázimodularitás*, vagy másnéven *gyenge modularitás:*

$$\textit{Ha} \quad a \leq b \quad \textit{és} \quad a^{\perp} \leq c \quad \textit{akkor} \quad a \vee (b \wedge c) = b.$$

(5) *Kvázimodularitás duálisa:*

$$\textit{Ha} \quad b \leq a \quad \textit{és} \quad c \leq a^{\perp} \quad \textit{akkor} \quad a \wedge (b \vee c) = b.$$

Állítás. *Ha L ortomoduláris σ-háló, akkor teljesíti a De-Morgan azonosságokat:*

(1) $(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n)^{\perp} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\perp}$.
(2) $(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n)^{\perp} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\perp}$.

3.2.7. Definíció. Egy $C \in L \times L$ relációt *kompatibilis relációnak* hívunk, ha:

$$aCb \qquad \text{akkor és csak akkor, ha} \qquad a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp}).$$

A C reláció áltlában nem szimmetrikus, pontosabban C akkor és csak akkor szimmetrikus, ha L ortomoduláris.

Az ortomoduláris hálók elméletében a számolásoknál egyik leggyakrabban használt a Foulis-Holland tétel:

Tétel. *Ha C kompatibilis reláció és aCb valamint aCc, akkor $\{a, b, c\}$ disztributív hármas.*

Ortomoduláris hálóban egy C kompatibilis relációra igazak:

(1) aCa.
(2) C szimmetrikus.
(3) Ha $a \leq b$ akkor aCb.
(4) Ha $a \perp b$ akkor aCb.
(5) Ha aCb akkor $aCb^{\perp}$.
(6) Ha aCb és aCc akkor $aCb \wedge c$.
(7) Ha aCb és aCc akkor $aCb \vee c$.

3.3. Hilbert-hálók

Legyen H komplex Hilbert-tér. Ekkor H zárt altereinek halmaza ellátható hálóműveletekkel. Mint látni fogjuk, alapvető különbség van a hálók szerkezete között attól függően, hogy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen dimenziós Hilbert-tér altereiről van szó.

Jelölje $\mathcal{M}(H)$ a Hilbert-tér zárt altereinek a halmazát, $\mathcal{P}(H)$ pedig a Hilbert-tér projektorainak a halmazát. Legyen $T \in \mathcal{M}(H)$, ekkor T *ortogonális kiegészítője*:

$$T^{\perp} = \{x \in H | \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in T\}.$$

Minden $x \in H$ egyértelműen felbontható $x = x_T + x_{T^{\perp}}$ alakban, ahol $x_T \in T$ és $x_{T^{\perp}} \in T^{\perp}$. Definiáljuk a P_T operátort:

$$P_T : H \to H \qquad x \mapsto x_T.$$

A P_T lineáris, korlátos, nilpotens, önadjungált operátor, tehát projektor. Megadhatunk egy injektív leképzést a zárt alterek halmazáról a projektorok halmazára:

$$\iota : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{P}(H) \qquad T \mapsto P_T.$$

Ha adott egy P projektor, akkor $T_P = P[H]$ zárt lineáris altér. Létezik a

$$\kappa : \mathcal{P}(H) \to \mathcal{M}(H) \qquad P \mapsto T_P$$

injektív leképzés, melyre teljesül, hogy $\iota \circ \kappa = id_{\mathcal{P}(H)}$ és $\kappa \circ \iota = id_{\mathcal{M}(H)}$. Vagyis a zárt lineáris alterek halmazát azonosítottuk a projektorok halmazával.

Értelmezzük az a halmazelméleti tartalmazást ($\leq$) $\mathcal{M}(H)$-n, mint $\mathcal{M}(H)$-beli műveletet. Igazolható, hogy ekkor $\mathcal{M}(H)$ korlátos háló lesz. A $\kappa : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{P}(H)$ leképezés segítségével ez a hálóstruktúra $\mathcal{P}(H)$-n is kialakítható.

Legyen $Q, P \in \mathcal{M}(H)$, akkor $P \wedge Q = P \cap Q$, ahol $\cap$ a halmazelméleti metszetképzést jelenti. A $P \vee Q$ az alterek összegének a lezártja:

$$P \vee Q = \overline{\{x \in H | x = x_P + x_Q \quad x_P \in P \quad x_Q \in Q\}}.$$

Állítás. *Az $\mathcal{M}(H)$ és ekkor $\mathcal{P}(H)$ is, az iménti hálóstruktúrával ellátva teljesen atomos σ-háló, mely nem disztributív, ha $dim H > 1$.*

3.3.1. Definíció. A komplex Hilbert-terek projektorainak σ-hálóját *Hilbert-hálónak* nevezzük.

A zárt alterek halmazán az ortogonális komplemetum képzést ($\perp$-t) $\mathcal{M}(H)$-beli műveletnek tekintjük, így minden $P \in \mathcal{P}(H)$ projektornak is értelmezhető az ortogonális komplementuma, melyet $P^{\perp}$ szimbólummal jelölünk. A $\mathcal{P}(H)$-n bevezetett hálóműveletek megkaphatók a megszokott operátorműveletekkel:

Állítás. *Legyen $P, Q \in \mathcal{P}(H)$.*

(1) *$P \leq Q$ akkor és csak akkor, ha $PQ = QP = P$.*
(2) *$P^{\perp} = I - P$.*
(3) *$P \wedge Q = (s)\lim_{n\to\infty}(PQ)^n = (s)\lim_{n\to\infty}(QP)^n = (s)\lim_{n\to\infty}(PQP)^n = (s)\lim_{n\to\infty}(QPQ)^n$.*
(4) *$P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp}$.*

Speciális esetekben a fenti formulák egyszerűsödnek:

Állítás. *Legyen $P, Q \in \mathcal{P}(H)$.*

(1) *Ha $PQ = QP$ akkor $P \wedge Q = PQ$ és $P \vee Q = P + Q - PQ$.*
(2) *Ha $P \leq Q$ akkor $Q \wedge P^{\perp} = Q - P$.*
(3) *$P \perp Q$ akkor és csak akkor, ha $PQ = QP = 0$.*

Érdekes összefüggésre mutat rá a következő tétel a Hilbert-tér dimenziója és a Hilbert-háló szerkezete között.

Tétel. *A $\mathcal{P}(H)$ háló akkor és csak akkor moduláris, ha H véges dimenziós.*

Ha H nem véges dimenziós, akkor konstruktív módon megadható három zárt altér, melyek nem teljesítik a modularitási szabályt: Legyen η_n, $n = (1, 2, ...)$ ortonormált bázis a H Hilbert-téren. Definiáljuk minden n-re x_n-t:

$$x_n = \eta_{2n} + a^{-n}\eta_1 + a^{-2n}\eta_{2n+1}$$

ahol $a > 1$ egy tetszőleges valós szám. Megadunk három alteret:

(1) $\mathcal{F}$ legyen x_n, $n = (1, 2, ...)$ által generált altér.
(2) $\mathcal{G}$ legyen x_n, $n = (1, 2, ...)$ és η_1 által generált altér.
(3) $\mathcal{E}$ legyen η_{2n}, $n = (1, 2, ...)$ által generált altér.

Természetesen $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{F} \vee \mathcal{E} = \mathcal{G} \vee \mathcal{E}$. A modularitási szabály szerint:

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{E}) = (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}).$$

Az egyenlet bal oldala:

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{E}) = \mathcal{F} \vee 0 = \mathcal{F}.$$

A jobb oldal pedig:

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) = \mathcal{G} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{E}) = \mathcal{G}.$$

$\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, ezért a modularitási szabály nem teljesül.

Tétel. *A $\mathcal{P}(H)$ háló, H dimenziójától függetlenül, ortomoduláris.*

3.3.2. Definíció. Legyen A és B két korlátos önadjungált operátor a H Hilbert-téren. Azt mondjuk, hogy A *nagyobb mint* B, jelben $A \geq B$, ha $\langle x, Ax\rangle \geq \langle x, Bx\rangle$ teljesül minden $x \in H$ esetén. Ha $A \geq 0$ akkor A *pozitív operátor.*

Állítás. *A P és Q operátorok hálóelméleti rendezése megegyezik az előbbi definícióban szereplő rendezés projektorelemekre való megszorításával.*

A Hilbert-hálók lehetőséget adnak a klasszikus logika kiterjesztésére, úgy, hogy a fizikai eseményeknek projektorokat feleltetünk meg; a logikai 'és', 'vagy' konnexiókat pedig a Hilbert-háló $\wedge$,$\vee$ műveleteivel azonosítjuk.

3.4. Nemstandard Hilbert-terek eseményhálója

Legyen $\mathcal{H}$ *skalárszorzatos tér* $\mathbb{C}^*$ felett, ahol a *skalárszorzat* egy

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}^*$$

leképzés, melyre igaz, hogy
(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lineáris a második változóban,
(2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ minden $x, y \in \mathcal{H}$ esetén,
(3) $\langle x, x\rangle > 0$ ha $x \neq 0$.

Egy $x \in \mathcal{H}$ elem *normája* $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Azt mondjuk, hogy x *infinitezimális* (*véges, végtelen*), ha $||x||$ infinitezimális (véges, végtelen). Ha $||x-y||$ infinitezimális, akkor a $x \approx y$ jelölést használjuk.

Állítás. *Minden* $x, y \in \mathcal{H}$ *elemre:*
(1) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$,
(2) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Ha $0 \leq \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ és $x \in \mathcal{H}$ akkor az x *középpontú* ε *sugarú nyílt gömb* legyen:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathcal{H}| \quad ||x-y|| < \varepsilon\}.$$

A nyílt gömbök által meghatározott Hausdorff, normális topológiát *normatopológiá*nak mondjuk.

Egy $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *hipersorozat konvergens, x-hez konvergál*, ha $\exists x \in \mathcal{H}$, úgy, hogy minden $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}^*$, melyre $||x - x_n|| < \varepsilon$, ha $N \leq n$. Igazolható, hogy egy $A \subset \mathcal{H}$ részhalmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden A-ban lévő konvergens sorozat határértéke is A-ban van.

Legyen $\mathcal{K}$ szeparábilis végtelen dimenziós komplex Hilbert-tér. Definiáljuk az összeadást, skalárral való szorzást, skalárszorzást a $\mathcal{H} = \mathcal{K}^*$ téren:

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n], \quad [a_n][x_n] = [a_n x_n], \quad \langle [x_n], [y_n]\rangle = [\langle x_n, y_n\rangle].$$

$\mathcal{H}$ skalárszozatos tér lesz $\mathbb{C}^*$ felett, amit *nemstandard Hilbert-tér*nek hívunk.

Egy $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}^*$ hipersorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ küszöbhöz létezik $N \in \mathbb{N}^*$, úgy, hogy $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ minden $N \leq n, m$ esetén. A nemstandard Hilbert-tér egyik érdekes tulajdonsága, hogy nem teljes, tehát nem minden Cauchy-sorozatnak van határértéke.

Legyen $L(\mathcal{H})$ a normában zárt lineáris alterek halmaza $\mathcal{H}$-ban. Legyen a $\perp$ művelet hasonló a standard Hilbert-téren értelmezetthez:

$$\text{Ha} \quad A \subseteq \mathcal{H} \quad \text{akkor} \quad A^\perp = \{y \in \mathcal{H} \quad | \quad \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall x \in A\}.$$

A skalárszorzat folytonosságából következik, hogy $A^\perp$ normában zárt altere $\mathcal{H}$-nak. Azt modjuk, hogy egy $A \in L(\mathcal{H})$ altér $\perp$-*zárt*, ha $A^{\perp\perp} = A$. Ezután definiáljuk a $\perp$-zárt alterek halmazát:

$$F(\mathcal{H}) = \{A \in L(\mathcal{H}) \quad | \quad A^{\perp\perp} = A\}.$$

Egy A altérről azt mondjuk, hogy *kettévágó altér*, ha $A + A^{\perp} = \mathcal{H}$. A kettévágó alterek halmaza:

$$E(\mathcal{H}) = \{A \in L(\mathcal{H}) \quad | \quad A + A^{\perp} = \mathcal{H}\}.$$

Megmutatható, hogy $A \subseteq A^{\perp\perp}$ és, hogy $E(\mathcal{H}) \subseteq F(\mathcal{H})$. Az alterek közötti halmazelméleti tartalmazás egy $\leq$ részbenrendezést határoz meg $L(\mathcal{H})$-n, $F(\mathcal{H})$-n és $E(\mathcal{H})$-n.

Állítás. *Az eddig definiált alterekről a következőket tudjuk:*

(1) $(L(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ *teljes háló az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\begin{gathered} \textit{Ha} \quad A \leq B \quad \textit{akkor} \quad B^{\perp} \leq A^{\perp}, \\ A \leq A^{\perp\perp}, \\ A \wedge A^{\perp} = \{0\}. \end{gathered}$$

(2) $(F(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ *teljes ortokomplementumos háló.*
(3) $(E(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ *ortomoduláris részbenrendezett halmaz.*

Morash adott meg két konkrét alteret, melyek segítenek az előbbi állítások megértésében. Ehhez azonban használjuk a következő ismeretet az ortonormált bázisról:

Tétel. *Legyen $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{K}$ szeparábilis, komplex, végtelen dimenziós Hilbert-tér egy ortonormált bázisa. Ebből a bázisból elkészíthető $\mathcal{K}^*$ egy bázisa $(\psi_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$, amire igaz, hogy minden $\phi \in \mathcal{K}^*$ esetén*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \langle \psi_n^*, \phi \rangle \psi_n^* = \phi.$$

Ezekután megadjuk a két alteret:

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathcal{H} \quad | \quad \exists n_x \in \mathbb{N} \quad \text{úgy, hogy} \quad x \perp \psi_n^* \quad \forall n > n_x\}, \\ T &= \{y \in \mathcal{H} \quad | \quad \exists n_y \in \mathbb{N}_\infty^* \quad \text{úgy, hogy} \quad y \perp \psi_n^* \quad \forall n < n_y\}. \end{aligned}$$

A bizonyítások pontos részletezése nélkül, de az állítások logikai sorrendjét meghagyva nézzük Morash eredményeit.

Morash tétele 1. *$Q^{\perp} = T$ és $T^{\perp} = Q$. Speciálisan $Q, T \in F(\mathcal{H}) \subseteq L(\mathcal{H})$.*

Morash tétele 2. *$Q \notin E(\mathcal{H})$.*

A bizonyítás lényege, hogy az

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\psi_n$$

elemről feltételezve, hogy $Q + Q^{\perp}$ altérben van, ellentmondást kapunk.

Morash tétele 3. $Q + Q^\perp \in L(\mathcal{H})$.

Morash tétele 4. $(L(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ *nem ortokomplementumos.*

Legyen $A = Q + Q^\perp$, akkor $A \in L(\mathcal{H})$, de $A \neq A^{\perp\perp}$. Sőt a De-Morgan azonosság sem teljesül:

$$\mathcal{H} = (Q \wedge Q^\perp)^\perp \neq Q^\perp \vee Q^{\perp\perp} = Q^\perp \vee Q \neq \mathcal{H}.$$

Morash tétele 5. $(F(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ *nem ortomoduláris.*

Morash tétele 6. $E(\mathcal{H})$ *nem σ-ortokomplementumos.*

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ elemre vesszük a $\psi_n^* \quad n \in \mathbb{N}^*$ báziselemek által generált egydimenziós alterek szuprémumát, melyről feltesszük, hogy eleme $E(\mathcal{H})$-nak (hiszen $A_n \in E(\mathcal{H})$, ha $n \in \mathbb{N}^*$) akkor ellentmondásra jutunk, mivel a szuprémumról igazolható (a bázisról szóló tétel segítségével), hogy egyenlő Q-val, de $Q \notin E(\mathcal{H})$.

A standard valós vagy komplex számtest feletti Hilbert-terek projektorhálói egyszerűbb szerkezetűek, mint a nemstandard tereké, hiszen a $\perp$-zárt alterek egybeesnek a kettévágó alterekkel, amik megegyeznek a zárt alterekkel. Vajon ha a $\mathbb{C}^*$-nál nagyobb számosságú komplex vagy valós számtest feletti skalárszorzatos terek altérhálóit vizsgáljuk mit mondhatunk a szerkezetükről? Ilyen és ehhez hasonló kérdéskre keresve választ sikeresen alkalmazták az algebrai topológiát a Hilbert-terek elméletében. Ebben a kutatásban I. Amemiya, H. Akari, G. Marino, S. Holland és G. Cattaneo úttörő szereplők voltak. Az ő eredményeik az általánosításai a nemstandard Hilbert-téren most bemutatott tételeknek.

A továbbiakban legyen H skalárszorzatos vektortér valamilyen számtest felett. Ekkor definiálható a $\perp$ művelet a H részhalmazain. Az előbbiekhez hasonlóan jelölje $F(H)$ a H $\perp$-zárt altereinek a halmazát, $E(H)$ pedig a kettévágó alterek halmazát.

Amemiya-Araki tétel. *A H tér akkor és csak akkor teljes, ha $F(H)$ ortomoduláris háló.*

Tétel. *A H tér akkor és csak akkor teljes, ha*

$$E(H) = F(H).$$

A következő tétel előtt idézzük fel a (duál-) moduláris pár fogalmát a 3.1.10 definíció segítségével.

Legyen $W(H)$ a H összes zárt altereinek a halmaza.

Holland tétele. *A H tér akkor és csak akkor teljes, ha $W(H)$-ban minden moduláris pár duálmoduláris.*

Tétel. *Az alábbiak ekvivalensek:*

(1) H *teljes.*
(2) $F(H) = W(H)$.
(3) $E(H) = W(H)$.

A további algebrai típusú teljességi tételek előtt újabb altereket és bázisfogalmakat kell definiálni.

A Zorn-lemmát használva megmutatható, hogy H minden nem nulla M alteréhez létezik legalább egy olyan maximális ortonormált rendszer (*ONS*), melynek elemei pontosan az M alteret feszíti ki. Ezt az M-hez tartozó *maximális ortonormált rendszer*nek hívjuk, röviden *MONS*-nak.

Legyenek az újabb altértípusok az alábbiak:

(1) $D(H)$ a *Foulis-Randall alter*ek halmaza: olyan M alterek halmaza, melyekre létezik egy (u_i) ONB M-ben, hogy $M = {u_i}^{\perp\perp}$. A $D(H)$ teljes részbenrendezett halmaz.
(2) $R(H)$ az olyan M alterek halmaza, hogy $M = {u_i}^{\perp\perp}$ minden (u_i) M-hez tartozó MONS esetén. Az $R(H)$ részbenrendezett halmaz.
(3) $V(H)$ az olyan M alterek halmaza, ahol $M = {u_i}^{\perp\perp}$ és $M^{\perp} = {v_j}^{\perp\perp}$ minden M-hez tartozó (u_i) MONS és minden $M^{\perp}$-hez tartozó (v_j) MONS esetén. A $V(H)$ ortokomplementumos részbenrendezett halmaz.
(4) $C(H)$ a véges vagy kovéges dimenziójú alterek halmaza. A $C(H)$ halmaz ortokomplementumos moduláris háló.
(5) $P(H)$ a véges dimenziós alterek halmaza. A $P(H)$ halmaz háló.

A definíció alapján adódik, hogy

$$P(H) \subseteq C(H) \subseteq E(H) \subseteq V(H) \subseteq R(H) \subseteq D(H) \subseteq F(H) \subseteq W(H).$$

Egy H-beli (u_i) ortonormált rendszert *Dacey-félé*nek hívunk, ha $\{u_{i_j}\} \cap \{u_{i_k}\} = \emptyset$ és $\{u_i\} = \{u_{i_j}\} \cup \{u_{i_k}\}$ formulákból következik, hogy $\{u_{i_j}\}^{\perp} = \{u_{i_k}\}^{\perp\perp}$.

Megjegyzés. Létezik Dacey-féle ONS, ami nem ortonormált bázis (ONB), és létezik MONS, ami nem Dacey-féle.

Egy H skalárszorzatos térről azt mondjuk, hogy *Dacey-tér*, ha minden H-hoz tartozó MONS Dacey-féle.

Tétel. *A H skalárszorzatos térre ekvivalensek a következők:*

(1) H *Dacey-tér.*
(2) $R(H) = D(H)$.
(3) $V(H) = D(H)$.
(4) $D(H)$ *ortomoduláris részbenrendezett halmaz.*
(5) $V(H) = R(H) = D(H)$.

Tétel. *A H skalárszorzatos tér esetén a következők ekvivalensek:*

(1) *H teljes,*
(2) *$R(H) = F(H)$,*
(3) *$E(H) = D(H)$,*
(4) *$D(S)$ ortomoduláris háló.*

Az itt felsorolt tételeken kívül a teljességgel hozhatók összefüggésbe a C, E, V, R, D, F és W típusú altereken adott tulajdonságú mértékek (állapotok) létezése.

Jelölje K az $\{C, E, V, R, D, F, W\}$ operációk valamelyikét. Egy m leképzést $K(H)$-ról a valós számok halmazára *teljesen additív előjeles mérték*nek hívunk, ha minden T indexhalmazra:

$$m(\bigoplus_{i\in T} M_i) = \sum_{i\in T} m(M_i),$$

és $K = W$ esetén még egy feltétel teljesül:

$$m(M \vee M^\perp) = m(H), \quad M \in W(H),$$

ahol $\{M_i | i \in T\}$ a $K(H)$ páronként ortogonális altereinek halmaza.

Tétel. *H skalárszorzatos tér akkor és csak akkor teljes, ha $K(H)$-n létezik nem nulla teljesen additív előjeles mérték, ahol $K \in \{C, E, V, R, D, F, W\}$.*

3.5. C^*-algebrák, Neumann-hálók

A H Hilbert-téren mindenhol értelmezett korlátos lineáris operátorok halmazát jelöljük $\mathcal{B}(H)$-val. Ekkor $\mathcal{B}(H)$ lineáris vektortér a komplex számtest felett, és a

$$||Q|| = \sup_{||\eta||\leq 1} ||Q\eta|| < \infty$$

formula normát határoz meg a $\mathcal{B}(H)$ téren, amivel $\mathcal{B}(H)$ Banach-tér lesz. A $\mathcal{B}(H)$ tér algebra, ha az operátorok szorzatát az operátorok kompozíciójaként értelmezzük. Ekkor $\mathcal{B}(H)$ *Banach-algebra*, azaz

$$||QR|| \leq ||Q|| ||R||.$$

Az adjungálás egy $* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H), \qquad Q \mapsto Q^*$ lineáris leképzés a következő tulajdonságokkal:

(1) $(Q^*)^* = Q$.
(2) $(QR)^* = R^* Q^*$.
(3) $||Q^*|| = ||Q||$.

3.5.1. Definíció. Egy Banach-algebrát a $*$ művelettel ellátva, mely teljesíti az (1)-(3) tulajdonságokat, *involutív Banach-algebrának* nevezünk, a $*$ műveletet pedig *involúciónak.*

A következő C^*-tulajdonság szintén igaz a $\mathcal{B}(H)$ téren:

$$||Q^*Q|| = ||Q||^2.$$

3.5.2. Definíció. Az involutív Banach-algebra neve *C^*-algebra*, ha teljesíti a C^*-tulajdonságot.

Minden normában zárt $*$-részalgebrája $\mathcal{B}(H)$-nak C^*-algebra.

3.5.3. Definíció. Legyen $\mathcal{M}$ a $\mathcal{B}(H)$ tér $*$-részalgebrája, mely tartalamazza az I egységelemet. Az $\mathcal{M}$ *Neumann-algebra*, ha zárt az erős operátortopológiában.

Igazolható, hogy minden Neumann-algebra egyben C^*-algebra is.

Gelfand-Naimark-tétel. *Minden $\mathcal{U}$ involutív Banach-algebrához létezik egyértelműen egy $C^*(\mathcal{U})$ C^*-algebra és egy*

$$\phi : \mathcal{U} \to C^*(\mathcal{U})$$

homomorfizmus úgy, hogy $\mathcal{U}$-nak minden T $*$-reprezentációja előáll

$$T = t \circ \phi$$

alakban, ahol t a $C^*(\mathcal{U})$ algebra reprezentációja.

Az $\mathcal{U}$ Banach-algebrához rendelt $C^*(\mathcal{U})$ algebrát *C^*-fedőalgebrá*nak nevezzük. A C^*-algebráknak sok érdekes tulajdonságuk van, ezek közül emelünk ki néhányat.

A C^*-algebrák közötti leképzésekkel kapcsolatban azt mondhatjuk, hogy ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ két C^*-algebra, valamint

$$\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$$

C^*-algebra homomorfizmus, vagyis az involúcióval kommutáló leképzés, akkor

$$||\varphi(a)|| \leq ||a|| \qquad \forall a \in \mathcal{U}_1.$$

Továbbá, ha $\ker(\varphi) = \{0\}$, akkor

$$||\varphi(a)|| = ||a|| \qquad \forall a \in \mathcal{U}_1.$$

A *Gelfand-leképzés* segítségével egy érdekes dualitás tételt kapunk, ehhez azonban be kell vezetnünk néhány új fogalmat és jelölést.

Az X és Y topologikus terek esetén az $f : X \to Y$ függvény *valódi*, ha minden Y-beli E kompakt halmaz esetén az $f^{-1}(E)$ halmaz kompakt X-ben.

Legyen $\mathcal{TOP}$ a *lokálisan kompakt Hausdorff-terek kategóriája*, ahol az objektumok a lokálisan kompakt Hausdorff-terek, a morfizmusok pedig $f : X \to Y$ folytonos valódi leképezések.

Legyen $\mathcal{C}^*$ a *kommutatív C^*-algebrák kategóriája*, azaz olyan kategória, melynek objektumai kommutatív C^*-algebrák, a morfizmusai pedig $*$-homomorfizmusok.

Definiáljuk a $\mathfrak{C} : \mathcal{TOP} \to \mathcal{C}^*$ kontravariáns funktort a következő módon: Ha X kompakt objektuma $\mathcal{C}^*$-nak, akkor

$$\mathfrak{C}(X) := C(X),$$

ahol $C(X)$ az X-en értelmezett, folytonos, komplex értékű függvények halmaza. A $C(X)$ C^*-algebra, ha a szorzást pontonként értelmezzük, a $*$-műveletet pedig, mint komplex konjugálást. Ha X lokálisan kompakt objektuma $\mathcal{C}^*$-nak, akkor

$$\mathfrak{C}(X) := \overline{C}_0(X),$$

ahol $\overline{C}_0(X)$ a folytonos, végtelenben eltünő $C(X)$-beli függvények halmaza. A $C_0(X)$ tér a fenti műveltekkel szintén C^*-algebra. Ha $f : X \to Y$ morfizmus, akkor

$$\mathfrak{C}(f) : \mathfrak{C}(Y) \to \mathfrak{C}(X) \qquad h \mapsto h \circ f$$

morfizmus.

Adjuk meg az $\mathfrak{M} : \mathcal{C}^* \to \mathcal{TOP}$ kontravariáns funktort az alábbi módon. Ha A kommutatív C^*-algebra, akkor legyen

$$\mathfrak{M}(A) := M(A),$$

ahol $M(A)$ az A karaktertere, vagyis a $\mu : A \to \mathbb{C}$ nem nulla homomorfizmusok halmaza a kompakt halmazon való egyenletes konvergencia topológiájával. Az $M(A)$ tér elemei egyben $*$-homomorfizmusok lesznek, valamint a pontonkénti konvergencia topológia $M(A)$-n megegyezik a kompakt halmazon egyenletes konvergencia topológiával. Igazolható, hogy $M(A)$ lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Ha $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizmus, akkor legyen

$$\mathfrak{M}(\phi) : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(B) \qquad \mu \mapsto \mu \circ \phi.$$

A $\mathfrak{C}, \mathfrak{M}$ funktorokat *Gelfand-Naimark kontravariáns funktorok*nak hívjuk.

Legyen $x \in X$ egy pont az X lokálisan kompakt, Hausdorff topológikus térben. Ekkor az

$$\epsilon_x : C(X) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto f(x)$$

leképzés eleme az $M(C(X))$ térnek, és segítségével megadhatunk egy

$$\epsilon : X \to M(C(X)) \qquad x \mapsto \epsilon_x$$

leképzést, melyről bizonyítható, hogy homeomorfizmus. Ha A kommutatív C^*-algebra, és $a \in A$ egy tetszőleges eleme, akkor a

$$\hat{a} : M(A) \to \mathbb{C} \qquad \mu \mapsto \mu(a)$$

leképzés eleme $C(M(A))$-nak. A $\hat{a}$ függvényt az a elem *Gelfand-transzformáltjá*nak nevezzük. Tekintsük a

$$\mathfrak{G} : A \to C(M(A)) \qquad a \mapsto \hat{a}$$

leképzést. Ez C^*-algebrák $*$-izomorfizmusa. Ezek a leképzések *természetesek* abban az értelemben, hogy az alábbi két diagramm kommutatív:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ M(C(X)) \arrow[r, "M(C(f))"'] & M(C(Y)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathfrak{G}(A)"'] & B \arrow[d, "\mathfrak{G}(B)"] \\ C(M(A)) \arrow[r, "C(M(\phi))"'] & C(M(B)) \end{tikzcd}$$

Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a $\mathcal{TOP}$ és a $\mathcal{C}^*$ kategóriák ekvivalensek. Az alábbi szótárból olvashatjuk le a Gelfand-Naimark kontravariáns funktorok néhány fontos tulajdonságát.

$\mathcal{TOP}$	$\mathcal{C}^*$
lokálisan kompakt Hausdorff-tér	kommutatív C^*-algebra
kompakt tér	egységelemes kommutatív C^*-algebra
egypontú kompaktifikáció	egységelem hozzávétel
folytonos valódi leképzés	$*$-homomorfizmus
homeomorfizmus	$*$-izomorfizmus
zárt halmaz	zárt ideál
egypontú zárt halmaz	maximális ideál
nyílt halmaz	hányados algebra
véges bázis	szeparábilis
mérték	pozitív funkcionál

Általánosított Stone-Weierstrass-tétel. Legyen $\mathcal{U}$ egységelemes C^*-algebra. Ekkor minden $\mathcal{B}$ C^*-részalgebra definiálható az alábbi módon:

$$\mathcal{B} := \{a \in \mathcal{U} | T(a) = S(a)\},$$

ahol T és S az $\mathcal{U}$ algebrának ugyanazon H Hilbert-tér feletti reprezentációi. Ha $\mathcal{U} = C(X)$, akkor a standard Stone-Weierstrass-tételt kapjuk.

Legyen f funkcionál az $\mathcal{U}$ C^*-algebrán. Azt mondjuk, hogy f *pozitív*, ha minden $a \in \mathcal{U}$ elemre $f(a^*a) \geq 0$. Az f pozitív funkcionál *állapot*, ha a normája egységnyi. Egységelemet tartalmazó C^*-algebra esetén ez ekvivalens az $f(1) = 1$ feltétellel. Ismert, hogy adott C^*-algebrán minden folytonos, lineáris funkcionál állapotok lineáris kombinációja.

Gelfand-Naimark-Segal-tétel. *Legyen $\mathcal{U}$ C^*-algebra és f állapot $\mathcal{U}$-n. Ekkor létezik az $\mathcal{U}$ algebrának egy T reprezentációja a H Hilbert-téren és egy $x \in H$ egységnyi normájú vektor úgy, hogy*

$$f(a) = \langle T(a)x, x\rangle$$

teljesül minden $a \in \mathcal{U}$ elemre.

A tételt abban az esetben vizsgáljuk, amikor $\mathcal{U}$ egységelemes.

Bizonyítás vázlat: Definiáljunk $\mathcal{U}$-ban skalárszorzást a

$$(a, b) := f(b^* a) \qquad \forall a, b \in \mathcal{U}$$

képlettel. Ekkor $\mathcal{U}$ prehilbert-tér. A hozzá asszociált Hilbert-teret jelöljük H-val és legyen az $\mathcal{U}$ egységelemének a képe a H Hilbert-térben x. Az $\mathcal{U}$ balhatását önmagán kiterjeszthetjük a H Hilbert-térre, így megkapjuk a kívánt T reprezentációt.

Ezt az eljárást a T reprezentáció megtalálására *GNS konstrukció*nak nevezzük.

Az $\mathcal{U}$ C^*-algebra állapotainak halmazát $E(\mathcal{U})$-val jelöljük. Ismeretes, hogy $E(\mathcal{U})$ konvex halmaz a pozitív funkcionálok terében. Ha $\mathcal{U}$ egységlemes az $E(\mathcal{U})$ halmaz kompakt a gyenge operátortopológiában.

Az $E(\mathcal{U})$ halmaz extremális pontjait *tiszta állapotok*nak nevezzük. A tiszta állapotok fontos szerepet játszanak az ábrázoláselméletben, amint azt a következő tétel mutatja, mely a GNS-konstrukció kiegészítésének tekinthető.

Tétel. *Az $\mathcal{U}$ C^*-algebra f állapotához tartozó T reprezentáció akkor és csak akkor irreducibilis, ha f tiszta állapot.*

Legyen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ egy tetszőleges halmaz. Jelölje $\mathcal{M}'$ azon operátorok halmazát, melyek $\mathcal{M}$ minden elemével felcserélhetők:

$$\mathcal{M}' = \{Q \in \mathcal{B}(H) | QR = RQ \quad \forall R \in \mathcal{M}\}.$$

$\mathcal{M}'$ neve $\mathcal{M}$ (*első*) *kommutánsa.* Hasonlóan megadható $(\mathcal{M}')'$, $\mathcal{M}$ *második kommutánsa.* Látható, hogy $\mathcal{M}'$ egységelemes $*$-algebra lesz, valamint minden $\mathcal{M}$-re igaz, hogy $\mathcal{M}' = ((\mathcal{M}')')'$.

Tétel. *(Neumann második kommutáns tétele.) Legyen $\mathcal{M}$ a $\mathcal{B}(H)$ tér $*$-részalgebrája, mely tartalmazza az I egységelemet. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')'$.
(2) *$\mathcal{M}$ zárt az erős, gyenge, ultragyenge topológiákban.*

A tételnek két fontos következménye:

(1) A akkor és csak akkor eleme az $\mathcal{M}$ Neumann-algebrának, ha A felcserélhető $\mathcal{M}'$ minden önadjungált elemével.
(2) Ha $\mathcal{M}$ nemüres $*$-zárt részhalmaza $\mathcal{B}(H)$-nak, akkor $\mathcal{M}'$ Neumann-algebra.

3.5.4. Definíció. Az $\mathcal{M}$ Neumann-algebrát *Neumann-faktornak* nevezzük, ha a *centruma* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$) triviális, azaz

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$$

csak λI alakú elemeket tartalmaz.

Tétel. *Minden Neumann-algebra (sorrendtől eltekintve) egyértelműen felbontható Neumann-faktorok direkt összegére.*

3.5.4. Definíció. Az $\mathcal{M}$ Neumann-algebra A és B projektoráról azt mondjuk, hogy *ekvivalensek*, jelben $A \sim B$, ha létezik $U \in \mathcal{M}$ parciális izomertria, hogy

$$A = U^*U \quad \text{és} \quad B = UU^*.$$

Állítás. *Az $\mathcal{M}$ Neumann-algebra bármely A és B projektorára teljesülnek az alábbiak:*

(1) $(A \vee B) - B \sim A - (A \wedge B)$. *(Parallelogramma-szabály.)*
(2) $A - (A \wedge B^{\perp}) \sim B - (A^{\perp} \wedge B)$.

3.5.5. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}$ projektor *véges*, ha minden $B \in \mathcal{M}$ projektorra az $A \sim B \leq A$ formulából következik, hogy $A = B$.
Az $\mathcal{M}$ Neumann-algebra véges, ha az identitása (I), mint projektor, véges.

A most következő tétel központi jelentőségű a Neumann-algebrák elméletében, ugyanis az algebra projektorainak a hálóját hozza összefüggésbe az egész algebrával. A tételt Neumann és Murray is felhasználta a Neumann-algebrák osztályozásánál.

Tétel. *A Neumann-algebra projektorainak a hálója, melynek jele $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, teljes ortomoduláris háló, valamint $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ generálja $\mathcal{M}$-et: $\mathcal{P}(\mathcal{M})' = \mathcal{M}$.*

A $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ hálón értelmezett dimenziófüggvény létezése adja a Neumann algebrák klasszifikációjának az alapját.

Tétel. *Legyen $\mathcal{M}$ Neumann-algebra faktor. Ekkor létezik, számszorzó erejéig egyértelműen, egy*

$$d : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to [0, \infty]$$

leképzés, a dimenziófüggvény, melyre igazak az alábbiak:

(1) $d(A) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $A = 0$.
(2) *Ha* $A \perp B$ *akkor* $d(A + B) = d(A) + d(B)$.
(3) $d(A) \leq d(B)$ *akkor és csak akkor, ha* $A[H] \subseteq B[H]$.
(4) $d(A) < \infty$ *akkor és csak akkor, ha* A *véges projektor.*
(5) $d(A) = d(B)$ *akkor és csak akkor, ha* $A \sim B$.
(6) $d(A) + d(B) = d(A \wedge B) + d(A \vee B)$.

Murray és Neumann meghatározták a d dimenziófüggvény lehetséges értékkészleteit, egy normálási számszorzó erejéig.

(1) Ran $d = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Ilyen algebra például $\mathcal{B}(H_n)$, ahol $dimH_n = n$. Ekkor a projektorháló moduláris, atomos, de nem disztributív, ha $n > 2$. Az algebratípus jele: I_n.
(2) Ran $d = \{0, 1, 2, ..., \infty\}$. Ilyen például $\mathcal{B}(H)$, ha $dimH = \infty$. A projektorháló ebben az esetben atomos, ortomoduláris, de nem moduláris.
Jele: I_∞.
(3) Ran $d = [0, \infty]$. Erre példa $\otimes_n M_2$. A hozzá tartozó háló moduláris, azonban nem atomos. Jele: II_1.
(4) Ran $d = \{x | 0 \leq x\}$. A háló ekkor nem moduláris és nem atomos.
Jele: II_∞.
(5) Ran $d = \{0, \infty\}$. Az $\mathcal{A}(W)$ algebra ilyen típusú. Projektorhálója nem moduláris és nem atomos. Jele: III.

A Neumann-algebrák hálói tehát nagyon különbözőek lehetnek. Például a II és III típushoz tartozó algebrák hálói nem atomosak. A III típusú algebra ellentéte a 'megszokott' $\mathcal{B}(H_n)$ Neumann algebrának: nem atomos, és nem is moduláris. A II_1 Neumann-algebra nem nulla projektorai között nincs legkisebb dimenziós projektor, mely nem nulla dimenziós, bár minden projektornak van egyértelmű véges dimenziója. Ezért a II_1 Neumann-algebrák elméletét gyakran folytonos dimenziójúnak hívják.

A III algebrák egyáltalán nem tartalmaznak véges projektorokat. Sokáig nem tudtak példát adni ilyen algebrára, létezésük is kétséges volt, végül 1936-ban konstruktív módon Neumann bizonyította az ilyen típusú algebrák létezését. A 60-as évek közepén bizonyították, hogy kontinuum sok nem izomorf III típusú algebra létezik. A II típusú algebrákon definiálható egy 'nyomszerű' művelet (a nyomnál megszokott additivitás és unitér ekvivalencia tulajdonsággal), melynek az értéke a projektorokon azonban tetszőleges valós szám lehet. A III típusú algebrákat tovább szokás bontani III_λ osztályokra, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$ jellemzi az algebra automorfizmus csoportját.

Könnyen gondolhatjuk, hogy a III típusú algebrák, 'túl egzoktikusak' ahhoz, hogy a fizikai alkalmazás során felmerüljenek, azonban ez nem igaz. Éppen a *Heisenberg-algebrák* kapcsán adhatunk egyszerű példát III típusú algebrákra. A konkrét példát kicsit általánosabb konstrukcióval kezdjük, ezzel is megismerve a C^*-algebrák egy nagy családját, és csak a konstrukció végén térünk vissza a *Heisenberg-algebrákra.*

Legyen n pozitív egész, jelöljük Mat_n szimbólummal az $n \times n$-es komplex mátrixok algebráját. Legyen

$$y = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, n_{k+1} \dots)$$

a természetes számoknak olyan növekvő sorozata, melyre minden k esetén igaz, hogy n_k osztója n_{k+1}-nek. A Mat_{n_k} mátrixalgebrának egy kitüntetett beágyazása a $\mathrm{Mat}_{n_{k+1}}$ algebrába a

$$q : \mathrm{Mat}_{n_k} \to \mathrm{Mat}_{n_{k+1}} \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

leképzés, ahol az a mátrixot $\frac{n_{k+1}}{n_k}$-szor írjuk a $\mathrm{Mat}_{n_{k+1}}$ mátrix főátlójába. Definiáljuk az

$$\mathcal{U}_y^0 := \cup_k \mathrm{Mat}_{n_k}$$

algebrát. A $\mathcal{U}_y^0$ algebrát tegyük teljessé a mátrixnormára nézve és legyen ennek a teljes algebrának a jele $\mathcal{U}_y$. Az $\mathcal{U}_y$ algebra involútív Banach-algebra, mely teljesíti a C^* tulajdonságot, tehát $\mathcal{U}_y$ C^*-algebra. Az íly módon előállított C^*-algebrák tulajdonságai nagymértékben függnek az y sorozat aritmetikai tulajdonságaitól. Legyen az n_k szám prímfelbontása az alábbi:

$$n_k = p_1^{a_1^{(k)}} p_2^{a_2^{(k)}} p_3^{a_3^{(k)}} \cdot \dots,$$

ahol p_i az i-edik prímszám. Legyen $a_p^{(k)}$ az n_k prímfelbontásánál a p prím kitevője, és legyen

$$a_p := \lim_{k\to\infty} a_p^{(k)},$$

ha létezik a határérték. Ekkor definiáljuk a következő számot, ha létezik a határérték:

$$\hat{y} := \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_{p_i}}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a $\hat{y}$ szám valójában *szupertermészetes szám*, vagyis elérhető, hogy minden y sorozathoz definiáljunk egyértelműen egy $\hat{y}$ számot. A $\hat{y}$ szám jellemzi legjobban az $\mathcal{U}_y$ C^*-algebrát; sok tétel ismeretes mely $\hat{y}$ és $\mathcal{U}_y$ kapcsolatáról szól, az egyik legismertebb a következő.

Tétel. *Legyen $\mathcal{U}_y$ és $\mathcal{U}_z$ az y és z sorozathoz tartozó C^*-algebra. Az $\mathcal{U}_y$ C^*-algebra pontosan akkor izomorf $\mathcal{U}_z$-vel, ha $\hat{y} = \hat{z}$.*

Megjegyezzük, hogy a tétel akkor is igaz, ha az $\hat{y}$ számot szupertermészetes számnak tekintjük, sőt, főleg ez az eset jelent érdekességet az alkalmazásoknál.

Legyen $1 \le k < \infty$ természetes szám, és legyen

$$x = (2^1, 2^2, \dots, 2^k)$$

sorozat. Az $\mathcal{U}_x$ algebrát *Heisenberg-algebrá*nak, vagy *antikommutációs relációk algebrájá*nak hívjuk. Ez az algebra az alábbi módon adható meg generátorok és relációk segítségével:

$$a_k, a_k^* \quad \text{a generátorok}$$
$$a_k a_l + a_l a_k = a_k^* a_l^* + a_l^* a_k^* = 0, \quad a_k a_l^* + a_l^* a_k = \delta_{kl} \quad \text{a relációk.}$$

Legyen $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ valós szám és $\mathcal{U}$ az imént definiált Heisenberg-algebra. Megadunk az $\mathcal{U}$ algebrán egy ω_q állapotot az alábbi relációkkal:

$$\begin{gathered}\omega_q(a_k) = \omega_q(a_k^*) = 0,\\ \omega_q(a_k a_k^*) = q\\ \omega_q(xy) = \omega_q(x)\omega_q(y)\end{gathered}$$

ahol x és y különböző generátorok polinomjai. Legyen T_q ezen állapothoz tartozó ábrázolás. A T_q ábrázolások operátorai által generált $\mathcal{U}_q$ Neumann-algebrákról R. Powers bizonyította, hogy páronként nem izomorf Neumann-algebra faktorok, továbbá $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}$ II_1 típusú algebra és $0 < q < \frac{1}{2}$ esetén $\mathcal{U}_q$ III_q típusú algebra.

A faktorok majdnem teljes klasszifikációja ismert már szeparábilis Hilbert-téren. Egyedül a III_0 típusúak kivételek, melyek vizsgálata a ergodelmélet eszközeivel lehetséges.

3.5.6. Definíció. Legyen $\mathcal{M}^+ = \{A \in \mathcal{M} | 0 \leq A\}$. A $\tau : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ leképzést *nyomoperátornak* nevezzük az adott $\mathcal{M}$ Neumann-algebrán, ha rendelkezik a alábbi tulajdonságokkal:

(1) $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$.
(2) $\tau(\lambda A) = \lambda\tau(A)$ ha $0 \leq \lambda$.
(3) $\tau(A^*A) = \tau(AA^*)$ ha $A \in \mathcal{M}$.

A τ nyomoperátor $\mathcal{M}$ -en *hű*, ha $\tau(A) > 0$ minden nem nulla pozitív A operátorra. A τ operátor véges, ha $\tau(A) < \infty$ teljesül minden $A \in \mathcal{M}^+$ elemre.

Megjegyzés. Ha τ véges nyom, akkor kiterjeszthető az egész $\mathcal{M}$ -re, mert $\mathcal{M}^+$ lineárisan kifeszíti az $\mathcal{M}$ algebrát. Ekkor igazak az alábbi tulajdonságok:

(1) $\tau(AB) = \tau(BA) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}$.
(2) τ unitér invariáns: $\tau(A) = \tau(UAU^{-1})$, ha $A \in \mathcal{M}$ és U unitér operátor.

Az I_n típusú algebrán a nyomoperátor megfelel a mátrixok nyomképzésének:

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, Ax_i \rangle.$$

Az I_∞ algebrában az összegzést már nem véges sok tagra kell elvégezni, hanem megszámlálhatóan végtelenre.

3.5.7. Definíció. A Neumann-algbrán értelmezett nyomoperátorok egy $(\tau_i)_{i \in I}$ halmazát *elégségesnek* nevezzük, ha minden nem nulla $A \in \mathcal{M}^+$ operátorhoz létezik $i \in I$ úgy, hogy $\tau_i(A) \neq 0$.

A számértékű nyomoperátor egyik természetes kiterjesztését kapjuk a centrum segítségével.

3.5.8. Definíció. A $T : \mathcal{M} \to \mathcal{Z}_\mathcal{M}$ leképzés *centrum értékű nyomoperátor* az $\mathcal{M}$ Neumann-algebrán, ha

(1) $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

(2) $T(\lambda A) = \lambda T(A)$.
(3) $T(A^*A) = T(AA^*)$.
(4) $T(I) = I$.
(5) $T(ZA) = ZT(A) \quad A \in \mathcal{M} \quad Z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$.
(6) $T(A^*A) > 0$ ha $A \neq 0$.

A nyomoperátorok létezése, és a Neumann-algebra végessége szorosan összefügg egymással.

Tétel. *A következők ekvivalensek:*

(1) *Az $\mathcal{M}$ Neumann-algebra véges.*
(2) *Létezik a nyomoperátoroknak elégséges halmaza.*
(3) *Létezik centrum értékű nyom $\mathcal{M}$-en.*

3.6. Kvantumimplikáció

Ebben a fejezetben két kvantumlogikai axiómarendszert vizsgálunk meg. Az elsőt Kunsmüller dolgozta ki 1959-ben, a másodikat Kotas 1963-ban. Ezeken kívül Mittelstaedt és Hardegree kvantumimplikációval kapcsolatos eredményeit nézzük át.

Az implikáció a beszélt nyelven a 'ha ... akkor ... ' kifejezésnek felel meg. Természetes az igény, hogy ha az állításokat összekötő 'és','vagy ','nem' szavaknak matematikai operációkat feleltettünk meg, akkor az implikációnak is legyen matematikai megfelelője. Boole-logikában pontosan egy ilyen reláció létezik, azonban általános ortomoduláris hálóra áttérve már közel sem ennyire egyszerű az implikáció megadása.

Ha események között szeretnénk megadni 'ha ... akkor ... ' típusú implikációt, akkor már egyáltalán nem magától értetődő, hogy milyen típusú műveletet keresünk. Az események hálóján nyilván két elem között van értelme beszélni implikációról, tehát a keresett operáció argumentumában két hálóelemnek kell szerepelnie, az operátor értéke azonban kérdéses, hiszen az operátor értéke nem esemény! Sőt az állítások közötti implikációnak az értéke sem állítás, hanem meta-állítás. Ezzel párhuzamba állítható, hogy $a, b \in L$ hálóelemek között létezik egy szemantikai implikáció, a $\leq$ részbenrendezés. Az $a \leq b$ formula szintén nem hálóelem, mert hierarchiában a hálóelemek felett áll.

Az állítások és a meta-állítások közötti nagy távolság feloldásának egyik módját a logikában használt i *interpretáció függvény*, vagy más jelölésmóddal *mng jelentés* (*meaning*) *függvény* szolgáltatja. Az i interpretáció fordítja le az absztrakt matematikai objetumokat, interpretálja, melyre most a következő természetes megkötést tesszük:
Ha $a, b \in L$ eseményeknek megfelelő szimbólumok (vagy állítások), és $\rightarrow$ az implikáció, akkor teljesüljön, hogy:

$$i(a \rightarrow b) = i(a) \rightarrow i(b).$$

Továbbiakban az interpretáció függvényt nem írjuk ki.

A klasszikus logika a matematikai gondolkodás mélyén rejtőzik. Amikor egy klasszikus logikától eltérő $\mathcal{L}$ logikát axiómatizálunk, az axiómákról metaszinten a klasszikus logikával gondolkozunk. Ezért a klasszikus logika implikációját nem helyettesíteni, hanem kiegészíteni kell egy másik implikációval.

Nagyon fontos különbséget tenni a szemantikai implikáció és az implikáció konnexió között. A $\leq$ hálóművelet fejezi ki a *szemantikai implikációt*. Az $a \leq b$ jelenetése: 'Ha a igaz akkor b is igaz'. A $\leq$ reláció bizonyos értelemben $i(a)$ és $i(b)$ dolgokhoz kapcsolódik. Az implikáció (konnexió) az a és b elemek által meghatározott elem, melyet $a \to b$ alakban írunk.

Kunsemüller logikai axiómáiban csupán három logikai jel szerepel:
az *implikáció*, jele: $\Rightarrow$, neve: *kvantumimplikáció*,
a *diszjunkció*, jele: $\vee$,
a *negáció*, jele: $\neg$.

Ezekből a jelekből definiálja a többi logikai jelet:
Konjunkció, jele:$\wedge$, $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$.
Egyenlőség, jele: $=$, $A = B$ ha levezethető, hogy:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Klasszikus implikáció, jele: $\to$:

$$A \to B = \neg A \vee B.$$

3.6.1. Definíció. A *Kunsemüller-féle logikai axiómarendszer* a következő:

(K_a)	$A \Rightarrow B \vee A$
(K_b)	$A \vee A \Rightarrow A$
(K_c)	$A \vee B \Rightarrow B \vee A$
(K_d)	$A \vee (B \wedge C) \to (A \vee C)$
(K_e)	$(A \Rightarrow B) \to [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)]$
(K_f)	$(A \Rightarrow B) \to [(B \Rightarrow C) \to (A \Rightarrow C)]$
(K_g)	$(A \Rightarrow B) \to (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(K_h)	$[(A \wedge C) \vee B] \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Azt, hogy az axiómarendszert nemcsak a $\Rightarrow, \vee, \neg$ alapműveletekkel, hanem a származtatott jelekkel, $\to$ és $\wedge$ kiegészítve írtuk fel, egyszerűsítette az axiómák felírását.

Az axiómákból látható, hogy nem állítja, hogy $A \Rightarrow B = A \to B$ lenne. Tehát a két implikáció általában nem esik egybe!

Amikor azt mondjuk, hogy egyenlőségjel *szimmetrikus*, akkor ez azt jelenti, hogy:

$$\text{Ha} \quad A \Rightarrow B \quad \text{akkor} \quad B \Rightarrow A.$$

Ezen egy meta-tételt, azaz ítéletekre vonatkozó ítéletet értünk. A metaszinten most a klasszikus logika törvényeit alkalmazzuk. Az egyenlőségjel szimmetriáját úgy kell bizonyítanunk, hogy az

$$(*) \qquad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

formulát az axiómák sorába emeljük, s az e formulával bővített axiómarendszerből vezetjük le a

$$(B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$$

formulát. Természetesen, mivel a $(*)$ alatti formulát axiómának tekintjük, nem úgy gondoljuk, hogy minden A-ra, B-re fennáll, ellentétben a többi axiómával, hanem, hogy egy bizonyos A_0, B_0-ra. Más szóval A_0 és B_0 helyébe nem szabad új betűket helyettesíteni!

Tétel. *Kunsemüller rendszerében ha $A \Rightarrow B$, akkor $A \wedge B = A$, valamint, ha $A \wedge B = A$ akkor $A \Rightarrow B$.*

3.6.2. Definíció. A Kotasnál szereplő *kvantumlogika* definiáló axiómái:

$$(L_1) \qquad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$
$$(L_2) \qquad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$
$$(L_3) \qquad A \wedge B = B \wedge A$$
$$(L_4) \qquad A \vee B = B \vee A$$
$$(L_5) \qquad A \wedge (A \vee B) = A$$
$$(L_6) \qquad A \vee (A \wedge B) = A$$
$$(M) \qquad \text{Ha} \quad A \wedge C = A \quad \text{akkor} \quad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge C).$$
$$(N_1) \qquad A \wedge \neg A = B \wedge \neg B$$
$$(N_2) \qquad A \vee \neg A = B \vee \neg B$$
$$(O_1) \qquad \text{Ha} \quad A \wedge A = A \quad \text{akkor} \quad \neg A \wedge \neg B \neg B.$$
$$(O_2) \qquad \neg\neg A = A$$
$$(0) \qquad A \wedge (B \wedge \neg B) = C \wedge \neg C$$
$$(1) \qquad A \vee (B \vee \neg B) = C \vee \neg C$$

Az L jelű axiómák a hálóelméleti axiómák logikai világos átfogalmazása. Az M axióma a hálóelméleti modularitásnak felel meg. A többi axióma az ortokomplementaritást fejezi ki. Az N axiómák a komlementumosságot jelentik. Itt azonban a háló korlátelemeit nem jelöltük. Erre azért volt szükség, mert az értékmentes logikában a hálóelméleti jeleknek nincsen közvetlen logikai megfelelőjük.

Tétel. *A Kunsemüller axiómarendszerből levezethetők a kvantumlogika axiómái.*

Tétel. *A kvantumlogikában nem igaz, hogy az $A \to B$ reláció tranzitív, és a disztributivitási szabály sem teljesül. A kvantumlogikában azonosan igazak a*

(1) $(A \to B) \to [(Z \vee A) \to (Z \vee B)]$
(2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)]$
(3) $A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$

formulák.

Kotas, miként Kunsemüller, csupán a kvantumlogika 'ítéletkalkulusát' alapozta meg. Ez a körülmény növeli eredményeiknek jelentőségét, mithogy ezek minden ortokomplementumos moduláris hálóra érvényesek. Kotas axiómái nem szemléletesek, mert eléggé komplikáltak, ugyanis csak kétfajta implikációt és egy negációt használ.

3.6.3. Definíció. A *Kotas-féle kvantumlogikai axiómarendszer* a következő:

(K_1) $$A \Rightarrow (B \to A)$$
(K_2) $$A \to (B \Rightarrow A)$$
(K_3) $$(A \to B) \Rightarrow [A \Rightarrow (A \to B)]$$
(K_4) $$(A \Rightarrow B) \to [A \Rightarrow \neg(A \to \neg B)]$$
(K_5) $$(A \Rightarrow B) \to [(B \Rightarrow C) \to (A \Rightarrow C)]$$
(K_6) $$(A \Rightarrow B) \to [(\neg A \to C) \Rightarrow (\neg B \to C)]$$
(K_7) $$(\neg A \to B) \Rightarrow (\neg B \to A)$$
(K_8) $$[A \to (B \to C)] \Rightarrow [\neg B \to (A \to C)]$$
(K_9) $$(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \to \neg B) \to \neg A]$$
(K_{10}) $$[(A \to B) \to \neg A] \Rightarrow (A \to \neg B)$$
(K_{11}) $$\{[(A \to B) \to C] \to \neg A\} \Rightarrow [(A \to B) \to \neg(A \to C)]$$
(K_{12}) $$(A \Rightarrow B) \to (\neg B \Rightarrow \neg A)$$
(K_{13}) $$A \Rightarrow \neg\neg A$$
(K_{14}) $$\neg\neg A \Rightarrow A$$

Kotas nyomán definiáljuk a *diszjunkció*t, *konjunkció*t és az *ekvivalenciá*t:

$(\vee)$ $$A \vee B = \neg A \to B$$
$(\wedge)$ $$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$(\Leftrightarrow)$ $$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

A $\Leftrightarrow$ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Tétel. *A Kotas-féle axiómákból levezethetők a kvantumlogikát definiáló algebrai hálóelméleti axiómák.*

Próbáljunk új implikációt találni a klasszikus $a \to b = a^\perp \vee b$ helyett oly módon, hogy tulajdonságait gyengítjük! A szemantikai interpretációval való kapcsolat miatt természetes az alábbi megkötés egy $\to$ implikációra:

(E) $\quad a \le b$ akkor és csak akkor, ha $a \to b = 1$.

Továbbá megköveteljük a *modus ponens* teljesülését, valamint az ortokomplementációval való kompatibilitást:

(MP) $$a \wedge (a \to b) \le b$$

(MT) $$b^\perp \wedge (a \to b) \le a^\perp$$

(NG) $$a \wedge b^\perp \le (a \to b)^\perp$$

A négy feltételt, (E),(MP),(MT),(NG), röviden *minimális implikáció kritériumnak* (MIC) hívjuk. További természetes feltételeket fogalmazunk meg:

(IE) $\quad a \wedge b \le c$ akkor és csak akkor, ha $a \le b \to c$.

Ennek egy gyengített formája:

(EXP) $\quad$ Ha $a \wedge b \le c$ akkor $a \le b \to c$.

Az implikáció tranzitivitásának a hálóelméleti megfogalmazása:

(T) $$(a \to b) \wedge (b \to c) \le a \to c.$$

A tranzitivitási szabály gyengített változata:

(WT) $\quad$ Ha $(a \to b) = 1$ és $(b \to c) = 1$ akkor $(a \to c) = 1$.

A *gyengítési szabály*:

(W) $$b \to c \le (a \wedge b) \to c.$$

A *kontrapozíció* megfogalmazása:

(CN) $$a \to b = b^\perp \to a^\perp.$$

Vegyük észre, hogy minden ortohálón létezik legalább egy implikáció, mely teljesíti a (T) feltételt:

(US) $$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad a \le b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $0, 1$ hálóelemekkel való kapcsolatot a

(NS1) $$1 \to a = a$$

(NS2) $$a \to 0 = a^\perp$$

feltételek fejezik ki. (NS1) és (NS2) feltételeket röviden (NS) módon jelöljük. A *klasszikus implikáció kritérium*:

(CIC) $\quad a \wedge c \le b$ akkor és csak akkor, ha $c \le (a \to b)$.

A (CIC) gyengítése a *kvázi implikatív feltétel*:

(QIC) $\quad$ Ha $(a \wedge c) \le b$ akkor $a^\perp \vee (a \wedge c) \le (a \to b)$.

Tétel. *Legyen L ortomoduláris háló, és $\to$ olyan binér operáció L-en, mely teljesíti az (E),(MP),(T) és (NS) feltételeket. Ekkor L Boole-algebra.*

Az implikációval akkor könnyű számolni, ha az argumentumainak valamilyen polinomja:

(P) $\quad a \to b = p(a, b)$ ahol p kétváltozós ortoháló polinom.

Ortomoduláris hálón megengedhető, hogy bizonyos elemek között a klasszikus Boole-implikáció legyen az új implikáció is:

(LB) $\quad$ Ha aCb akkor $a \to b = a^{\perp} \vee b.$

Kotas megmutatta, hogy pontosan hat ortomoduláris hálópolinom teljesíti az (LB) feltételt:

$$a \to_1 b = a^{\perp} \vee (a \wedge b)$$
$$a \to_2 b = (a^{\perp} \wedge b^{\perp}) \vee b$$
$$a \to_3 b = (a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b^{\perp})$$
$$a \to_4 b = (a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b) \vee ((a^{\perp} \vee b) \wedge b^{\perp})$$
$$a \to_5 b = ((a \wedge (a^{\perp} \vee b)) \vee (A^{\perp} \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge B^{\perp})$$
$$a \to_6 b = a^{\perp} \vee b.$$

Állítás.

(1) *$\to_i$ teljesíti (LB)-t, ha $i = 1, ..., 6$.*
(2) *$\to_i$ teljesíti (NG)-t, ha $i = 1, ..., 6$.*
(3) *$\to_i$ teljesíti (E)-t, ha $i = 1, ..., 5$.*
(4) *$\to_i$ teljesíti (MP)-t, ha $i = 1, ..., 4$.*
(5) *$\to_i$ teljesíti (MT)-t, ha $i = 1, 2, 3, 5$.*

Megjegyzés.

(1) Három implikáció van, mely teljesíti az (LB),(NG),(E),(MP) és (MT) feltételek mindegyikét $\to_i \quad i = 1, 2, 3$.
(2) Disztributív hálónál a hat implikáció egyebeesik a klasszikus implikációval.
(3) (EXP) és (MIC) együtt ekvivalens (CIC) feltétellel.
(4) $\to_i \quad i = 1, 2, 3$ nem teljesíti (CIC) feltételt, tehát midegyiknél sérül az (EXP), tehát (IE) is.

Mittelstaedt tétele. *$\to_1$ teljesíti a (QIC) feltételt, és ha egy ortokomplementumos hálón létezik az $\Rightarrow$ implikáció, melyre igaz (MIC) és (QIC), akkor L ortomoduláris valamint $\Rightarrow$ egyértelmű, és $\Rightarrow = \to_1$.*

Bevezetünk egy új jelölést: $\Rightarrow_Q = \to_1$.

Az irodalomban $\Rightarrow_Q$ gyakran *Mittelstaedt-feltétel*, vagy *Sasaki hook* néven található. Mittelstaedt *fizikai kvázi-implikáció* néven használta.

Állítás. *$\Rightarrow_Q$ sérti a tranzitivitási (T) szabályt. Sőt a (WT) gyengített tranzivitási szabályt sem teljesíti.*

Az L_6 hálón létezik olyan a, b elem, hogy:

$$(I \Rightarrow_Q b) = b \quad \text{és} \quad (a \Rightarrow_Q b) = a^\perp \quad \text{de} \quad b \nleq a^\perp.$$

Mittelstaedt és Hardegree koncepciója szerint a $\Rightarrow_Q$ egy kitüntetett implikáció a többi közül, mely ha létezik, egyértelmű. Ezen kívül többféle implikációt lehet megadni, mint például a *C. I. Lewis-féle szigorú implikáció*, *Anderson-* és *Belnap releváns implikációja*, *Stalnaker-féle implikáció*, *D. Lewis-féle implikáció*, de ezekkel nem foglalkozunk részletesen.

4. Kvantummechanikai valószínűségszámítás

4.0. Bevezető

A kvantummechanikában az eseményeket valószínűségekkel jellemezhetjük. Ebben a fejezetben vizsgájuk meg az események hálóján értelmezett *valószínűségi mérték*ek és a velük szoros kapcsolatban álló operátorok néhány tulajdonságát.

Az első szakaszban a valószínűségi mértékek különböző típusait és az *általános valószínűségi változó*kat definiáljuk.

A második szakaszban a kvantummechanikai valószínűségszámítás Hilbert-tér formalizmusát követjük nyomon. Megemlítjük Gleason tételét, mely valószínűségi mértékeket azonosít a Hilbert-tér speciális operátoraival.

A harmadik szakaszban a Hilbert-tér formalizmust általánosítjuk nem szeparábilis Hilbert-terekre. Az általánosított Gleason-tételt mutatjuk be, valamint *Eilers-Horst-Drisch* témához kapcsolódó tételét, melynek kimondásánál érintjük a modern halmazelmélet egy számosságokról szóló problémáját.

A negyedik szakaszban két szeparábilis Hilbert-háló közti műveletettartó leképzést azonosítunk a Hilbert-tér bizonyos operátoraival a Wigner-tétel segítségével. Ez a tétel lesz az oka annak, hogy a 6. és 7. fejezetben az adott csoportok *projektív ábrázolás*át keressük.

Az ötödik szakasz a kvantummechanikai *mérés* fogalmát próbálja tisztázni. Itt felhasználjuk az univerzális algebráról szóló fejezet néhány tételét és konstrukcióját. Egy lehetséges elképzelést említünk meg egy kvanutmmechanikai objektum klasszikus műszerrel történő mérésének a matematikailag pontos értelmezésére.

A hatodik fejezetben a *spektrál-tételt* és néhány következményét említjük meg.

Irodalom

[BLM] P. Busch, P. Lahti, P. Mittelstaedt: *Quantum Theory of Measurment* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Dvu] A. Dvurecenskij: *Gleason Theorem and Its Applicatios* Mathematics and Its Applications (MIA) sorozat Kluwer Academic Publishers, Ister Science Press, Bratislava, 1993.

[LBM] P. Lahti, P. Busch, P. Mittelstaedt: *Some important classes of quantum mesurments and their information gain* Journal of Mathematical Physics, **32.** évfolyam (1991), 2770-2775.

[Loo] L. H. Loomis: *On the representation of σ-complete Boolean algebras* American Mathematical Sciences, **53.** évfolyam (1947), 757-760.

[Mat1] Tamás Matolcsi: *A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics.*

Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.
[Mat2] Matolcsi Tamás, Székely Sándor: *Matematiaki fizika I.*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[PP] P. Pták, S. Pulmanová: *Orthomodular structures as Quantum Logics*
Kluwer, Dordrecht, 1991.
[Pul] Sylvia Pulmanová: *Quantum measurments and quantum logics.*
Journal of Mathematical Physics, **35.** évfolyam (1994)
április, 1555-1572.
[Sik] R. Sikorski: *On the representation of Boolean algebras as field of sets*
Foundation of Mathematics, **35.** évfolyam (1948), 247-256.
[Var] V. S. Varadarajan: *Geometry of Quantum Theory I*
Van Nostrand, Princeton, 1968.

Az 1-4. szakaszok alapja [Dvu], [Mat1], [Mat2] és [Var]. Az 5. szakaszhoz tartozó irodalom: [BLM], [LBM], [Loo], [PP], [Pul] és [Sik]. A 6. szakasz alapja [Mat2].

4.1. Valószínűségszámítás Hilbert hálón

Ha a fizikai eseményeket egy háló elemeiként kezeljük, akkor az események valószínűségét egy hálón értelmezett függvénnyel adhatjuk meg.

4.1.1. Definíció.

(1) *Általános valószínűségi eseménytér*en vagy *logiká*n egy tetszőleges σ-additív ortomoduláris, részbenrendezett halmazt értünk. A logika elemeit *események*nek nevezzük.

(2) Legyen L logika. Egy $m : L \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ függvényt *L-en adott mérték*nek nevezünk, ha igaz rá, hogy:

$$m(0_L) = 0,$$

és ha T indexhalmaz esetén $x_i \in L, \quad i \in T$ páronként diszjunkt elemek, akkor

$$m(\bigvee_{i\in T} x_i) = \sum_{i\in T} m(x_i).$$

- m *végesen additív mérték*, vagy *töltés*, ha T indexhalmaz véges,
- m töltés *véges*, ha $\sup\{|m(a)| \quad |a \in L\} < \infty$,
- m *σ-additív* vagy *előjeles mérték*, ha T megszámlálható,
- m *teljesen additív előjeles mérték*, ha T tetszőleges halmaz,
- m *$\boldsymbol{n}$-additív*, ha $\boldsymbol{n}$ számosság és T $\boldsymbol{n}$ számosságú,
- m *pozitív*, ha $0 \le m(a)$ minden $a \in L$ esetén,
- m *valószínűségi mérték*,*állapot* vagy *törvény*, ha m pozitív és $m(1_L) = 1$.

(3) Legyen T tetszőleges nemüres halmaz. Jelölje $\mathcal{P}(T)$ a T hatványhalmazát. $\mathcal{P}(T)$ a tartalmazás művelettel disztributív ortomoduláris σ-hálóvá tehető. $\mathcal{P}(T)$-bek egy $\mathcal{B}(T)$ ortomoduláris σ-részhálóját *halmazalgebrá*nak hívjuk, T-t pedig alaphalmaznak.

(4) Egy $u : \mathcal{B}(T) \to L$ leképzést L-en adott T értékű *általános valószínűségi változó*nak vagy *$\mathcal{B}(T)$-mutató*nak nevezünk, ha teljesíti az alábbiakat:
$u(1_{\mathcal{B}(T)}) = 1_L$.
Ha $x, y \in \mathcal{B}(T)$ és $x \perp_{\mathcal{B}(T)} y$, akkor $\quad u(x) \perp_L u(y)$.
Ha $x_n \in \mathcal{B} \quad n \in \mathbb{N}$ páronként diszjunkt elemek, akkor:

$$u(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}^{\mathcal{B}(T)} x_n) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}^{L} u(x_n).$$

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor *valós mutató*ról beszélünk.

4.1.2. Definíció.

(1) Az u $\mathcal{B}(T)$-mutató *eloszlása* a p törvényre:

$$p \circ u.$$

(2) Az u valós mutató *m-edik momentuma* a p törvényre:

$$\eta_p^m(u) = \int_{\mathbb{R}} (id_{\mathbb{R}})^m d(p \circ u),$$

feltéve, hogy létezik az integrál. Ha $m = 1$, akkor u *várható értéké*ről beszélünk. Az első és a második momentumból számolhatjuk a *szórás*t:

$$\sigma_p(u) = \sqrt{\eta_p^2(u) - (\eta_p(u))^2}.$$

(3) A p törvény *szórásmentes*, ha $p^2 = p$.

(4) A $p_n \quad n \in \mathbb{N}$ páronként különböző törvények *σ-konvex kombinációjá*n egy

$$p = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$$

alakú, pontonkénti összegzéssel meghatározott törvényt értünk, ahol $0 \leq a_n$ és $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$. Ha csak véges sok együttható nem zérus, *konvex kombináció*ról, egyébként *valódi σ-konvex kombináció*ról, valamint ha egy kivétellel minden együttható zérus *triviális σ-kombináció*ról beszélünk.

(5) Egy p törvény *szélsőséges*, ha csak triviálisan állítható elő σ-konvex kombinációként.

Állítás.

(1) *Egy szórásmentes törvényre minden valós mutató szórása nulla.*

(2) *Ha L atomos disztributív háló, akkor létezik rajta szórásmentes törvény.*

(3) *Minden szórásmentes törvény szélsőséges.*

4.2. A kvantummechanikai valószínűségszámítás alaptételei

A kvantummechanikai Hilbert-tér formalizmus szempontjából rendkívül fontos Gleason-tétele, mely szerint ha nem tetszőleges hálón, hanem a Hilbert-hálón adunk meg egy p valószínűségi mértéket, akkor p-t azonosíthatjuk a Hilbert-tér egy speciális típusú operátorával.

4.2.1. Definíció. Egy Hilbert-téren értelmezett operátorról azt modjuk, hogy *kompakt*, ha minden korlátos halmazt relatív kompakt halmazba képez.
Egy K kompakt operátornak *létezik nyoma*, ha tetszőleges $(x_i)_{i \in I}$ teljes ortonormált rendszer esetén létezik a

$$\mathrm{Tr}(K) = \sum_{i \in I} \langle x_i, K x_i \rangle$$

összeg, és nem függ a teljes ortonormált rendszer választásától. Ebben az esetben K-t *nyomoperátor*nak, vagy *magoperátor*nak nevezzük, $\mathrm{Tr}(K)$-t pedig K *nyomának.*

Gleason-tétele. *Legyen H szeparábilis Hilbert-tér és $dimH \neq 2$, és legyen p valószínűségi mérték $L(H)$-n. Ekkor létezik egyértelműen egy W pozitív önadjungált, egységnyomú magoperátor, úgy, hogy*

$$p(P) = \mathrm{Tr}(PW) \qquad P \in L(H).$$

Megfordítva, ha W egy pozitív önadjungált, egységnyomú magoperátor, akkor a fenti formulával meghatározott p függvény valószínűségi mérték $L(H)$-n.

A tételben szereplő formulával megadható mértéket $\mathcal{P}(H)$-n *Gleason-mérték*nek nevezzük.

A kvantummechanikai valószínűségszámításban ismeretes a határozatlansági összefüggés, mely jól mutatja a klasszikus és a kvantumos valószínűségszámítás közötti különbséget.

Heisenberg tétele. *Legyenek A, B, C önadjungált operátorok a H szeparábilis Hilbert-téren, és legyen W törvény $\mathcal{P}(H)$-n. Teljesüljenek a következők:*

(1) *Létezik $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B \cap \mathcal{D}_C$ mindenütt sűrű lineáris altér, mely invariáns mindhárom operátorra.*

(2) *$(AB - BA)x = iCx$ minden $x \in \mathcal{D}$ esetén.*

(3) *Ha A, B és C közül valamelyik nem korlátos, akkor legyen W véges rangú,*

$$W = \sum_{n=1}^{N} a_n(e_n \otimes e_n) \qquad e_n \in \mathcal{D}.$$

(4) *Ha A, B és C korlátosak, akkor W tetszőleges.*

Ekkor:

$$\sigma_W(A)\sigma_W(B) \geq \frac{1}{2}|\eta_W(C)|.$$

Tétel. *Szeparábilis Hilbert-tér projektorhálóján nincs szórásmentes törvény.*

Megjegyzés. Ha W törvény egydimenziós projektor, $W = e \otimes e$, és P maga is egydimenziós, $P = x \otimes x$ ($||x|| = 1$) akkor

$$\mathrm{Tr}(PW) = |\langle e, x\rangle|^2.$$

4.3. Valószínűségszámítás nem szeparábilis Hilbert-téren

Gleason 1957-ben megjelent cikkében valószínűségi mértékeket azonosít szeparábilis Hilbert-tér bizonyos operátoraival. Most az azóta megismert új eredményeket tekintjük át: tételeket szeparábilis Hilbert-terekről, és általános mértékeről $\mathcal{L}(H)$-n.

Tétel. *Legyen m teljesen additív előjeles mérték $L(H)$-n, ahol H tetszőleges végtelen dimenziós valós vagy komplex Hilbert-tér. Ekkor létezik egyértelműen önadjungált T nyomoperátor H-n, hogy*

$$m(M) = Tr(TP_M), \quad \forall M \in L(H).$$

Legyen t bilineáris forma, melynek $D(t)$ értelmezési tartománya sűrű H-ban, és legyen W az egész H-n értelmezett lineáris operátor. A kompozíciójuk:

$$t \circ (W, W) : H \times H \to \mathbb{C} \quad (x, x) \mapsto t(Wx, Wx).$$

Ha minden $(x_i)_{i \in I}$ ortonormált bázis esetén létezik az

$$\sum_{i \in I} t(Wx_i, Wx_i)$$

összeg és független a bázis választástól, akkor az alábbi jelöléseket alkalmazzuk a kompozícióra:

$$t \circ (W, W) \in Tr(H) \quad \text{és} \quad Tr(t \circ (W, W)) = \sum_{i \in I} t(Wx_i, Wx_i).$$

Tétel. *Legyen H komplex vagy valós Hilbert-tér, $dimH \neq 2$. Legyen $\boldsymbol{n}$ számosság, és m egy $\boldsymbol{n}$-véges mérték $L(H)$-n. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) *Létezik egyértelműen egy t pozitív szimmetrikus bilineáris forma, melynek értékkészlete sűrű H-ban, úgy, hogy*

$$m(M) = \begin{cases} Tr(t \circ (P_M, P_M)) & \text{ha} \quad t \circ (P_M, P_M) \in Tr(H), \\ \infty \quad \text{egyébként}. \end{cases} \tag{1}$$

(2) *m-nek van tartója, azaz létezik olyan $M \in L(H)$, hogy $m(N) = 0$, akkor és csak akkor, ha $N \perp M$.*

(3) *m teljesen additív mérték.*

Az (1) formulával értelmezett mérték neve *általánosított Gleason-mérték*, vagy röviden *Gleason-mérték*.

Végtelen mértékek Gleason-tétele. *Legyen m egy σ-véges mérték $L(H)$-n, ahol H szeparábilis Hilbert-tér, $dimH \neq 2$. Létezik egyértelműen egy t pozitív szimmertrikus bilineáris forma sűrű értelmezési tartománnyal, hogy az m mérték kifejezhető az (1) képlettel.*

Egy $\boldsymbol{m}$ számosságról azt mondjuk, hogy *mérhető*, ha létezik olyan p valószínűségi mérték $\mathcal{P}(T)$-n, hogy $p(\{a\}) = 0$ minden $a \in T$ elemre, ahol a T halmaz számossága $\boldsymbol{m}$. Nem mérhető számosság például a megszámlálhatóan végtelen, a kontinuum, valamint a véges számosságok. (A mérhető számosságok létezése a halmazelmélet egyik jól ismert problémája.)

Eilers-Horst-, Drisch-tétele. *Minden véges m mérték $L(H)$-n Gleason-mérték, ha $dimH$ nem mérhető számosság és nem 2.*

4.4. Wigner tétele

4.4.1. Definíció. Legyen L_1 és L_2 két kvantumlogika és $\Phi : L_1 \to L_2$ leképzés közöttük. Ha Φ-re igaz, hogy

$$\Phi(x^\perp) = \Phi(x)^\perp$$
$$\Phi(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Phi(x_n)$$
$$\Phi(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \Phi(x_n)$$

akkor Φ-t *LATOM morfizmus*nak nevezzük. Ha $L_1 = L_2$ és Φ LATOM izomorfizmus, akkor Φ *σ-automorfizmus.*

Wigner klasszikus tétele $L(H)$ σ-automorfizmusainak a halmazát írja le, ha $dimH$ megszámlálható vagy véges, de nem kettö. Ha U unitér vagy antiunitér operátor H-n akkor a

$$\Phi_U(M) = U(M) = \{UxU^{-1} | x \in M\} \quad M \in L(H)$$

leképzés $L(H)$-nak σ-automorfizmusa.

Wigner-tétele. *Legyen Φ σ-automorfizmusa $L(H)$-nak, ahol H komplex vagy valós szeparábilis Hilbert-tér és $dimH \neq 2$. Ekkor létezik egy U unitér vagy antiunitér operátor H-n, hogy*

$$\Phi(M) = U(M) \quad M \in L(H).$$

Ha $\Phi_{U_1}(M) = \Phi_{U_2}(M)$ minden $M \in L(H)$ esetén, akkor $U_1 = cU_2$, ahol c az alaptest eleme, és $|c| = 1$.

4.4.2. Definíció. Legyen L_1 és L_2 kvantumlogika. Egy $\Phi : L_1 \to L_2$ leképzés *morfizmus*, ha $a, b \in L_1$ elemekre

(1) ha $a \perp b$ akkor $\Phi(a) \perp \Phi(b)$,
(2) $\Phi(a \vee_{L_1} b) = \Phi(a) \vee_{L_2} \Phi(b)$.

Ha a Φ morfizmusra igaz, hogy $\Phi(1_{L_1}) = 1_{L_2}$, akkor Φ *homomorfizmus.* Ha Φ (homo)morfizmus és az $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in L_1$ elemekre $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} a_i \in L_1$ és $a_i \perp a_j$ ha $i \neq j$ esetén teljesül, hogy

$$\Phi(\bigvee_{i\in\mathbb{N}}^{L_1} a_i) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}}^{L_2} \Phi(a_i)$$

akkor Φ *σ-(homo)morfizmus* vagy *teljes (homo)morfizmus.*

Fontos felhívni a figyelmet, hogy az így definiált (homo)morfizmusok nem azonosak a háló (homo)morfizmusokkal.

R. Jajte és P. Paszkiewicz általánosította Wigner tételét σ-homomorfizmusokra.

Tétel. *Legyen $\Phi : L(H) \to L(K)$ σ-homorfizmus, ahol H és K ugyanazon test feletti, kettőnél nagyobb dimenziós szeparábilis Hilbert-terek. Ekkor léteznek*

$$U_i : H_i \to H_i$$

unitér vagy antiunitér operátorok, ahol $i \in I = \{1, 2, 3, ..., dim\Phi\}$, $H_i = H$ és $K = \bigoplus_i H_i$, úgy, hogy

$$\Phi(M) = \bigoplus_{i \in I} U_i(M) \quad \forall M \in L(H).$$

4.5. Kvantummechanikai mérés

Legyen $(T, \mathcal{B}(T))$ mérhető tér, L egy σ-ortomoduláris részben rendezett halmaz (kvantumlogika). Legyen adott továbbá egy

$$u : \mathcal{B}(T) \to L$$

mutató. Ha az L hálóra megkötéseket teszünk, az u mutatót azonosíthajuk a mérhető függvényekkel, és viszont.

Loomis-Sikorski tétel. *Ha L Boole σ-algebra, akkor létezik egy $(\Sigma, \mathfrak{L})$ mérhető tér és egy $h : \mathfrak{L} \to L$ mutató, hogy*

$$L = \{h(E) | E \in \mathfrak{L}\}.$$

Legyen L kvantumlogika és B teljes Boole algebra. Jelöljük $L[B]$-vel a Boole-hatványt.

Állítás.

$$L[B] = \{f : L \to B | f(l_1) \wedge f(l_2) = 0_B \quad \text{ha} \quad l_1 \neq l_2 \quad \text{és} \quad \bigvee_{l \in L} f(l) = 1_B\}.$$

Definiáljuk a $\leq$ részbenrendezést $L[B]$-n:

$$f \leq g \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad \bigvee_{x \leq_L y \in L} f(x) \wedge g(y) = 1_B.$$

Legyenek $\mathfrak{o}$ és $\imath$ a következő elemek $L[B]$-ben:

$$\mathfrak{o}(x) = \begin{cases} 1_B & \text{ha} \quad x = 0_L \\ 0_B & \text{ha} \quad x \neq 0_L \end{cases}$$

$$\imath(x) = \begin{cases} 1_B & \text{ha} \quad x = 1_L \\ 0_B & \text{ha} \quad x \neq 1_L \end{cases}$$

Legyen $g = f'$ akkor, ha $g(x) = f(x^{\perp})$ minden $x \in L$ elemre.

Állítás. $(L[B], \leq, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *ortomoduláris részbenrendezett halmaz. (Általában nem σ-ortomoduláris!) Az $L[B]$ ortomoduláris háló, ha L ortomoduláris háló.*

Legyen L kvantumlogika és B Boole algebra. Az *L-nek B-re korlátos Boole-hatványa* (*Pták-összege*) egy, az L-ből B-be menő véges értékkészletű olyan függvényeknek $L \oplus B$ halmaza, melyekre:

$$f(l_1) \wedge f(l_2) = 0_B \quad \text{ha} \quad l_1 \neq l_2 \quad \text{és} \quad \bigvee_{l \in L} f(l) = 1_B.$$

Az előhöz hasonlóan definiálhatjuk $L \oplus B$-n a $\leq, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}$ műveleteket. Ekkor $L \oplus B$ ortomoduláris részbenrendezett halmaz lesz.

Legyen $\lambda : L \to L[B]$ leképezés:

$$\lambda(l)(x) = \begin{cases} 1_B & \text{ha} \quad x = l \\ 0_B & \text{ha} \quad x \neq l, \end{cases}$$

valamint $\beta : B \to L[B]$:

$$\beta(b)(x) = \begin{cases} b & \text{ha} \quad x = 1_L \\ b' & \text{ha} \quad x = 0_L \\ 0_B & \text{ha} \quad x \neq 1_L \quad \text{és} \quad x \neq 0_L. \end{cases}$$

Állítás. *λ és β injektív beágyazások, melyek megőrzik a véges és megszámlálhatóan végtelen infimumot, szuprémumot.*

Állítás. *Minden $f \in L[B]$ felírható*

$$f = \sum_{i \in I} \lambda(l_i) t_i$$

alakban, ahol $(t_i)_{i \in I}$ egységosztása B-nek, és az $(l_i)_{i \in I}$ elemekre teljesül, hogy:

$$f(x) = \bigvee_{i \in I} \lambda(l_i)(x) \wedge t_i.$$

Megjegyzés. A definíciók alapján igazolható, hogy ha $f = \sum_{i \in I} \lambda(l_i) t_i$ és $g = \sum_{j \in J} \lambda(k_j) s_j$, akkor

$$f \vee g = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda(l_i \vee k_j) t_i \wedge s_j, \qquad f \wedge g = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda(l_i \wedge k_j) t_i \wedge k_j,$$

feltéve, hogy az összeg létezik.

Legyen m állapot L-en és μ állapot a B teljes Boole algebrán.
Definiáljuk az $m \otimes \mu : L[B] \to [0, 1]$ leképzést:

$$(m \otimes \mu)(\sum_{i \in I} \lambda(l_i) t_i) = \sum_{i \in I} m(l_i) \mu(t_i).$$

Ekkor minden $l \in L$ és $b \in B$ elemre:

$$(m \otimes \mu)(\lambda(l) \wedge \beta(b)) = m(l) \mu(b).$$

Speciálisan:

$$(m \otimes \mu) \circ \lambda = m \qquad (m \otimes \mu) \circ \beta = \mu.$$

Állítás. *$m \otimes \mu$ állapot, mely végesen additív. Az $m \otimes \mu$ neve szorzatállapot.*

Teljesen hasonlóan definiálható a szorzatállapot $L \oplus B$-n.

Állítás. *Legyen L kvantumlogika, z az L centrumának egy eleme. Minden végesen additív (σ-additív) m állapothoz definiálható az*

$$m_z : L \to [0,1] \quad x \mapsto m(z \wedge x) \tag{4.5.1.}$$

leképzés, mely végesen additív (σ-additív) állapot L-en.

Egy kvantumos rendszer klasszikus eszközzel történő mérésének matematikai megfogalmazását adjuk most meg.

4.5.1. Definíció. A $\mathcal{Z} = \langle L, X, T, \mathcal{B}(T)\rangle$ négyes *mérendő mennyiség*, ahol X a T alaphalmazú $\mathcal{B}(T)$ halmazalgebrán értelmezett, L kvantumlogikába képző mutató.

Legyen $\mathcal{L}$ egy kvantummechanikai rendszer, amit L kvantumlogikával írunk le, és $\mathcal{A}$ egy mérőrendszer, amit azonban egy Boole σ-algebrával írunk le, vagyis a mérőberendezést klasszikusnak tekintjük. Mérés során a két rendszer 'összegét', $\mathcal{L} + \mathcal{A}$-t, kell valamilyen jól kezelhető módon leírni. Ennek az összetett rendszernek megfelelő matemetikai struktúra alapja lesz $L[B]$ és $L \oplus B$. Először $L[B]$-t használták a mérés leírásához, de kiderült, hogy minden használt formula átvihető $L \oplus B$-re, sőt $L \oplus B$ szerkezetéből adódóan bizonyos esetekben kényelmesebb a használata, mint $L[B]$-nek. Ezért most $L \oplus B$-re építve határozzuk meg a mérés fogalmát.

Az *összetett rendszer, $\mathcal{L} + \mathcal{A}$ állapotait*, $\mathcal{P}$-t, a szorzatállapotok konvex kombinációjának tekintjük:

$$\mathcal{P} = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i m_i \otimes \mu_i, \qquad 0 \le a_i, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = 1.$$

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{L}$-hez kapcsolódó X mutatót szeretnénk kimérni, ami a T alaphalmazhoz tartozó $\mathcal{B}(T)$ halmazalgebrán van értelmezve. Ekkor választunk egy mérőberendezést.

4.5.2. Definíció. Az $\mathcal{A} = \langle B, X_{\mathcal{A}}, T_*, T_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}(T_{\mathcal{A}}), f\rangle$ hatost *mérőberendezés*nek nevezzük, ahol B Boole σ-algebra; $X_{\mathcal{A}}$ mutató, mely a $T_{\mathcal{A}}$ alaphalazú $\mathcal{B}(T_{\mathcal{A}})$ halmazalgebrán van értelmezve, és B-be képez; valamint $f : T_* \to T_{\mathcal{A}}$ egy mérhető függvény.
(A berendezés a T_* alaphalmazon értelmezett mutatót 'méri'.)

A *$\mathcal{L}$ rendszer kezdeti- és végállapotainak $\mathcal{P}_L$ halmaza* legyen az L-en értelmezett szorzatállapotok konvex kombinációinak halmaza. Hasonlóan definiáljuk $\mathcal{P}_B$-t, mint a *mérőműszer kezdeti- és végállapotainak halmazá*t.

A mérés egy kölcsönhatás $\mathcal{L}$ és $\mathcal{A}$ között, melynek hatása az összetett rendszer állapotának megváltozása. Ezt az *állapotváltozás*t írjuk le egy $V : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ konvexitást megörző leképzéssel. Ha $V(m \otimes m_{\mathcal{A}})$ a mérés végállapota, akkor a 'megszorításai', $V(m \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ \lambda$ és $V(m \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ \beta$ egyértelműen meghatározzák $\mathcal{L}$ és $\mathcal{A}$ végállapotát; és fordítva: $\mathcal{L}$ és $\mathcal{A}$ végállapotai egyértelműen meghatározzák $\mathcal{L} + \mathcal{A}$ végállapotát.

4.5.3. Definíció. A $\mathcal{Z} = \langle L, X, T, \mathcal{B}(T)\rangle$ mérendő mennyiség $\mathcal{A} = \langle B, X_{\mathcal{A}}, T_*, T_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}(T_{\mathcal{A}}), f\rangle$ mérőberendezéssel történő *mérése* egy $\mathcal{M} = (\mathcal{Z}, \mathcal{A}, m_{\mathcal{A}}, V)$ négyes a fenti jelöléseket alkalmazva, melyre igaz, hogy $T_* = T$ és

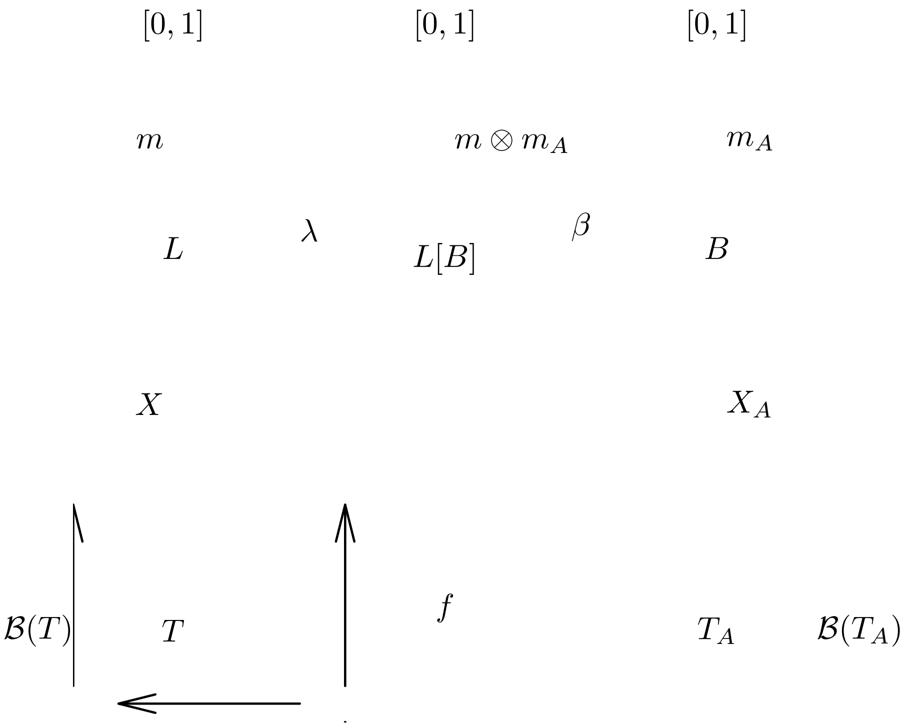
$$m(X(F)) = V(m \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ \beta(X_{\mathcal{A}}(f(F))) \qquad \forall F \in \mathcal{B}(T) \quad \forall m \in \mathcal{P}_L.$$

Ha ezenkívül teljesül még a

$$m(X(F)) = V(m \otimes m_{\mathcal{A}}) \circ \lambda(X(F))$$

formula minden F-re és m-re, akkor $\mathcal{M}$-et *első típusú mérés*nek nevezzük.
Az $\mathcal{M}$ mérés összesen 11 adatot tartalmaz, ha figyelembe vesszük a $T_* = T$ megkötést.

Az alábbi ábra mutatja a méréssel kapcsolatos fogalmak és definíciók szerkezetét:



4.5.4. Definíció. Legyen $\mathcal{M}$ mérés esetén adott $F \in \mathcal{B}(T)$ és $m \in \mathcal{P}_L$. Legyen az

$$I_{\mathcal{M}}(F)(m) : L \to [0, 1]$$

leképzés az alábbi módon megadva:

$$I_{\mathcal{M}}(F)(m) = V(m \otimes m_{\mathcal{A}})_{\beta[X_{\mathcal{A}}(f(F))]} \circ \lambda.$$

Igazolható, hogy $I_{\mathcal{M}}(F)(m)$ σ-additív mérték L-en, ugyanis minden $b \in B$ esetén $\beta(b)$ eleme az $L[B]$ és $L \oplus B$ hálók centrumainak. Az $I_{\mathcal{M}}(F)(m)$ és az X mutató közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{M}}(F)(m)(1_L) &= V(m \otimes m_{\mathcal{A}})_{\beta[X_{\mathcal{A}}(f(F))]} \circ \lambda(1_L) \\ &= V(m \otimes m_{\mathcal{A}})(\beta[X_{\mathcal{A}}(f(F))] \wedge \lambda(1_L)) \\ &= m(X(F)) \end{aligned}$$

minden F-re és m-re. Emlékeztető: az alsó indexet a (4.5.1.) képlettel definiáltuk.

4.5.5. Definíció. $\mathcal{M}$ mérés *ismételhető*, ha minden $E, F \in \mathcal{B}(T)$ és m esetén

$$I_{\mathcal{M}}(E)[I_{\mathcal{M}}(F)(m)](1_L) = I_{\mathcal{M}}(E \cap F)(m)(1_L).$$

4.5.6. Definíció. $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ *ekvivalensek*, ha

$$I_{\mathcal{M}_1} = I_{\mathcal{M}_2}.$$

Az így definiált fogalmakról a következőket tudjuk:

Tétel. *Minden X mutatóhoz létezik mérés.*

Tétel. *Minden ismételhető mérés első típusú.*

4.5.7. Definíció. Legyen L logika, és M az L-en értelmezett állapotok egy halmaza. Azt mondjuk, hogy M *gazdag*, ha minden $a, b \in L$ elemre teljesül:

$$\text{ha} \quad a \not\leq b \quad \text{akkor} \quad \exists m \in M: \quad m(a) = 1, \quad m(b) \neq 1.$$

Egy L logikát és egy gazdag M halmazt *spektrális logiká*nak hívunk, ha minden affin $q : M \to [0,1]$ funkcionálhoz létezik olyan y valós mutató, hogy minden $s \in M$ esetén

$$q(s) = s(y).$$

Az (L, M) párt *u-spektrális logiká*nak nevezzük, ha az y valós mutató egyértelmű.

A szeparábilis Hilbert tér projektorhálója az állapotok halmazával u-spektrális. Sőt ennél több is igaz, minden Neumann algebra projektorhálója a Gleason állapotok halmazával u-spektrális.

Tétel. *Legyen (L, M) u-spektrális logika, és $\mathcal{M}$ az L értékkészletű X mutató mérése úgy, hogy $\mathcal{P}_L = M$. Ekkor ha $\mathcal{M}$ első típusú, akkor megismételhető.*

4.5.8. Definíció. Az X egy $\mathcal{M}$ méréséről azt mondjuk, hogy *ideáilis*, ha minden $m \in \mathcal{P}_L$ állapotra és minden y valós mutatóra igaz a következő implikáció:

$$m(y) = 1 \Longrightarrow I_{\mathcal{M}}(T)(m)(y) = 1.$$

A mérés definíciójánál figyelembe vettük, hogy a mérés megváltoztatja a mérendő rendszer állapotát. Ha ez a változás elhanyagolható, akkor ideális mérésről beszélünk.

Tétel. *Egy $(L, \mathcal{P}_L)$ u-spektrális logikán az ideális mérés megismételhető.*

Probléma. Ha a mérőrendszert klasszikusnak tekintjük, vagyis Boole-algebrával leírhatónak, akkor a Boole-hatvány segítségével megadható a mérés értelmezése, mint egy klasszikus és egy kvantumos rendszer kölcsönhatása. Ha azonban a mérőrendszert is kvantumosnak tekintjük akkor vajon a Boole-hatványnál általánosabb Boole-szorzat konstrukció lehetővé teszi-e a mérés, kísérlet, műszer kifejezések definiálását?

4.6. Spektráltétel

4.6.1. Definíció. Legyen $\mathcal{B}(T)$ adott halmazalgebra, $L(H)$ a H komplex Hilbert-tér projektorhálója. Egy $P : \mathcal{B}(T) \to P(H)$ leképzés *projektormérték*, ha

(1) $P(T) = id_H$,
(2) Ha A, B diszjunkt halmazok $\mathcal{B}(T)$ elemei, akkor $P(A) \perp P(B)$,
(3) Ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ páronként diszjunkt elemek $\mathcal{B}(T)$-ben, akkor

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

A P leképzés rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \qquad \forall E, F \in \mathcal{B}(T).$$

Jelölje $x, y \in H$ esetén $\mu(x, y)$ az $E \mapsto \langle x, P(E), y\rangle$ hozzárendelési utasítással értelmezett $\mathcal{B}(T) \to \mathbb{C}$ leképezést.

Állítás. *$\mu(x, y)$ komplex mérték.*

Ha $x \in H$, akkor jelölje $L^2(x, P)$ a $\mu(x, x)$ mérték szerint négyzetesen integrálható fügvények halmazát.
Ha f komplexértékű $\mathcal{B}(T)$-mérhető függvény, akkor jelölje $D(f, P)$ azon $x \in H$ elemek halmazát, amelyekre $f \in L^2(x, P)$.

Állítás. *A $D(f, P)$ halmaz a H Hilbert-tér sűrű lineáris altere.*

Állítás. *Ha f komplexértékű $\mathcal{B}(T)$-mérhető függvény, akkor egy és csak egy olyan $\hat{P}(f) : D(f, P) \to H$ lineáris operátor van, amelyik kielégíti a következő összefüggést:*

$$\langle x, \hat{P}(f)y\rangle = \int_T f d\mu(x, y) \quad y \in D(f, P), x \in H.$$

A $\hat{P}(f)$ operátort az f *függvény P projektormérték szerinti integrálján*ak nevezzük. A komplex értékű $\mathcal{B}(T)$-mérhető függvények halmazán értelmezett

$$\hat{P} : f \mapsto \hat{P}(f)$$

leképzést a P *projektormérték szerinti integrál*nak nevezzük.

Állítás. *Ha f komplexértékű $\mathcal{B}(T)$-mérhető függvény és $x \in D(f, P)$, akkor*

$$\|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_T |f|^2 d\mu(x, x).$$

Állítás. *Minden f komplexértékű $\mathcal{B}(T)$-mérhető függvény esetén $\hat{P}(f)$ normális operátor, azaz*

(1) *$\hat{P}(f)$ zárt operátor,*
(2) *$\hat{P}(f)$ értelmezési tartománya sűrű H-ban, és egyenlő a $\hat{P}(f)^*$ értelmezési tartományával,*
(3) *$\hat{P}(f)^*\hat{P}(f) = \hat{P}(f)\hat{P}(f)^*$.*

4.6.2. Definíció. Az $E \in \mathcal{B}(T)$ halmazt *P-nullhalmaz*nak nevezzük, ha $P(E)$ a zéró operátor. Ha valamilyen tulajdonság a T halmaz minden pontján teljesül, kivéve egy P-nullhalmaz pontjait, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó tulajdonság a *T halmazon P-majdnem mindenütt (m.m.)* teljesül.

Állítás.

(1) *$\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor önadjungált, ha $\bar{f} = f$ P-m.m.*
(2) *$\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor unitér, ha $|f| = 1$ P-m.m.*
(3) *$\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor projektor, ha $f = f^2$ P-m.m.*

4.6.3. Definíció. A P projektormérték $\sigma(P)$ *tartója* azon pontok halmaza, melyek nem tartoznak egyetlen nyílt P-nullhalmazhoz sem.

Spektráltétel. *Ha A normális operátor a H Hilbert-téren, akkor létezik pontosan egy olyan $P_A : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$ projektormérték, melyre $A = \hat{P}_A(id_{\mathbb{C}})$, azaz*

$$A = \int_{\mathbb{C}} id_{\mathbb{C}} dP_A.$$

Továbbá a P_A projektormérték tartója egyenlő az A operátor $\delta(A)$ spektrumával.

A P_A projektormértéket A *spektrálfelbontásá*nak nevezzük.

A spektráltétel alapján a valós mutatókat azonosíthatjuk az önadjungált operátorokkal. Legyen P valós mutató, azaz valós projektormérték, és legyen

$$A = \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} dP.$$

Ekkor A önadjungált operátor, melyet valós mutatónak tekintünk. Ekkor A m-edik momentuma a W törvényre vonatkozóan:

$$\eta_W^m(A) = \int_{\mathbb{R}} x^m Tr(P(dx)W).$$

Ha A korlátos, akkor az előbbi formula

$$\eta_W^m(A) = Tr(A^m W)$$

alakra egyszerűsödik.

5. A kvantummechanikai modellek alapjai

5.0. Bevezető

A kvantummechanika a világban tapasztalható fizikai jelenségek egy részének a *matematikai modell*je. A klasszikus mechanika, az elektrodinamika, vagy például a termodinamika szintén matematikai modellek, melyek olyan kérdésekre adnak lehetséges magyarázatokat, melyeket nem értenénk meg a kvantummechanikai modell alapján.

Egy modellnél elengedhetetlen az érvényességi körének és az alapfeltevéseinek pontos tisztázása. A kvantummechanika modellnél ezt ebben a fejezetben vizsgáljuk meg, kiegészítve olyan megjegyzésekkel, melyek talán elősegítik a modell szélesebb körű alkalmazását, vagy logikai és filozófiai szempontok szerint természetesebbé teszik a modell alapjait képző elveket.

Irodalom

[BW] A. R. Bernstein, F. Wattenberg: *Non-standard measure theory*
az alábbi könyvben található meg:
W. A. J. Luxenburg (szerkesztő):*Applications of model theory to algebra analysis and probability*
Winston, New York, 1969.

[Oni] A. L. Onishchik (szerkesztő): *Lie Groups and Lie Algebras I*
Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) sorozat 20. kötet
Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Ser] J. P. Serre:*Lie algebras and Lie groups*
Benjamin, New York, 1965.

A fejezetben megadott *absztrakt,* $\boldsymbol{A}$ *algebrához tartozó-, nagy számosságokra általánosított kvantummechanikai modell* koncepciójával még nem találkoztam.

5.1. Szimmetria és logika

A kvantummechanikai leírásmód alapja két fizikai fogalom, a *szimmetria* és az *események logikája.* Ezekről a fogalmakról mindennapos tapasztalataink vannak, de nehéz korrekt, az eddigi kvantummechanikai modellel konzisztens olyan elméletet felállítani, melyek 'elemibb' fogalmakból indulnak ki, és ahol ezek a fogalmak pontosan definiálva vannak.

Vizsgáljuk meg először a kvanutmmechanikai modell alapjának a *szimmetriá*val kapcsolatos részét. A világ szimmetriái (fizikai értelemben) általában egy transzformációval szembeni invarianciát jelentek. Ezek a transzformációk csoportot alkotnak. Első ránézésre nem egyértelmű, hogy ennek a csoportnak természetes módon lenne topológiai struktúrája, azonban itt nem részletezett, meggyőző érvek sorakoznak egy 'természetes topológia' mellett. Ezért általában a szimmetriacsoportokat topologikus csoportoknak tekintjük. Sőt, a fizikában gyakran felmerülő szimmetriacsoportok (pl.: *Galilei-*, *Lorentz-*, *Poincaré-csoport*) Lie-csoportok. A szimmetria szempontjából a kvantummechanika egy, a jelenségek invarianciáját kifejező G topologikus csoporton, szűkebb értelemben Lie-csoporton alapul.

Térjünk rá az *események logikájá*nak a fogalmi tisztázására. Az események halmazát felruházzuk műveletekkel, ezek a és b eseményekre a következők:

$$\begin{aligned} \neg a: &\quad a \quad \text{esemény ellentetje, nem} \quad a \\ a \wedge b: &\quad a \quad \text{és} \quad b \quad \text{esemény} \\ a \vee b: &\quad a \quad \text{vagy} \quad b \quad \text{esemény.} \end{aligned}$$

A bevezetett logikai fogalmakra kétféleképpen tekinthetünk. Egyszer, mint a megszokott, hétköznapi fogalmaknak az események halmazára való kiterjesztésére. Ekkor természetesen merül fel a kérdés, hogy mennyiben jogos két esemény közti logikai művelet végeredményét eseménynek tekinteni. Másodszor, mint az eseményeken értelmezett, esemény értékű absztrakt logikai műveletekre. Ekkor meg kell vizsgálni, mennyiben felelnek meg ezek a műveletek a logikai fogalmainknak. A két felfogás leginkább filozófiai árnyalatban különbözik egymástól, mi az elsőként leírt szemléletmódot követjük, azzal a feltevéssel, hogy eseménynek tekintjük az $\neg a, a \wedge b, a \vee b$ jelenségeket.

Az események halmazát a fenti műveletekkel *ortokomplementumos háló*nak fogjuk tekinteni. Ez a háló reprezentálja a kvantummechanika logikáját. Az alábbi helyeken foglalkoztunk részletesebben egyéb megközelítésmódokkal:

(1) A (3.1.) szakasz végén érintőlegesen felsoroltunk néhány egyéb lehetséges módot a fizikai jelenségek logikájára.

(2) A kvantumimplikációról szakaszban megadtuk Kotas és Kunsemüller kvantumlogika axiómarendszerét, melyek a szokásostól eltérő módon kezelik a Boole-logika általánosításának problémáját.

(3) A (2.4.) szakaszban tárgyalt dualitási tételek szerint a Boole-logikák egyértelműen megfeleltethetők Boole-gyűrűknek és Boole-tereknek. Ezek szerint elképzelhető, hogy a Boole-logika általánosításánál célszerűbb a Boole-terek vagy Boole-gyűrűk általánosítása.

Legyen G transzformáció Lie-csoport, mely a fizikai jelenségek szimmetriáját fejezi ki és legyen L ortokomplementumos háló, mely a kvantumos jelenségek logikáját reprezentálja. A háló minden eleme egy eseménnyel azonosítható. Legyen $g \in G$ adott csoportelem, ekkor a g transzformáció hatása matematikailag az események hálójának egy transzformációjában jelenik meg. Ha nem szabunk megkötést a háló megváltozásának a mértékére, akkor meglehetősen elbonyolódik a matematikai leírásmód, éppen ezért feltételezzük, hogy minden g elemhez tartozó T_g hálótranszformáció LATOM-hálóautomorfizmus.

Jelöljük a vizsgálandó események halmazát az F szimbólummal. A G csoportnak adott a hatása F-en. Legyen E egy esemény és gE az E esemény g-vel való transzformáltja. Legyenek Q_E és Q_{gE} az E és gE eseményeknek megfelelő hálóelemek. Ekkor természetesen adódik az alábbi megkötés az eddig bevezetett fogalmakra:

(5.1.1.) $$T_g(Q_E) = Q_{gE}.$$

Ezt megköveteljük minden Q_E hálóelemre és $g \in G$ transzformációra. Legyen T a G csoport ábrázolása az L háló LATOM-automorfizmusainak a halmazán, és legyen Q az események halmazáról L-be ható leképzés, melyre igaz, hogy az események között lévő *és, vagy, nem* logikai műveleteket az L háló $\wedge, \vee, \neg$ függvényeibe képzi.

A kvantummechanikában az eseményeket valószínűségekkel írjuk le, aminek matematikailag az L hálón egy m valószínűségi mérték fog megfelelni. Az $m(Q_E)$ szám adja meg az E esemény valószínűségét. Az m mértékek *állapot*okat jelentenek. Legyen $\mathcal{M}$ az állapotok megfelelő halmaza.

Az eddigiek alapján, a fenti jelöléseket alkalmazva, az *absztrakt kvantummechanikai modell* az

(5.1.2.) $$\langle F, G, L, T, Q, \mathcal{M} \rangle$$

ötös, mely minden E eseményre és $g \in G$ elemre teljesíti az (5.1.1.) egyenletet. A fenti ötösből az F és G adatok megfigyeléseken alapulnak, jelentésük: az fizikai események F részhalmaza invariáns a G transzformációkkal szemben. Az L háló szabadon választott, azonban figyelembe kell venni, hogy ha L 'túl egyszerű', akkor nem adja vissza hűen a fizikai jelenségeket, ha 'túl bonyolult', akkor nehéz matematikailag kezelni. A G csoport T reprezentációjának a megtalálása meglehetősen nehéz adott L háló esetén, és közel sem biztos, hogy egyértelmű. A reprezentációk közül kell kiválogatni, tapasztalati szempontok szerint, a fizikailag relevánsakat. A Q függvény létesít kapcsolatot az események absztrakt halmaza és a konkrét L háló között.

Legyen $\boldsymbol{A} = \langle A, F, \phi \rangle$ egy $(\mathcal{F}, \mu)$-típusú algebra (2.1.2. definíció), melynek **Con**A kongruenciahálója ortokomplementumos. Az absztrakt kvantummechanikai modell után definiáljuk az $\boldsymbol{A}$-*algebrához tartozó kvantummechanikai modell*t, mely az alábbi ötössel jellemezhető:

(5.1.2.) $$\langle \boldsymbol{F}, G, \mathbf{Con}\boldsymbol{A}, T, Q, \mathcal{M} \rangle.$$

Itt F és G szerepe ugyanaz mint az előbbi modellnél. Az előző modellben lévő L háló szerepét itt az $\boldsymbol{A}$ algebra $\mathbf{Con}A$ kongruenciahálója játssza. A T függvény a G csoport ábrázolása a $\mathbf{Con}A$ háló LATOM-izmorofizmus csoportján, Q az események F halmazáról $\mathbf{Con}A$-ba ható, az előbb leírt tulajdonságokkal rendelkező leképzés. Az események valószínűségét jellemző m leképzés a $\mathbf{Con}A$ hálón értelmezett valószínűségi mérték. Megköveteljük továbbá minden $g \in G$ elemre és $E \in F$ eseményre a (5.1.1.) egyenletet. Ha az $\boldsymbol{A}$ algebra komplex, szeparábilis Hilbert-tér, akkor egyszerűen csak *kvantummechanikai modell*ről beszélünk.

A (3.3.) szakaszban láttuk, hogy a H komplex, szeparábilis Hilbert-tér projektorhálójának műveletei kifejezhetők egyszerű algebrai műveletekkel. A (4.2.) szakaszban leírt Gleason-tétel alapján az m valószínűségi mértéket azonosíthatjuk egy speciális W_m önadjugált operátorral, valamint, a (4.4.) szakaszban ismertetett Wigner-tétel értelmében, adott T_g LATOM-hálóautomorfizmus megfeleltethető egy unitér vagy antiunitér operátornak (egységnyi számszorzó erejéig egyértelműen). A (4.6.)-ban található spektráltétel szerint a valós mutatók az önadjungált operátorokkal azonosíthatók. Ezekből az azonosításokból látszik, hogy a kvantummechanikai modellt jellemző ötösből az általunk választott F és G mennyiségek kivételével mindent visszavezettünk Hilbert-téren definiált, könnyen kezelhető operátorokra.

A G topologikus csoportnak Hilbert-hálók LATOM-automorfizmusain történő ábrázolása esetén fontos szerepet kap a G csoport topológiája. Ugyanis az egységnyi számszorzó erejéig egyértelmű unitér vagy antiunitér operátorok halmazán természetes módon értelmezhető topológia, és a G csoport ezen halmazon való ábrázolásai közül csak azokat vesszük figyelembe, melyek folytonosak.

A Hilbert-térhez tartozó kvantummechanikai modell annyira jól működik, hogy érdemes két más irányú általánosításán is elgondolkozni. Az egyik alapja a nemstandard valós- illetve komplex számok feletti Hilbert-terek. Ezen terekhez rendelhető hálókat és tulajdonságaikat a (3.4.) szakaszban tekintettük át. Érdemes megjegyezni, hogy ezen hálók egy része nem ortokomplementumos.

A másik általánosítást akkor kapjuk, ha nem szeparábilis komplex Hilbert-teret veszünk alapul. (Ekkor a Hilbert-tér dimenziójának a számossága nagyobb, mint megszámlálhatóan végtelen.) Ezen terekről a (4.3.) szakaszban szóltunk. Egyik érdekességük, hogy a Gleason-tétel kicsit módosított formában igaz rájuk.

A következőkben a fizikai mennyiségek mérőszámait általánosítjuk. Vegyük például a hosszúságmérést alapul. A tapasztalatok alapján feltételezhetjük, hogy a lehetséges hosszúságértékek egydimenziós vektorteret alkotnak, egy legalább megszámlálhatóan végtelen számosságú test felett. Ilyen például az $\mathbb{R}$ valós számok teste. Arról azonban nincs tapasztalatunk, hogy ennek a testnek a számossága éppen kontinuum. A kvantummechanikai modellnek (és a legtöbb fizikai modellnek) lényeges része, hogy a mérhető mennyiségeket valós számtest feletti egydimenziós vektortérnek tekinti. Láttuk azonban, hogy például az ultraszorzat képzés segítségével hogyan kaphatunk megszámlálhatóan végtelennél nagyobb számosságú testeket, melyek tulajdonságai lényegében a valós számokéval egyeznek meg.

Legyen J a valós számoknak valamely végtelen számosságú halmazon megadott ultraszűrőhöz rendelt ultrahatványa. Ekkor a $\mathcal{J}$ J feletti egydimenziós vektorteret (adott hosszegység esetén) nyugodtan tekinthetjük a hosszúság mérőszámának, a téridőt pedig az $\mathcal{J}^4$ térrel azonosíthatjuk. A kvantumlogika hálóján értelmezett valószínűségi mértéket is általánosíthatjuk $\{0, 1\} \subset J$ értékkészletű leképzéssé. Ezzel az általánosítással bizonyos esetekben meg lehet szabadulni attól a kellemetlenségtől, hogy olyan esemény valószínűsége is lehet 0, mely bekövetkezhet [BW].

A szimmetriát kifejező G Lie-csoport elmélete is általánosítható a valóstól és komplextől különböző számtestek esetére. Ezt vizsgáljuk most meg.

Legyen K tetszőleges számtest. Azt mondjuk, hogy *K-ban van abszolút érték*, ha létezik

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto |a|$$

leképzés az alábbi tulajdonságokkal minden $a, b \in K$ elemek esetén:

(1) $0 \leq |a|$ és $|a| = 0$ akkor és csak akkor ha $a = 0$,
(2) $|ab| = |a||b|$,
(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
(4) Létezik olyan $c \in K$, hogy $|c| \neq 1$.

A $|\cdot|$ abszolút értékről azt mondjuk, hogy *nem archimédeszi* vagy *ultrametrikus*, ha minden $a, b \in K$ elemre a 3. feltétel helyett az erősebb

$$|a + b| \leq \sup\{|a|, |b|\}$$

feltételt teljesíti.

Kitérőként megemlítjük *Ostrovski tételét*, mely szerint csak két archimédeszi, teljes, abszolút értékkel ellátható test van, ezek $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$. Legyen K teljes, abszolút értékkel ellátott test. Ekkor értelmezhetők a K-feletti Lie-csoportok [Ser]. Ezek egyik érdekes tulajdonsága, hogy nyílt részcsoportjuk is lehet Lie-részcsoport [Oni].

Foglaljuk össze a számossággal kapcsolatban tett megjegyzéseket. Legyen K teljes, abszolút értékkel ellátott test, mely a valós számok ultrahatványaként áll elő. Ekkor a kvantummechanikai modellt általánosíthatjuk. Vázlatosan megadjuk a *nagy számosságokra általánosított kvantummechanikai modell* definícióját. Ez a modell az alábbi ötössel adható meg:

(5.1.2.) $$\langle H[K], F, G, T, Q, \mathcal{M} \rangle,$$

ahol

(1) $H[K]$ a K számtest feletti Hilbert-tér,
(2) F az események egy halmaza,
(3) G a K test feletti Lie-csoport,
(4) T a G Lie-csoport ábrázolása a $H[K]$ Hilbert-tér adott típusú (3.4. pontban leírt terek) altérhálójának automorfizmuscsoportján.
(5) $\mathcal{M}$ a fent választott altérhálóról a $[0, 1] \subset K$ intervallumba képző általánosított mértékek megfelelő halmaza.

A kvantummechanikai modellnél tett megkötéseket ettől a modelltől is megkivánjuk.

Az első fejezetben láttuk, hogy a kvantummechanika újabb elmélete van megszületőben. A Hilbert-tereken alapuló kvantummechanika helyett a H^*-algebrákat, 2-Hilbert-tereket, és a többi említett struktúrát használó modellt próbálnak készíteni, ennek azonban sok részlete még nem tisztázott.

II Reprezentációelmélet

6. Unitér-, projektív- és sugárábrázolások

6.0. Bevezető

A fizikában Wigner tétele miatt nagy szükség van a *projektív ábrázolások* elméletére. Azonban meglehetősen bonyolult feladat egy adott csoport összes projektív ábrázolását megtalálni. Szerencsére létezik egy módszer, az *indukált projektív ábrázolások módszere*, mely segítségével a fizikában gyakran szereplő csoportok közül néhánynak az összes *folytonos* projektív ábrázolásait meg tudjuk adni. Ebben a fejezetben főként az indukált reprezentációkkal foglalkozunk.

Az első szakaszban áttekintjük a *csoporthatás*ok kapcsán felmerülő új fogalmakat, és a *topologikus transzformációcsoportok* egy típusát rögzítjük, mellyel a továbbiakban dolgozni fogunk. A második szakaszban csoportok, illetve topologikus csoportok *féldirekt szorzatát* definiáljuk. Látni fogjuk, hogy a *Poincaré-csoport* és az *Euklideszi-csoport* is ilyen féldirekt szorzat alakban áll elő. A negyedik szakaszban bizonyos féldirekt szorzat alakú topologikus csoportok *folytonos unitér ábrázolás*ait adjuk meg a *megengedett hatos* fogalmának a bevezetésével. A megengedett hatos fogalmát a harmadik szakaszban készítjük elő. Az ötödik szakaszban egy új unitér ábrázolást mutatunk be, mely *unitér ekvivalens* lesz az 4. szakaszban definiálttal, a fizikában mégis nagy jelentőségű, ugyanis a *kalapos*- illeteve *kalaptalan spinor-amplitúdók* egzakt megalapozói lesznek. A hatodik szakaszban derül ki, hogy miért fontos az unitér ábrázolások meghatározása a projektív ábrázolások megtalálásához. Itt bevezetünk egy új ábrázolásfogalmat, a *sugárábrázolást*, mely 'a projektív- és az unitér ábrázolások között helyezkedik el'. Majd megadunk egy ábrázolást a *Hilbert-nyaláb*okon, mely kulcsfontosságú lesz a *Dirac-egyenlet* és a *Maxwell-egyenlet* értelmezéséhez. Végül néhány konkrét, a fizikában gyakran szereplő topologikus csoportot definiálunk az utolsó szakaszban.

Irodalom

[BR] A. Barut, R. Raczka:*Theory of Groups Representations and applications* 1-2 kötet, PWN, 1977.

[Kir1] A. A. Kirillov:*Elements of the Theory of Representations* Springer, 1976.

[Kir2] A. A. Kirillov (szerkesztő):*Representation Theory and Harmonic Analysis I.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 22. kötet Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Kir3] A. A. Kirillov (szerkesztő):*Representation Theory and Harmonic Analysis III.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 59. kötet Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kri] Kristóf János: *A Poincaré-csoport ábrázolása* Szakdolgozat

[Mac] G. W. Mackey:*Unitary Group Representation in Physics, Probability and Number Theory* Benjamin/Cummings, 1978.

[Mat1] Matolcsi Tamás, Székely Sándor: *Matematikai fizika* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[Mat2] Tamás Matolcsi: *A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics.* Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.

[Oni] A. L. Onishchik (szerkesztő):*Lie Groups and Lie Algebras I.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 20. kötet Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[OV] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg (szerkesztők):*Lie Groups and Lie Algebras III.* EMS 41. kötet, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Var] V. S. Varadarajan: *Geometry of Quantum Theory II.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

Az 1-5. szakaszok [Kir1], [Kir2], [Kri], [Oni], [OV] és [Var] alapján, a 6. szakasz [BR], [Kir3], [Mac], [Mat1], [Mat2] és [Var] alapján készült. A 7. szakasz a [Var]-ban leírtakra épül, a 8. szakasz pedig a [Mat1] és [Mat2] művekre. A *megengedett hatos* fogalma először [Kri]-ben szerepel.

Az 5. szakaszban részletesen vizsgált *adott transzformációhoz tartozó kalapos- és kalaptalan spinoramlitúdó*k elméletével nem találkoztam az irodalomban.

6.1. Csoporthatás

6.1.1. Definíció. Legyen S_M az M halmaz bijektív transzformációinak a csoportja és G egy tetszőleges csoport. A *G csoport hatása az M halmazon* egy

$$T : G \to S_M \qquad g \mapsto T_g$$

leképzés az alábbi tulajdonságokkal:

$$T_e x = x,$$
$$T_a T_b x = T_{ab} x$$

minden $x \in X$ és $a, b \in G$ elemre. A (G, M, T) hármast *transzformációcsoport*nak nevezzük.

6.1.2. Definíció. Az M halmaz *invariáns elemei* vagy *fixpontjai* alkotják az M^G halmazt:

$$M^G := \{x \in M | T_g x = x \quad \forall g \in G\}.$$

Az $x_0 \in M$ *pont stabilizátora* vagy *izotrópia csoportja* G azon elemeiből áll, melyek fixen hagyják az x_0 pontot:

$$G_{x_0} = \{g \in G | T_g x_0 = x_0\}.$$

Az M halmazon bevezethetünk egy $\sim$ ekvivalencia relációt:

(6.1.1.) $$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G : \quad x = T_g y.$$

Az M ekvivalencia osztályait hívjuk *pályáknak* vagy *orbitok*nak. Minden $x \in M$ pont egy pálya eleme:

(6.1.2.) $$G(x) = \{T_g x \in M | g \in G\}.$$

6.1.3. Definíció. Az (G, M, T) transzformációcsoportot *tranzitív*nak hívjuk, ha csak egy pályája van, vagyis ha $M/\sim$ egyelemű halmaz.

Eddig struktúra nélküli M halmazon adtuk meg a csoporthatást, most abban az esetben értelmezzük a csoporthatást amikor M topológikus tér.

Legyenek M_1, M_2 topologikus terek, jelölje

$$\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$$

az M_1 topologikus teret az M_2-be képző homeomorfizmusok a halmazát. Abban az esetben, ha $M_1 = M_2 = M$ akkor a

$$\mathrm{Hom}(M) := \mathrm{Hom}(M, M)$$

jelölést használjuk. Ez a kompozíció képzéssel csoporttá tehető, ezért $\mathrm{Hom}(M)$ neve *M topologikus tér teljes homeomorfizmus csoportja.*

6.1.4. Definíció. Adott G topologikus csoport M topologikus téren történő topológikus hatása

$$T : G \to \mathrm{Hom}(M) \quad g \mapsto T_g$$

leképzés. A (G, M, T) hármast *topologikus transzformációcsoport*nak nevezzük, ha (G, M, T) transzformációcsoport és a

$$G \times M \to M \qquad (g, x) \mapsto T_g x$$

leképzés folytonos.

Legyen G_1 és G_2 topologikus csoport, akkor

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$$

jelöli a G_1-en értelmezett G_2-be ható csoportmorfizmusok halmazát. A folytonos csoportmorfizmusok halmazát pedig

$$\mathrm{Hom}_C(G_1, G_2)$$

jelöli. Abban az esetben, ha $G_1 = G_2 = G$ akkor a

$$\mathrm{Hom}(G) := \mathrm{Hom}(G, G) \qquad \mathrm{Hom}_C(G) := \mathrm{Hom}_C(G, G)$$

egyszerűsitéseket hasznájuk.

A továbbiakban a topologikus transzformációcsoportok egy speciális osztályára lesz szükségünk. Feltesszük, hogy mind a G topologikus csoport, mind az X topologikus tér lokálisan kompakt T_2 topológiák, melyek teljesen metrizálhatók és a második megszámlálhatósági axiómának eleget tesznek. Ezeket a tulajdonságokat sokszor használjuk, ezért topologikus transzformációcsoport alatt mostantól ilyen lokálisan kompakt, T_2, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, teljesen metrizálható topológiával rendelkező struktúrát értünk.

6.1.5. Definíció. Legyen (G, M, T) tranzitív transzformációcsoport és $x_0 \in M$. Egy $c : M \to G$ függvényt x_0*-beli metszet*nek nevezünk, ha:

$$T_{c(x)} x_0 = x \quad \forall x \in M.$$

Előfordulhat, hogy egy adott topologikus transzformációcsoportnak semmilyen x pontban nem létezik folytonos metszete. Ha a (G, M, T) tranzitív topologikus transzformációcsoport, akkor egy c fügvényt ezen transzformációcsoport *Borel-metszet*ének nevezzük, ha létezik olyan $x_0 \in M$ pont, hogy c az adott transzformációcsoport x_0-beli metszete és c Borel-mérhető függvény az M és G topologikus terek között.

6.1.1. Tétel. *Ha (G, M, T) tranzitív topologikus transzformációcsoport. Ekkor minden $x \in M$ pontban létezik Borel-metszet.*

Az tétel szempontjából rendkívül fontos, hogy a G csoport lokálisan kompakt.

6.2. Féldirekt szorzat

6.2.1. Definíció. Legyenek A és H csoportok és

$$t : H \mapsto \mathrm{Aut}(A) \quad h \mapsto t_h$$

csoporthomomorfizmus. A H és A csoportok *féldirekt szorzata* a t leképzésre nézve egy $G = H \times_t A$ csoport, melynek elemei (h, a) párokból állnak, ahol $h \in H$ és $a \in A$; a csoportművelet:

$$(h, a)(h', a') = (hh', at_h(a')).$$

A definícióból következik, hogy $(h, a)^{-1} = (h^{-1}, t_{h^{-1}}(a^{-1}))$. Legyenek A és H olyan topologikus csoportok és $t \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Aut}(A))$ olyan, hogy a

$$t' : H \times A \to A \quad (h, a) \mapsto t_h(a) \tag{6.2.1.}$$

leképzés folytonos a $H \times A$ szorzattopológiájában. Ekkor a $H \times_t A$ féldirekt szorzatot a $H \times A$ szorzattopológiával ellátva *topologikus féldirekt szorzat*nak nevezzük. Ekkor minden $h \in H$-ra t_h az A folytonos automorfizmusa és az $H \times A$ halmaz szorzattopológiája kompatibilis a $H \times_t A$ féldirekt szorzat csoportműveletével. Vagyis a topologikus féldirekt szorzat topologikus csoport. A továbbiakban feltesszük, hogy az

$$\bar{A} = \{(e_H, a) | a \in A\} \tag{6.2.2.}$$

halmaz zárt, kommutatív normálosztója $H \times_t A$-nak. Ha A és H szeparált, lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport, valamint A kommutatív, akkor féldirekt szorzatukat *speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat*nak nevezzük. A topologikus féldirekt szorzatok közül a továbbiakban csak ilyen speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzatokkal foglalkozunk. Vagyis a topologikus féldirekt szorzat alatt mindig ilyen féldirekt szorzatot értünk.

6.2.2. Definíció. Az A topologikus csoport *folytonos unitér karaktereinek a halmaza* a következő:

$$\hat{A} = \{f : A \to \mathbb{T} | f \quad \text{folytonos homomorfizmus}\}.$$

Itt $\mathbb{T}$ az egységnyi abszolút értékű komplex számok topologikus csoportja.

Az $\hat{A}$ halmaz a pontonkénti szorzással csoporttá tehető. Ezen a csoporton a kompakt halmazon történő uniform konvergencia topológiát ad meg. Erre a topológiára nézve a csoportműveletek folytonosak, tehát $\hat{A}$ topologikus csoport.

Megjegyzés. Általánosan: Ha N kommutatív, szeparált lokálisan kompakt csoport akkor $\hat{N}$ is ilyen tulajdonságokkal rendelkezik. A Pontrjagin dualitási tétel szerint N és $\hat{\hat{N}}$ izomorf topologikus csoportok.

Legyen $G = H \times_t A$ a H és A topologikus csoportok topologikus féldirekt szorzata. Ekkor a H csoport hatása az $\hat{A}$-n a

$$Q : H \to \mathrm{Aut}(\hat{A}) \qquad h \mapsto Q_h \tag{6.2.3.}$$

leképzés, melyet az alábbi formulával definiálunk

$$Q_h \hat{a} := \hat{a} \circ t_h^{-1} \tag{6.2.4.}$$

minden $h \in H$ és $\hat{a} \in \hat{A}$ elemre. Ekkor a $(H, \hat{A}, Q)$ hármas speciális lokálisan kompakt transzformációcsoport. Ezt a $H \times_t A$ *topológikus féldirektszorzathoz rendelt transzformációcsoport*nak hívjuk.

Az elöbbi jelöléseket alkalmazva legyen $H \times_t A$ speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat. Ekkor a (H, A, t) hármas topologikus transzformációcsoport. Legyen $(H, \hat{A}, Q)$ az imént értelmezett topologikus transzformációcsoport. Ha létezik olyan

$$\theta : A \to \hat{A}$$

topologikus algebrai izomorfizmus, hogy

$$\forall h \in H \quad \theta \circ t_h = Q_h \circ \theta, \tag{6.2.5.}$$

akkor (H, A, t) és $(H, \hat{A}, Q)$ topologikus transzformációcsoportok *ekvivalensek*, azaz minden $h \in H$ elemre az alábbi diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t_h} & A \\ {\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ \hat{A} & \xrightarrow[Q_h]{} & \hat{A} \end{array}$$

Érdemes megjegyezni, hogy két transzformációcsoport nemcsak a fenti esetben lehet ekvivalens, de erre most nem térünk ki.

6.3. Multiplikátorok és mértékek

6.3.1. Definíció. Legyen (G, X, T) transzformációcsoport és M csoport. Egy

$$\varphi : G \times X \to M$$

leképzést (G, X, T, M) *multiplikátor*nak hívunk, ha teljesíti a következőket:

(1) Minden $x \in X$-re

$$\varphi(e_G, x) = e_M.$$

(2) Minden $x \in X$-re és $g_1, g_2 \in H$ elezmekre

$$\varphi(g_1 g_2, x) = \varphi(g_1, T_{g_2} x)\varphi(g_2, x).$$

Legyen $x_0 \in X$ egy rögzített elem és ennek G_{x_0} ennek a stabilizátora. Legyen $m \in \mathrm{Hom}(G_{x_0}, M)$, azt mondjuk, hogy a φ *multiplikátor az x_0 pontban az m morfizmust generálja*, ha

$$T_h x_0 = x_0 \Longrightarrow \varphi(h, x_0) = m_h \tag{6.3.1.}$$

minden $h \in H$-ra.

Most minden homomorfizmusra megadunk egy multiplikátort, mely az adott morfizmust generálja. Legyen (G, X, T) tranzitív transzformációcsoport, c_{x_0} az x_0-beli metszet, M legyen csoport és $m \in \mathrm{Hom}(G_{x_0}, M)$. Definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\varphi_{(m,c_{x_0})} : M \times X \to M \qquad (h, x) \mapsto \varphi_{(m,c_{x0})}(h, x) \tag{6.3.2.}$$

$$\varphi_{(m,c_{x_0})}(h, x) := m\big(c_{x_0}(x_0)\big)m\Big(c_{x_0}\big(T_h x\big)^{-1} h c_{x_0}(x)\Big)m\big(c_{x_0}(x_0)\big)^{-1}.$$

Nem nyilvánvaló, hogy az iménti definíció jó, de rövid számolással ellenőrizhető.

6.3.1. Állítás. *Az elöbbi jelöléseket alkalmazva $\varphi_{(m,c_{x_0})}$ olyan (G, X, T, M) multiplikátor, amely az x_0 pontban az m morfizmust generálja. Ha (G, X, T) topologikus transzformációcsoport, M topologikus csoport és m folytonos, akkor $\varphi_{(m,c_{x_0})}$ Borel-mérhető függvény.*

Legyen (G, X, T) topologikus transzformációcsoport és jelölje $K(X)$ az X-en értelmezett valós folytonos, kompakt tartójú függvények induktív topológiával ellátott szeparált lokálisan konvex terét. Minden μ X-feletti Radon-mértékre (azaz $K(X)$ feletti lineáris folytonos formára) és $g \in G$-re definiáljuk a következő $T_g(\mu)$ függvényt:

$$T_g\mu : K(X) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto T_g\mu(f) := \mu(f \circ T_g). \tag{6.3.3.}$$

Ezt a függvényt gyakran $g\mu$-vel jelöljük. A $g\mu$ függvény szintén Radon-mérték, neve *μ-mérték g-vel való eltoltja*. Jelöljük $M(X)$-szel az X-feletti valós mértékek halmazát.

6.3.1. Definíció. A $\mu \in M(X)$ mérték *G-invariáns*, ha $g\mu = \mu$ minden $g \in G$-re és a $\mu \in M(X)$ mérték *G-kváziinvariáns*, ha μ és $g\mu$ ekvivalensek, azaz kölcsönösen abszolút folytonosak.

6.3.2. Tétel. *Legyen (G, X, T) topologikus transzformációcsoport. Ekkor létezik X-en nem nulla G-kváziinvariáns mérték, melyhez létezik olyan folytonos*

$$f : G \times X \to \mathbb{R}^+$$

függvény, melyre:

$$g\mu = f(g^{-1}, \cdot)\mu \qquad \forall g \in G.$$

6.4. Megengedett hatos

6.4.1. Definíció. Legyen $G = H \times_t A$ speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat. Az

$$(\omega, \mu, f, x_0, c_{x_0}, m)$$

rendszert *megengedett hatosnak* nevezzük, ha a következők teljesülnek:

(1) ω lokálisan kompakt H-pálya $\hat{A}$-ban,
(2) μ pozitív, nem nulla H-kváziinvariáns mérték ω-n,
(3) f olyan folytonos függvény, melyre:

$$f : H \times \omega \to \mathbb{R}^+ \quad h\mu = f(h^{-1}, \cdot)\mu,$$

(4) $x_0 \in \omega$,
(5) c_{x_0} x_0-beli Borel-metszet,
(6) m a G_{x_0}-nak folytonos unitér ábrázolása egy Hilbert-téren.

Legyen X lokálisan kompakt, T_2-tér, μ pozitív mérték X-en, W komplex Hilbert-tér és jelölje $||\cdot||$ a normát W-ben. Ekkor
(6.4.1.)

$$\mathcal{L}^2(X, \mu, W) := \left\{ f : X \to W \;\middle|\; f \quad \text{mérhető} \quad \int_X ||f||_W^2 d\mu(x) < +\infty \right\}$$

komplex lineáris tér és a

(6.4.2.) $$||\cdot|| : \mathcal{L}^2(X, \mu, W) \to \mathbb{R}^+ \qquad f \mapsto ||f|| := \sqrt{\int_X ||f||_W^2 d\mu(x)}$$

félnormával ellátva teljes prehilbert-tér $\mathbb{C}$ felett. Az $\mathcal{L}^2(X, \mu, W)$-hez asszociált Hilbert-teret jelöljük $L^2(X, \mu, W)$-vel.

Legyen $H \times_t A$ speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat és $(H, \hat{A}, Q)$ a hozzá rendelt transzformációcsoport, valamint

$$(\omega, \mu, f, x_0, c_{x_0}, m)$$

megengedett hatosa a féldirekt szorzatnak. Az m ábrázolás terét jelöljük W-vel. Legyen

(6.4.3) $$\mathcal{H} := L^2(\omega, \mu, W),$$

és $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér lineáris operátorainak a halmaza. Definiáljuk a következő leképzéseket:

(6.4.4.) $$U^H : H \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \qquad h \mapsto U_h^H,$$

$$U_h^H \alpha(x) := \sqrt{f(h^{-1}, x)}\varphi_{(m, c_{x_0})}(h, Q_{h^{-1}}x)\alpha(Q_{h^{-1}}x) \quad \alpha \in \mathcal{H}, \quad x \in \omega$$

$$U^A : A \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \qquad a \mapsto U_a^A, \tag{6.4.5.}$$
$$U_a^A\beta)(x) := x(a)\beta(x). \quad \alpha \in \mathcal{H}, \quad x \in \omega$$

Ellenőrizhető, hogy a definíció jó, valamint

$$U^H \in \mathrm{Hom}_C(H, \mathrm{Unit}_S(\mathcal{H})), \tag{6.4.6.}$$
$$U^A \in \mathrm{Hom}_C(A, \mathrm{Unit}_S(\mathcal{H})).$$

Itt $\mathrm{Unit}_S(\mathcal{H})$ jelöli a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér unitér operátorainak az erős topológiával ellátott topologikus csoportját, $\mathrm{Hom}_C(A, \mathrm{Unit}_S(\mathcal{H}))$ pedig a topologikus csoportok közötti folytonos csoporthomomorfizmusok halmazát.

Definiáljuk az *ábrázolások féldirekt szorzatá*t ebben az esetben:

$$U := U^H \times_t U^A \tag{6.4.7.}$$
$$U : (H \times_t A) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \qquad (h, a) \mapsto U_{h,a}$$
$$U_{h,a}(\varphi)(x) := U_{t_h a}^A U_h^H.$$

Erről az U ábrázolásról bebizonyíthatjuk, hogy

$$U \in \mathrm{Hom}_C\big((H \times_t A), \mathrm{Unit}_S(\mathcal{H})\big), \tag{6.4.8.}$$

vagyis folytonos unitér ábrázolása a féldirekt szorzatnak. Ezt az ábrázolást hívjuk a *megengedett hatos által generált ábrázolás*nak.

A féldirekt szorzat ábrázolása az adott hatos által, a következő alakú ha $\varphi_{(m,c_{x_0})}$ multiplikátort is kiirjuk:

$$U : (H \times_t A) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad (h, a, \alpha) \mapsto U_{h,a}(\alpha) \tag{6.4.8.}$$

$$U_{h,a}(\alpha)(x) := x(a)\sqrt{f(h^{-1}, x)}m(c_{x_0}(x_0))\cdot$$
$$\cdot\, m\big(c_{x_0}(x)^{-1}hc_{x_0}(Q_{h^{-1}}x)\big)m\big(c_{x_0}(x_0)\big)^{-1}\alpha(Q_{h^{-1}}x).$$

Az ábrázolás alakja sokat egyszerűsödik, ha μ H-invariáns mérték ω-n, ekkor ugyanis $f(\cdot,\cdot) = 1$, ezenkívül, ha még $c_{x_0}(x_0) = e_H$, akkor az ábrázolás alakja:

$$U_{h,a}(\alpha)(x) = x(a)m\big(c_{x_0}(x)^{-1}hc_{x_0}(Q_{h^{-1}}x)\big)\alpha(Q_{h^{-1}}x). \tag{6.4.9.}$$

6.4.1. Tétel. *Ha a topologikus féldirekt szorzat megengedett hatosásban szereplő stabilizátor ábrázolása irreducibilis, akkor a megengedett hatos által generált ábrázolás irreducibilis.*

6.4.2. Tétel. *Legyen a $H \times_t A$ topologikus féldirekt szorzatnak*

$$(\omega_1, \mu_1, f_1, x_1, c_{x_1}, m_1) \quad \text{és} \quad (\omega_2, \mu_2, f_2, x_2, c_{c_2}, m_2)$$

két megengedett hatosa. Az ezek által generált ábrázolás akkor és csak akkor unitér ekvivalensek, ha létezik olyan (g, V) pár, mellyel

(1) *$g \in H$ és $gx_1 = x_2$,*
(2) *$V : W_1 \to W_2$ olyan unitér operátor, hogy*

$$m_2(ghg^{-1}) = V \circ m(h) \circ V^{-1}$$

minden $h \in H_{x_1}$ csoportelemre.

6.4.3. Tétel. *Legyen a $H \times_t A$ topologikus féldirekt szorzatnak*

$$(\omega_1, \mu_1, f_1, x_1, c_{x_1}, m_1)$$

egy megengedett hatosa. Legyen

$$\omega_{-1} := \{x \in \hat{A} | x^{-1} \in \omega\}, \quad x_{-1} := x_1^{-1}$$

$$c_{x_{-1}} : \omega_{-1} \to H \qquad c_{x_{-1}}(x) := c_{x_1}(x^{-1}).$$

Jelöljön μ_{-1} egy nem nulla, pozitív, H-kváziinvariáns mértéket ω_{-1}-en, a következő tulajdonsággal: van hozzá

$$f_{-1} : H \times \omega_{-1} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{melyre} \quad \forall h \in H \quad h\mu_{-1} = f_{-1}(h^{-1}, \cdot)\mu_{-1}.$$

Legyen m_{-1} Hilbert-térbeli, folytonos, unitér ábrázolása $H_{x_{-1}}$-nek. Ekkor

$$(\omega_{-1}, \mu_{-1}, f_{-1}, x_{-1}, c_{x_{-1}}, m_{-1})$$

a féldirekt szorzat megengedett hatosa, valamint ha m_1 és m_{-1} ábrázolások antiunitér ekvivalensek, akkor a két megengedett hatos által generált ábrázolások is anitunitér ekvivalensek.

6.4.4. Tétel. *Legyen $H \times_t A$ toplógikus féldirekt szorzat. Tegyük fel, hogy minden $\hat{A}$-beli H-pálya lokálisan kompakt és tegyük fel, hogy létezik az $\hat{A}$ topologikus térben olyan Borel-halmaz, amely az $\hat{A}/H$ faktorhalmaznak teljes reprezentáns rendszere. Ekkor $H \times_t A$ minden komplex, szeparábilis Hilbert-térbeli folytonos unitér irreducibilis ábrázolásához létezik $H \times_t A$-nak olyan megengedett hatosa, mely által generált Hilbert-térbeli ábrázolás az adott ábrázolással unitér ekvivalens.*

6.5. Általánosított spinor amplitúdók

Az előző fejezetben megadtuk a topologikus féldirekt szorzatok egy unitér ábrázolását egy viszonylag szép Hilbert-téren, viszont az ábrázoló operátorok meglehetősen bonyolultak voltak. Ebben a fejeztben az előzővel unitér ekvivalens ábrázolásokat adunk meg egy bonyolultabb Hilbert-téren, de egyszerűbb ábrázoló operátorokkal.

Legyen $(\omega, \mu, f, x_0, c, m)$ a $G = H \times_t A$ topologikus féldirekt szorzatnak egy megengedett hatosa és legyen W az m ábrázolás Hilbert-tere. Továbbá tegyük fel, hogy az alábbi feltétel teljesül:

EXT. feltétel. *Létezik egy $\check{W}$ Hilbert-tér és egy G-n értelmezett $\check{m}$ folytonos lineáris Borel-morfizmus a $\check{W}$ tér lineáris invertálható operátorainak a csoportjába, melyre igaz, hogy:*

(1) *W zárt altere $\check{W}$-nek,*
(2) *$\check{m}(h)u = m(h)u$ minden $h \in G_{x_0}$ és $u \in W$ elemre.*

Legyen $|\cdot|$ és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a norma és a skalárszorzat $\check{W}$-ben. Legyen $x \in \omega$ tetszőleges pont és $g \in H$ olyan elem, melyre $gx_0 = x$. Legyen továbbá $\check{R}$ a H csoport egy automorfizmusa, valamint $\hat{R}$ a H egy antiautomorfizmusa. Ekkor definiálhatjuk $\check{W}$-nek $W_{\check{x}}^{\check{R}}$ és $W_{\hat{x}}^{\hat{R}}$ zárt altereit:

(6.5.1.)
$$W_{\check{x}}^{\check{R}} := \check{m}\big(\check{R}(g)\big)[W]$$
$$W_{\hat{x}}^{\hat{R}} := \check{m}\big(\hat{R}(g)\big)[W].$$

Bevezetünk egy $\langle\cdot,\cdot,\rangle_{\check{x}}^{\check{R}}$ skalárszorzást $W_{\check{x}}^{\check{R}}$-en, egy másik $\langle\cdot,\cdot,\rangle_{\hat{x}}^{\hat{R}}$ skalárszorzást $W_{\hat{x}}^{\hat{R}}$-en egy $g \in H$ csoportelem segítségével, melyre $gx_0 = x$:

(6.5.2.)
$$\langle u,v\rangle_{\check{x}}^{\check{R}} := \langle \check{m}\big(\check{R}(g)^{-1}\big)u, \check{m}\big(\check{R}(g)^{-1}\big)v\rangle \qquad u,v \in W_{\check{x}}^{\check{R}}$$
$$\langle u,v\rangle_{\hat{x}}^{\hat{R}} := \langle \check{m}\big(\hat{R}(g)^{-1}\big)u, \check{m}\big(\hat{R}(g)^{-1}\big)v\rangle \qquad u,v \in W_{\hat{x}}^{\hat{R}}.$$

Ellenőrizhető, hogy a belső szorzások jól definiáltak. Az így definiált $W_{\check{x}}^{\check{R}}$ és $W_{\hat{x}}^{\hat{R}}$ terekre igaz, hogy

(6.5.3.)
$$W_{\check{gx}}^{\check{R}} = \check{m}\big(\check{R}(g)\big)[W_{\check{x}}^{\check{R}}] \qquad \big\langle \check{m}\big(\check{R}(g)\big)u, \check{m}\big(\check{R}(g)\big)v\big\rangle_{\check{gx}}^{\check{R}} = \langle u,v\rangle_{\check{x}}^{\check{R}}$$
$$W_{\hat{gx}}^{\hat{R}} = \check{m}\big(\hat{R}(g)\big)[W_{\hat{x}}^{\hat{R}}] \qquad \big\langle \check{m}\big(\hat{R}(g)\big)u, \check{m}\big(\hat{R}(g)\big)v\big\rangle_{\hat{gx}}^{\hat{R}} = \langle u,v\rangle_{\hat{x}}^{\hat{R}}$$

minden $(g,x) \in H \times \omega$ elemre. Itt

$$\check{m}\big(\check{R}(g)\big)$$

unitér izomorfizmus a $W_{\check{x}}^{\check{R}}$ és $W_{\check{gx}}^{\check{R}}$ terek között, valamint

$$\check{m}\big(\hat{R}(g)\big)$$

unitér izomorfizmus a $W_{\hat{x}}^{\hat{R}}$ és $W_{\hat{gx}}^{\hat{R}}$ terek között.

Jelölje $\mathcal{F}(\omega,\mu,\check{W})$ az ω pályán értelmezett, $\check{W}$-be ható μ-mérhető függvények halmazát, és legyen:

(6.5.4.)
$$\check{E}^{\check{R}} := \Big\{\varphi \in \mathcal{F}(\omega,\mu,\check{W}) \;\Big|\; \forall x \in \omega : \varphi(x) \in W_{\check{x}}^{\check{R}} \quad \text{és} \quad \int_\omega \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle_{\check{x}}^{\check{R}} d\mu(x) < +\infty\Big\}$$

(6.5.5.)
$$\hat{E}^{\hat{R}} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(\omega, \mu, \check{W}) \;\Big|\; \forall x \in \omega : \varphi(x) \in W^{\hat{R}}_{\hat{x}} \quad \text{és} \quad \int_\omega \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle^{\hat{R}}_{\hat{x}} d\mu(x) < +\infty \Big\}$$

Az $\check{E}$ és $\hat{E}$ tér a pontonkénti műveletekkel komplex lineáris tér, amin a következő $||\cdot||^{\check{R}}_{\check{E}}$ és $||\cdot||^{\hat{R}}_{\hat{E}}$ félnormákat értelmezzük:

$$(6.5.6) \quad ||\varphi||^{\check{R}}_{\check{E}} := \sqrt{\int_\omega \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle^{\check{R}}_{\check{x}} d\mu(x)} \qquad ||\varphi||^{\hat{R}}_{\hat{E}} := \sqrt{\int_\omega \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle^{\hat{R}}_{\hat{x}} d\mu(x)}.$$

Ezzel $\check{E}^{\check{R}}$-t és $\hat{E}^{\hat{R}}$-t komplex teljes prehilbert térré tettük. (A terek teljessége nem nyilvánvaló!) Az $\check{E}^{\check{R}}$-hez asszociált Hilbert-teret jelöljük $\check{H}^{\check{R}}$-val, a $\hat{E}^{\hat{R}}$-hez asszociáltat $\hat{H}^{\hat{R}}$-val.

Legyen $\check{S}^{\check{R}}$ és $\hat{S}^{\hat{R}}$ a következő két leképzés:

(6.5.7.)
$$\check{S}^{\check{R}} : L^2(\omega, \mu, W) \to \check{H}^{\check{R}} \qquad \varphi \mapsto \check{S}^{\check{R}}(\varphi)$$
$$\check{S}^{\check{R}}(\varphi)(x) := \check{m}\Big(\check{R}\big(c_{x_0}(x)\big)\Big) m\big(c_{x_0}(x_0)\big)^{-1} \varphi(x),$$

(6.5.8.)
$$\hat{S}^{\hat{R}} : L^2(\omega, \mu, W) \to \hat{H}^{\hat{R}} \qquad \varphi \mapsto \hat{S}^{\hat{R}}(\varphi)$$
$$\hat{S}^{\hat{R}}(\varphi)(x) := \check{m}\Big(\hat{R}\big(c_{x_0}(x)\big)\Big) m\big(c_{x_0}(x_0)\big) \varphi(x).$$

Legyen továbbá $\check{U}^{\check{R}}$ és $\hat{U}^{\hat{R}}$ az alábbi leképzés:

(6.5.9.)
$$\check{U}^{\check{R}} : H \times_t A \to \mathrm{Lin}(\check{H}^{\check{R}}) \qquad (h, a) \mapsto \check{U}^{\check{R}}_{h,a}$$
$$\check{U}^{\check{R}}_{h,a}(\varphi)(x) := x(a) \sqrt{f(h^{-1}, x)} \check{m}\big(\check{R}(h)\big) \varphi(Q_{h^{-1}} x) \quad \varphi \in \check{H}^{\check{R}} \quad x \in \omega,$$

(6.5.10.)
$$\hat{U}^{\hat{R}} : H \times_t A \to \mathrm{Lin}(\hat{H}^{\hat{R}}) \qquad (h, a) \mapsto \hat{U}_{h,a}$$
$$\hat{U}^{\hat{R}}_{h,a}(\varphi)(x) := x(a) \sqrt{f(h^{-1}, x)} \check{m}\big(\hat{R}(h)\big) \varphi(Q_{h^{-1}} x) \quad \varphi \in \hat{H}^{\hat{R}} \quad x \in \omega.$$

6.5.1. Tétel. *A fenti jelöléseket alkalmazva $\check{S}^{\check{R}}$ és $\hat{S}^{\hat{R}}$ unitér operátorok, valamint*

(6.5.11.)
$$\check{U}^{\check{R}} \in \mathrm{Hom}_C\big((H \times_t A), \mathrm{Unit}_S(\check{H}^{\check{R}})\big)$$
$$\hat{U}^{\hat{R}} \in \mathrm{Hom}_C\big((H \times_t A), \mathrm{Unit}_S(\hat{H}^{\hat{R}})\big).$$

Az $\check{U}^{\check{R}}$ *és* $\hat{U}^{\hat{R}}$ *ábrázolások unitér ekvivalensek* U*-val, melyet a következő kommutatív diagram fejez ki minden* $(h,a) \in H \times_t A$ *elemre:*

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^{\hat{R}} \arrow[d, "\hat{U}^{\hat{R}}_{h,a}"'] & L^2(\omega,\mu,W) \arrow[l, "\hat{S}^{\hat{R}}"'] \arrow[r, "\check{S}^{\check{R}}"] \arrow[d, "U_{h,a}"'] & \check{H}^{\check{R}} \arrow[d, "\check{U}^{\check{R}}_{h,a}"] \\
\hat{H}^{\hat{R}} & L^2(\omega,\mu,W) \arrow[l, "\hat{S}^{\hat{R}}"] \arrow[r, "\check{S}^{\check{R}}"'] & \check{H}^{\check{R}}
\end{tikzcd}$$

Az így előállított $\check{H}^{\check{R}}$ és $\hat{H}^{\hat{R}}$ Hilbert-terek elemeit nevezzük az $\check{R}$ *transzformációhoz tartozó kalaptalan-* illetve az $\hat{R}$ *transzformációhoz tartozó kalapos általánosított spinoramplitúdó*knak. Bizonyos csoportok spinorábrázolásainál egyszerűbb formulákat kapunk az ábrázoló operátorokra, ha az $\hat{R}$ és az $\check{R}$ műveletek nem a triviális

$$\hat{R} : H \to H \qquad h \mapsto \hat{R}(h) := h^{-1}$$
$$\check{R} : H \to H \qquad h \mapsto \check{R}(h) := h.$$

(anti)automorfizmusok.

Legyen az (anit)automorfizmus a fent definiált művelet. Ezt az esetet az $\check{R}$ és a $\hat{R}$ indexek ki nem írásával jelöljük. A $\check{H}$ és $\hat{H}$ Hilbert-terek elemeit nevezzük *kalaptalan-* illetve *kalapos általánosított spinoramplitúdó*nak.

Speciáis esetben előfordulhat, hogy $W = \check{W}$ és a μ mérték invariáns. Ekkor

(6.5.12.)
$$\check{E} = \left\{ \varphi \in \mathcal{F}(\omega,\mu,W) | \int_\omega \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\check{x}} d\mu(x) < +\infty \right\}$$
$$\check{U}_{h,a}\varphi(x) = x(a)\check{m}(h)\varphi(Q_{h^{-1}}x)$$

(6.5.13.)
$$\hat{E} = \left\{ \varphi \in \mathcal{F}(\omega,\mu,W) | \int_\omega \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\hat{x}} d\mu(x) < +\infty \right\}$$
$$\hat{U}_{h,a}\varphi(x) = x(a)\check{m}(h)^{-1}\varphi(Q_{h^{-1}}x).$$

Az így előállított $\check{H}$ és $\hat{H}$ Hilbert-terek elemeit nevezzük *kalaptalan-* illetve *kalapos általánosított spinoramplitúdó*nak.

6.5.2. Tétel. *Adott* $G = H \times_t A$ *topologikus féldirekt szorzat esetén az alábbi esetek mindegyikében teljesül az EXT feltétel:*

(1) *A* H *kompakt.*
(2) *A* H *kommutatív és* m *egydimenziós ábrázolás.*
(3) *A* $H \times_t A$ *Lie-féldirekt szorzat,* H *összefüggő féligegyszerű Lie-csoport és* G_{x_0} *maximális kompakt részcsoport* H*-ban.*

A (2) és (3) esetben $W = \check{W}$ *választható.*

6.6. Projektív ábrázolás

A projektív ábrázolások elméletére főleg a Wigner-tétel miatt van szükségünk. Legyen H komplex szeparábilis nem kétdimenziós Hilbert-tér és $L(H)$ ennek projektorhálója. Jelölje $\mathrm{Aut}\big(L(H)\big)$ az $L(H)$ háló automorfizmusainak a csoportját. Ekkor az $\mathrm{Aut}\big(L(H)\big)$ halmaz minden eleme LATOM izomorfizmus, mely egységnyi abszolútértékű számszorzótól eltekintve egyértelműen jellemezhető egy unitér vagy antiunitér operátorral.

Jelölje $U(H)$ a H Hilbert-tér unitér vagy antiunitér operátorainak a halmazát, mely a kompozícióképzés műveletével csoporttá tehető. Ekkor a Wigner-tétel értelmében létezik egy Γ csoportizomorfizmus:

$$\Gamma : U(H)/\mathbb{T}\cdot id_H \to \mathrm{Aut}\big(L(H)\big). \tag{6.6.1.}$$

A Γ izomorfizmus segítségével a két csoportot azonosíthatjuk. Az $U(H)$ csoport erős topológiával ellátva topologikus csoporttá tehető, mely eleget tesz a második megszámlálhatósági axiómának és metrizálható. Ezen topológia Γ általi képét tekintjük az $\mathrm{Aut}\big(L(H)\big)$ halmaz természetes topológiájának, és a továbbiakban $\mathrm{Aut}\big(L(H)\big)$-ra mindig mint topologikus csoportra gondolunk.

6.6.1. Definíció. Adott G csoport esetén

$$\mathrm{Hom}\Big(G, \mathrm{Aut}\big(L(H)\big)\Big)$$

elemeit a *G csoport H-beli projektív ábrázolásai*nak,

$$\mathrm{Hom}_C\Big(G, \mathrm{Aut}\big(L(H)\big)\Big)$$

elemeit a *G csoport H-beli folytonos projektív ábrázolásai*nak nevezzük.

A kvantummechanikában nagy szükség lenne adott csoportok összes gyengén irreducibilis projektív ábrázolásainak a meghatározására, azonban legtöbb esetben csak a folytonos gyengén irreducibilis projektív ábrázolásokat tudjuk megadni.

Legyen A a G csoport folytonos projektív ábrázolása:

$$A : G \to \mathrm{Aut}\big(L(H)\big) \qquad g \mapsto A_g.$$

Ekkor minden $g, h \in G$ elemre:

$$A_g \circ A_h = A_{gh}. \tag{6.6.2.}$$

Minden $g \in G$ esetén legyen U_g unitér vagy antiunitér reprezentánsa A_g-nek:

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1}, \tag{6.6.3.}$$

valamint legyen $U_{e_G} = id_H$. A (6.6.1) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$U_g U_h = \kappa(g,h) U_{gh}, \tag{6.6.4.}$$

ahol $\kappa(g,h) \in \mathbb{T}$. Ez motiválja a következő definíciókat.

6.6.2. Definíció. Legyen G és K lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport, továbbá legyen K kommutatív. Egy

$$\kappa : G \times G \to K \qquad (g,h) \mapsto \kappa(g,h)$$

Borel-féle függvényt K-*kociklus*nak hívunk, ha

$$\kappa(x,yz)\kappa(y,z) = \kappa(xy,z)\kappa(x,y)$$
$$\kappa(x,e_G) = \kappa(e_G,x) = e_K$$

minden $x,y,z \in G$ elemre. $K = \mathbb{T}$ esetén κ-t *unitér kociklus*-nak nevezzük.

Létezik egy speciális K-kociklus, az azonosan e_K értékű:

$$\mathbf{1} : G \times G \to K \qquad (g,h) \mapsto e_K.$$

A G csoport K-kociklusainak a halmaza legyen $M_K^*(G)$, ami kommutatív csoportot alkot a K-beli pontonkénti szozással és $\mathbf{1}$ egységelemmel. Ezen az $M_K^*(G)$ csoporton értelmezzük a $\simeq$ relációt:

$\kappa_1, \kappa_2 \in M_K^*(G)$ elemekre $\kappa_1 \simeq \kappa_2$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan

$$\tau : G \to K \qquad g \mapsto \tau(g)$$

folytonos függvény, hogy

$$\kappa_2(g,h) = \frac{\tau(gh)}{\tau(g)\tau(h)}\kappa_1(g,h). \tag{6.6.5.}$$

Legyen $E_K(G)$ az a részhalmaza $M_K^*(G)$-nek melynek elemei relációban állnak az $\mathbf{1}$ kociklussal:

$$E_K(G) := \{\kappa \in M_K^*(G) | \kappa \simeq \mathbf{1}\}. \tag{6.6.6.}$$

Az $E_K(G)$ halmaz elemeit *egzakt* K-*kociklus*oknak nevezzük. Igazolható, hogy $E_K(G)$ normálosztója $M_K^*(G)$-nek. A hányadoscsoportot

$$M_K(G) := M_K^*(G)/E_K(G) \tag{6.6.7.}$$

a G *csoport kociklus csoport*jának hívjuk.

A $K = \mathbb{T}$ esetben ha $\kappa_1 \simeq \kappa_2$ akkor azt mondjuk, hogy κ_1 *és* κ_2 *kohomológ.* Ha $\kappa_1 \simeq \kappa_2$ vagy $\bar{\kappa}_1 \simeq \kappa_2$ ahol a felülvonás a $\mathbb{T}$-beli komplex konjugálást jelenti, akkor azt mondjuk, hogy κ_1 *és* κ_2 *gyengén kohomológ.* A kohomológia illetve gyenge kohomológia ekvivalencia reláció az $M_{\mathbb{T}}^*(G)$ csoporton.

6.6.3. Definíció. Az (U, κ) párt a G csoportnak a H Hilbert-téren megvalósított *sugárábrázolásá*nak hívjuk, ha κ a G unitér kociklusa és U a csoporton értelmezett olyan leképzés, mely egy g elemhez H egy U_g unitér vagy antiunitér operátorát rendeli oly módon, hogy

$$U_{e_G} = id_H,$$
$$U_g U_h = \kappa(g,h) U_{gh} \quad \forall g, h \in G$$

Ha minden $g \in G$ elemre U_g unitér, akkor *unitér sugárábrázolás*ról beszélünk.

Egy G Lie-csoport esetén az (U, κ) sugárábrázolást *folytonosnak* nevezzük, ha a csoport egységelemének egy környezetében egyrészt κ analitikus, másrészt a $g \mapsto U_g$ hozzárendelés erősen folytonos.

Legyenek $(U^{(1)}, \kappa_1)$ és $(U^{(2)}, \kappa_2)$ a G csoport sugárábrázolásai, a H_1 és H_2 Hilbert-tereken. Azt mondjuk, hogy a *két sugárábrázolás ekvivalens*, ha létezik egy (V, τ) pár úgy, hogy

(1) $V : H_1 \to H_2$ unitér vagy antiunitér leképzés,
(2) $\tau : G \to \mathbb{T}$ folytonos függvény, mellyel

$$V U_g^{(1)} = \tau(g) U_g^{(2)} V \qquad \forall g \in G.$$

A sugárábrázolások szoros kapcsolatban vannak a projektív ábrázolásokkal. Minden sugárábrázolás egyértelműen meghatároz egy projektív ábrázolást, azonban ez fordítva nem igaz. Először megnézzük, hogy adott sugárábrázoláshoz rendelt projektív ábrázolás mikor gyengén irreducibilis, valamint két sugárábrázolás mikor határoz meg ekvivalens projektív ábrázolásokat. Majd megvizsgáljuk, milyen feltételek mellett rendelhető projektív ábrázolásokhoz sugárábrázolás.

6.6.1. Tétel. *A G összefüggő Lie-csoport A projektív ábrázolása akkor és csak akkor gyengén irreducibilis, ha az A-t előállító teteszőleges (U, κ) sugárábrázolás esetén csak a zéró-altér és az egész tér invariáns minden U_g-re.*

6.6.2. Tétel. *Legyenek $(U^{(1)}, \kappa_1)$ és $(U^{(2)}, \kappa_2)$ a G csoport sugárábrázolásai. Az általuk meghatározott projektív ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha $(U^{(1)}, \kappa_1)$ és $(U^{(2)}, \kappa_2)$ sugárábrázolások ekvivalensek, és ekkor (κ_1) és (κ_2) gyengén kohomológ.*

6.6.3. Tétel. *Legyen A a G összefüggő Lie-csoport projektív ábrázolása. Az A ábrázolás akkor és csak akkor folytonos, ha található őt előállító folytonos sugárábrázolás.*

Az állítás másképp megfogalmazva azt jelenti, hogy az összefüggő Lie-csoportok minden folytonos projektív ábrázolása egy folytonos sugárábrázolásból kapható.

A folytonos sugárábrázolások vizsgálata teszi szükségessé az alábbi fogalmak bevezetését.

6.6.4. Definíció. Az (κ, N) párt a G Lie-csoport *lokális kociklusának* nevezzük, ha N a G egységelemének egy környezete és

$$\kappa : N \times N \to \mathbb{T}$$

analitikus függvény, melyre igaz, hogy

$$\kappa(x, yz)\kappa(y, z) = \kappa(xy, z)\kappa(x, y)$$
$$\kappa(x, e_G) = \kappa(e_G, x) = e_K$$

minden olyan $x, y, z \in N$ elemre, melyekre a kifejezések értelmezve vannak.

A (κ_1, N_1) és (κ_2, N_2) két lokális kociklus *kohomológ* egymással, ha létezik olyan (τ, N_0) pár, hogy

(1) $N_0 \subseteq N_1 \cap N_2$ környezet,
(2) $\tau : N_0 \times N_0 \to \mathbb{T}$ Borel-mérhető függvény, melyre:

$$\kappa_2(g, h) = \frac{\tau(gh)}{\tau(g)\tau(h)}\kappa_1(g, h).$$

A két lokális kociklus *gyengén kohomológ*, ha (κ_1, N_1) és (κ_2, N_2) vagy $(\bar{\kappa}_1, N_1)$ és (κ_2, N_2) kohomológ.

A (κ, N) lokális kociklust *kanonikus lokális kociklus*nak hívjuk, ha $\kappa(g, h) = 1$ valahányszor g és h ugyanannak az egyparaméteres részcsoportnak az N környezetébe eső elemei.
Az κ unitér kociklus *lokálisan kanonikus unitér kociklus*, ha létezik az egységelemnek olyan N, környezete, melyre leszűkítve $(\kappa|_N, N)$ kanonikus lokális kociklus.

Az imént bevezetett fogalmakról a következőket tudjuk mondani.

6.6.4. Állítás.

(1) *Az egyparaméteres Lie-csoport minden lokális kociklusa az azonosan egy függvénnyel kohomológ.*
(2) *Egy Lie-csoport minden lokális kociklusa kohomológ egy kanonikus lokális kociklussal.*
(3) *Egy Lie-csoport minden unitér kociklusához, mely analitikus az egységelem egy környezetében, megadható egy vele kohomológ lokálisan kanonikus unitér kociklus.*
(4) *Az egyszeresen összefüggő Lie-csoportok lokális kociklusai kiterjeszthetők az egész téren értelmezett unitér kociklusokká.*

Az (1) állítás igazolja a kanonikus kociklus definícióját. A (2) szerint a lokális kociklusok helyett vizsgálhatjuk a kanonikus lokális kociklusokat. A (3) szerint a folytonos sugárábrázolások vizsgálatánál elég lokálisan kanonikus unitér kociklusokkal foglalkozni. Az állítások alapján az egyszeresen összefüggő Lie-csoportok kociklusairól az alábbiakat tudjuk:

$$\begin{array}{ccc}
\text{unitér kociklus} & & \text{lokálisan kanonikus unitér kociklus} \\
\uparrow\text{kiterjeszthtő} & & \uparrow\text{kiterjeszthtő} \\
\text{lokális kociklus} & \longleftarrow \text{kohomológ} \longrightarrow & \text{kanonikus lokális kociklus}
\end{array}$$

Ahhoz, hogy megtaláljuk egy egyszeresen összefüggő Lie-csoport összes nem ekvivalens folytonos sugárábrázolását, osztályozni kell a lokálisan kanonikus unitér kociklusokat gyenge kohomológia erejéig. Ezt úgy tesszük meg, hogy osztályozzuk a lokális kociklusok gyenge kohomológiaosztályait.

6.6.5. Definíció. Legyen $\mathfrak{g}$ Lie-algebra a $[\cdot,\cdot]$ kommutátorral. Egy

$$\mathcal{T} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \qquad (a,b) \mapsto \mathcal{T}(a,b)$$

leképzésről azt mondjuk, hogy *zárt*, ha:

$$\mathcal{T}(\{a,b\},c) + \mathcal{T}(\{b,c\},a) + \mathcal{T}([c,a],b) = 0 \qquad \forall a,b,c \in \mathfrak{g}.$$

Egy $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ bilineáris, antiszimmetrikus, zárt függvényt a $\mathfrak{g}$ *Lie-algebra kommutátor kociklusá*nak nevezzük.

A $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ *kommutátor kociklusok kohomológok egymással*, ha létezik $\eta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, mellyel

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 + \eta \circ \{\cdot,\cdot\}.$$

Két *kommutátor kociklus gyengén kohomológ*, ha $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ vagy $-\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ kohomológ egymással.

6.6.5. Tétel. *Egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető egy Lie-csoport lokális kociklusainak kohomológiaosztályai és a csoport Lie-algebrája kommutátor kociklusainak kohomológiaosztályai között. Ugyanez igaz a gyenge kohomológiaosztályokra.*

A kommutátor kociklusok általában könnyen kezelhető függvények, szemben az unitér kociklusokkal, osztályozásuk is egyszerűbb. A következő tétel a fedőcsoport projektív ábrázolását köti össze a csoport projektív ábrázolásával.

6.6.6. Tétel. *A csoport univerzális fedőcsoportjának folytonos projektív ábrázolásai között megtalálhatjuk a csoport minden folytonos projektív ábrázolását.*

A sugárábrázolások rendkívül szoros kapcsolatban állnak az unitér ábrázolásokkal, ugyanis minden sugárábrázolás egy másik csoport unitér ábrázolásának tekinthető. Most ezt a kapcsolatot vizsgáljuk meg részletesen.

6.6.6. Definíció. Legyen G összefüggő Lie-csoport, K összefüggő kommutatív Lie-csoport és κ a G-csoport K-kociklusa. Ekkor *G-nek κ-szerinti K-val való centrális kiterjesztése* egy $G_\kappa(K)$ csoport, melynek alaphalmaza $G \times K$, a szorzás pedig a következő:

$$(g_1,k_1)(g_2,k_2) = (g_1 g_2, \kappa(g_1,g_2) k_1 k_2).$$

6.6.7. Tétel. *[Var] A $G_\kappa(K)$ csoporton megadható differenciálható struktúra, mellyel $G_\kappa(K)$ Lie-csoport.*

A továbbiakban a centrális kiterjesztésnél arra a speciális esetre lesz szükségünk, amikor K az egységnyi komplex számok $\mathbb{T}$ csoportja.

6.6.8. Tétel. *Legyen (U, κ) a G Lie-csoport sugárábrázolása. Ekkor az*

$$U^\kappa_{g,\lambda} := \lambda^{-1} U_g \qquad (g, \lambda) \in G \times \mathbb{T} \tag{6.6.8.}$$

formulával meghatározva U^κ a $G_\kappa(\mathbb{T})$ csoport unitér ábrázolása. Fordítva, ha

$$(g, \lambda) \mapsto V_{(g,\lambda)}$$

a $G_\kappa(\mathbb{T})$ csoport unitér ábrázolása, melyre igaz, hogy

$$V_{(e,\lambda)} = \lambda^{-1} id_H \qquad \forall \lambda \in \mathbb{T} \tag{6.6.9.}$$

akkor bevezetve az $U_g := V_{(g,1)}$ jelölést az

$$U : g \mapsto U_g$$

formulával meghatározott leképzéssel (U, κ) a G csoport sugárábrázolása. Ezenkívül $V_{(g,\lambda)} = \lambda^{-1} U_g$.

6.6.7. Definíció. A $G_\kappa(\mathbb{T})$ csoport unitér ábrázolását *generáló ábrázolásnak* nevezzük, ha teljesíti a (6.6.4) feltételt.

Foglaljuk össze az eddigieket:

Legyen G összefüggő Lie-csoport; cél a G csoport összes gyengén irreducibilis, folytonos, nem ekvivalens, projektív ábrázolásának a megtalálása. Először a gyenge irreducibilitás feltételét mellőzve keressük a projektív ábrázolásokat. Mivel G összefüggő, ezért minden folytonos projektív ábrázolása egy folytonos unitér sugárábrázolásból kapható. Ezért elég a G csoport nemekvivalens folytonos unitér sugárábrázolásait megtalálni. Ehhez osztályozni kell a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra kommutátor kociklusainak gyenge kohomológia osztályait. Legyen $(\kappa_i)_{i \in I}$ a G csoport unitér kociklusainak minden gyenge kohomológiaosztályából egy-egy reprezentáns elem. Ekkor minden $i \in I$-re az összes (U, κ_i) folytonos nem ekvivalens sugárábrázolást akarjuk megadni. Vegyük minden $i \in I$-re a $G_{\kappa_i}(\mathbb{T})$ centrális kiterjesztést. Legyen $(V^{(i,j)} : (g, \lambda) \mapsto V^{(i,j)}_{(g,\lambda)})_{j \in J}$ a $G_{\kappa_i}(\mathbb{T})$ csoport nemekvivalens, folytonos, unitér generáló ábrázolásainak rendszere egy H Hilbert-téren. A G csoport nem ekvivalens folytonos projektív ábrázolásai a $(V^{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ ábrázolások által generált projektív ábrázolások lesznek. A $V^{(i,j)}$ unitér ábrázolásokra nehéz olyan feltételt szabni, mely garantálná, hogy az általuk generált projektív ábrázolások gyengén irreducibilisek lesznek. Annyit mondhatunk csak, hogy ha $V^{(i,j)}$ nem irreducibilis, akkor a belőle származtatott projektív ábrázolás nem lesz gyengén irreducibilis.

Végül nézzük meg, a topologikus csoportok egy fajtáját, a speciális inhomogén csoportokat. Mint látni fogjuk ezeknek a csoportoknak az ábrázolásánál célszerű a fedőcsoportjuk ábrázolását keresni.

Az inhomogén csoport definíciója előtt megemlítünk egy lemmát.

6.6.9. Lemma. *Legyen G összefüggő Lie-csoport és legyen*

$$\rho : g \mapsto \rho(g) \qquad g \in G, \quad \rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$$

a G csoport ábrázolása a V véges dimenziós valós vektortéren. Ekkor a

$$(g, v) \mapsto \rho(g)v$$

leképzés analitikus a $G \times V$ téren.

6.6.8. Definíció. Legyen G összefüggő Lie-csoport és legyen

$$\rho : g \mapsto \rho(g) \qquad g \in G, \quad \rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$$

a G csoport ábrázolása a V véges dimenziós valós vektortéren. Ha V vektortér additív csoportját tekintjük, akkor a

$$G_\rho = G \times_\rho V$$

féldirekt szorzat neve *G-hez ρ-val asszociált inhomogén csoport.*

A G_ρ csoport a szorzat analitikus struktúrával összefüggő Lie-csoport. Ha G egyszeresen összefüggő, akkor G_ρ is egyszeresen összefüggő.

6.6.9. Definíció. A G csoport egy ρ reprezentációját a V valós vektortéren *megengedett reprezentációnak* nevezzük, ha nincs ρ-ra invariáns antiszimmetrikus bilineáris forma $V \times V$-n.

6.6.10. Tétel. *Legyen G összefüggő, féligegyszerű Lie-csoport és ρ egy megengedett reprezentációja G-nek a V valós, véges dimenziós vektortéren. Legyen továbbá G_ρ^* a G_ρ univerzális fedőcsoportja. Ekkor G_ρ^* minden unitér kociklusa egzakt. Ha*

$$P : G_\rho \to \mathrm{Aut}\big(L(H)\big) \qquad g \mapsto P_g$$

projektív ábrázolás a H komplex, szeparábilis Hilbert-téren, akkor létezik a G_ρ^* fedőcsoportnak egy

$$U : g^* \mapsto U_{g^*} \qquad g^* \in G_\rho^*$$

unitér ábrázolása a H Hilbert-téren úgy, hogy minden $g \in G$ elem esetén P_g az U_{g^*} által indukált. (Minden g feletti g^* elem esetén, vagyis minden olyan g^* elemre a fedőcsoportból, melyet a fedőhomomorfizmus a g elembe visz.) Ha ρ-nak nem részreprezentációja a triviális reprezentáció, akkor U az egyetlen ilyen tulajdonsággal rendelkező ábrázolása G_ρ^*-nak.

6.6.11. Tétel. *Legyen G összefüggő Lie-csoport, G^* a G fedőcsoportja a δ fedőhomomorfizmussal és H komplex szeparábilis Hilbert-tér, melyre $\dim H \neq 2$. Legyen U a G^*-nek H-beli folytonos, unitér, irreducibilis ábrázolása. Ha $F : G \to G^*$ tetszőleges olyan függvény, melyre:*

$$\delta \circ F = id_G,$$

akkor az

$$U : G \to \mathrm{Aut}\big(L(H)\big) \quad g \mapsto \Phi_U^{F(g)}$$
$$\Phi_U^{F(g)}(P) := U_{F(g)} P U_{F(g)}^{-1} \qquad P \in L(H)$$

definícióval adott függvény a G-nek folytonos H-beli projektív, gyengén irreducibilis ábrázolása. Ez F-től független abban az értelemben, hogy ha $F' : G \to G^*$ szintén olyan, hogy

$$\delta \circ F' = id_G$$

akkor a fenti módon belőlük származtatott projektív ábrázolások megegyeznek.

6.7. Reprezentáció Hilbert-nyalábon

A (6.4.) szakaszban megadtuk azoknak a topologikus csoportoknak a folytonos unitér ábrázolásait, melyek féldirekt szorzat alakúak. A (6.5.) szakaszban bevezettünk egy ezzel unitér ekvivalens ábrázolást. Most a (6.5.) szakaszban leírtakat általánosítjuk, így jutunk el a nyalábokon történő ábrázolásokhoz.

6.7.1. Definíció. Legyen G csoport Borel-tér, ekkor G-t *Borel-csoport*nak hívjuk.

Legyen (G, X, T) transzformációcsoport, ahol G szeparábilis Borel-csoport és X Borel-tér. Ha a

$$T_g : X \to X$$

automorfizmus minden $g \in G$ elem esetén Borel-mérhető, akkor azt mondjuk, hogy X *G-tér*. Ha ezenkívül a T leképezés is Borel-mérhető, akkor azt mondjuk, hogy X *Borel-féle G-tér*.

Az Y topologikus tér esetén azt a legkisebb Borel-struktúrát, mely Y minden nyílt halmazát tartalmazza Y *természetes Borel-struktúrájá*nak nevezzük.

Legyen $(X, \mathcal{B}(X))$ Borel-tér és Y részhalmaza X-nek, ekkor legyen

$$\mathcal{B}(X)_Y := \{B \cap Y | B \in \mathcal{B}(X)\}$$

halmazrendszer. Az $(Y, \mathcal{B}(X)_Y)$ párt az *Y-nak X-ből származtatott Borel-struktúrájá*nak nevezzük.

Legyen Y teljes, szeparábilis metrikus tér, természetes Borel-struktúrával ellátva. Legyen X Borel-részhalmaza Y-nak. X-nek az Y-ból származtatott Borel-struktúráját *standard*nak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy X *standard Borel-féle G-tér*, ha X Borel-féle G-tér és X Borel-struktúrája standard.

6.7.2. Definíció. Legyen (G, X, T) és (G, B, Z) két olyan transzformációcsoport, ahol X és B standard Borel-féle G-terek, valamint a G csoport tranzitíven hat X-en. Legyen

$$\pi : B \to X$$

Borel-féle leképzés olyan, hogy minden $g \in G$ elemre a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{Z_g} & B \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow[T_g]{} & X \end{array}$$

Ha minden $x \in X$ elemre a

$$B_x := \pi^{-1}(\{x\})$$

tér szeparábilis Hilbert-tér, melynek természetes Borel-struktúrája megegyezik a B által indukált Borel-struktúrával, valamint minden $g \in G$ és $x \in X$ elem esetén

$$T_g : B_x \to B_{gx}$$

unitér izomorfizmus, akkor az (B, X, π) hármast G *Hilbert-nyaláb*nak nevezzük.

Legyen $|\cdot|_x$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ a B_x Hilbert-téren értelmezett norma és skaláris szorzás. Legyen $c : X \to G$ a (G, X, T_X) transzformációcsoport olyan x_0-beli Borel-metszete (6.1.5. def.), melyre igaz, hogy

$$c(x_0) = e_G.$$

Definiáljuk a *Hilbert-nyaláb metszetei*nek a halmazát:

$$\text{(6.7.1.)} \qquad \mathrm{Sect}_B := \Big\{ \varphi : X \to B \quad \Big| \quad \varphi \quad \text{Borel-féle és} \quad \forall x \in X : \varphi(x) \in B_x \Big\}.$$

Ekkor minden $x \in X$ és $\varphi \in \mathrm{Sect}_B$ elemre:

$$\text{(6.7.2.)} \qquad |\varphi(x)|_x^2 = \big| \, T_{c(x)^{-1}} \varphi(x) \, \big|_{x_0}^2 .$$

Tehát az $x \mapsto |\varphi(x)|_x^2$ leképzés Borel-mérhető függvény. Legyen α egy σ-véges, invariáns mérték X-en; ez lehetőséget nyújt az alábbi függvénytér definiálásához:

$$\text{(6.7.3.)} \qquad \mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \mathrm{Sect}_B \quad \middle| \quad \int_X |\varphi(x)|_x^2 d\alpha(x) < \infty \right\}.$$

A $\mathcal{V}$ tér teljes prehilbert-tér az alábbi skalárszorzással:

$$\text{(6.7.4.)} \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \int_X \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle_x d\alpha(x).$$

(A $\mathcal{V}$ tér teljessége nem nyilvánvaló!) Legyen $\tilde{H}$ a $\mathcal{V}$-hez asszociált Hilbert-tér. Definiáljuk a $\tilde{S}$ és $\tilde{U}$ leképzéseket:

$$\text{(6.7.5.)} \qquad \tilde{S} : \tilde{H} \to L^2(X, B_{x_0}, \alpha) \qquad \varphi \mapsto \tilde{S}(\varphi)$$

$$\tilde{S}(\varphi)(x) := Z_{c(x)^{-1}} \varphi(x),$$

(6.7.6.)
$$\tilde{U} : G \times \tilde{H} \to \tilde{H} \qquad \varphi \mapsto \tilde{U}_g(\varphi)$$
$$\tilde{U}_g(\varphi)(x) := Z_g \varphi\big(T_{g^{-1}} x\big) = Z_g \circ \varphi \circ T_{g^{-1}}(x).$$

Az eddig definiált fogalmakat és leképzéseket most egy speciális esetre korlátozzuk. Legyen a G csoport $G = H \times_t A$ féldirekt szorzat alakú és legyen ennek

$$(\omega, \alpha, f, x_0, c_{x_0}, m)$$

megengedett hatosa, ahol az m ábrázolás tere W. A (B, ω, π) hármas legyen olyan G Hilbert-nyaláb, ahol az m ábrázolás W tere azonosítható a B_{x_0}-térrel. Továbbá legyen minden $g \in B_{x_0}$ esetén Z_g az m_g által indukált leképzés. Ekkor a következőket mondhatjuk az eddig definiált fogalmakról.

6.7.1. Tétel. *A fenti jelöléseket alkalmazva $\tilde{S}$ unitér operátor, valamint*

$$\tilde{U} \in \mathrm{Hom}_C\big(G, \mathrm{Unit}_S(\tilde{H})\big),$$

$\tilde{U}$ unitér ekvivalens U-val (a megengedett hatos által meghatározott ábrázolással), vagyis az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{S}} & L^2(\omega, \alpha, B_{x_0}) \\
{\scriptstyle \tilde{U}_g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle U_g} \\
\tilde{H} & \xrightarrow[\tilde{S}]{} & L^2(\omega, \alpha, B_{x_0})
\end{array}$$

6.8. Aritmetikai Galilei- és Poincaré-csoport

A továbbiakban az alábbi mátrixokra lesz szükségünk: Legyen $\mathrm{Mat}_n(K)$ az $n \times n$-es K test feletti mátrixok csoportja.

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(n, K) &:= \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) | A \quad \text{invertálható.}\} \\
\mathrm{SL}(n, K) &:= \{A \in \mathrm{GL}(n, K) | \det A = 1\} \\
O(n, K) &:= \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) | A \quad \text{ortogonális.}\} \\
\mathrm{SO}(n, K) &:= \{A \in O(n, K) | \det A = 1\} \\
O_{k,l} &:= \{A \in \mathrm{Mat}_{k+l}(\mathbb{R}) | A \quad (k, l) \text{ szignatúrájú pszeudoortogonális mátrix.}\}
\end{aligned}$$

6.8.1. Tétel. *Az alábbi topologikus csoportok Lie-csoportok, ha $K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$:*

$$\mathrm{GL}(n, K), \mathrm{SL}(n, K), O(n, K), \mathrm{SO}(n, K), O_{k,l}.$$

Továbbiakban, ha a számtestet nem írjuk ki, akkor a valós számtestet használjuk. Legyen $\mathcal{L}^n := O_{1,n-1}$, az $\mathcal{L}^n$ csoport neve *Lorentz-csoport* az $(n-1)$-dimenziós téren. Jelölje $\mathcal{L}^n_{id}$ a *valódi Lorentz-csoport*ot, mely a $\mathcal{L}^n$ csoport egységet tartalmazó összefüggő része.

Legyen t_1 a következő beágyazás:

$$(6.8.1.) \qquad t_1 : \mathcal{L}^n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \qquad A \mapsto A.$$

A $\mathcal{P}^n := \mathcal{L}^n \times_{t_1} \mathbb{R}^n$ csoport neve *Poincaré-csoport*, a $\mathcal{P}^n_{id} := \mathcal{L}^n_{id} \times_{t_1} \mathbb{R}^n$ csoporté *valódi Poincaré-csoport.*

6.8.2. Tétel. *A $\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^n_{id}, \mathcal{P}^n, \mathcal{P}^n_{id}$ csoportok nem kompakt, szeparált, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, lokálisan kompakt csoportok. Továbbá σ-kompaktak és teljesen metrizálhatók. Az $\mathrm{SO}(n)$ csoport topológiája kompakt, T_2 topológia.*

Legyen G^n az az $n \times n$-es diagonális mátrix, melynek főátlóbeli első eleme 1, a többi -1. Ekkor a Lorentz-csoport az

$$(6.8.2.) \qquad \mathcal{L}^n = \{A \in \mathrm{Mat}_n \,|A^T G^n A = G^n\}.$$

mátrixcsoporttal adható meg.

A t_2 beágyzazás legyen

$$(6.8.3.) \qquad t_2 : O(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \qquad A \mapsto A.$$

A $\mathcal{G}^*_n := O(n) \times_{t_2} \mathbb{R}^n$ csoport neve *Euklideszi-csoport.* A szorzási szabály mindkét csoport esetén hasonló:

$$(6.8.4.) \quad (A_1, x_1)(A_2, x_2) = (A_1 A_2, x_1 + A_1 x_2) \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, A_1, A_2 \in \mathcal{L}^n, \mathcal{G}^*_n.$$

Az $\mathcal{L}^n$ és $\mathcal{G}^*_n$ csoportnak megadható természetes hatása $\mathbb{R}^n$-en:

$$(6.8.5.) \qquad \begin{aligned} T_{\mathcal{L}} :&\mathcal{L}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (A, x)\xi \mapsto A\xi + x \\ T_{\mathcal{G}} :&\mathcal{G}^*_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (A, x)\xi \mapsto A\xi + x. \end{aligned}$$

A $\mathcal{G}_n$ *egyszerű Galilei-csoport* alaphalmaza legyen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n)$, a szorzási szabály pedig:

$$(6.8.6.) \qquad (x_1, v_1, R_1)(x_2, v_2, R_2) = (x_1 + R_1 x_2, v_1 + R_1 v_2, R_1 R_2).$$

A $\mathcal{G}^n$ *teljes Galilei-csoport* alaphalmaza legyen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n)$, a szorzási szabály pedig:

$$(6.8.7.) \quad (t_1, x_1, v_1, R_1)(t_2, x_2, v_2, R_2) = (t_1 + t_2, x_1 + R_1 x_2 + v_1 t_2, v_1 + R_1 v_2, R_1 R_2).$$

A $\mathcal{G}^n$ teljes Galilei-csoport természetes hatása az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ halmazon:

(6.8.8.) $T_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^n \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \qquad (t, x, v, R)(\tau, \xi) \mapsto (t + \tau, A\xi + tv + x).$

A teljes Galilei-csoport minden $(t, x, v, A) \in \mathcal{G}^n$ eleme előállítható

(6.8.9.)
$$\begin{pmatrix} A & v & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(n + 2) \times (n + 2)$-es mátrix alakjában.

7. A Poincaré-csoport ábrázolása

7.0. Bevezető

Ebben a fejezetben a Poincaré-csoport folytonos unitér ábrázolásait adjuk meg.

Az első szakaszban, a Poincaré-csoport részletes vizsgálata előtt, megnézzük a Lorentz-csoport néhány érdekes és a további alkalmazások szempontjából fontos tulajdonságát. Ezen kívül a folytonos unitér ábrázolások megtalálására a 6. fejezetben leírt elméletet alkalmazzuk a Poincaré-csoport esetére.

A második szakaszban a pályákon választott referenciaponthoz tartozó stabilizátorok ábrázolásait adjuk meg. Ebben a szakaszban alapozzuk meg a fénynél lassabban haladó részecskék spinjét, a fénysebességgel haladó részecskék három, alapvetően különböző fajtáját, valamint a fénynél gyorsabb részecskék két konkrét típusát.

A harmadik szakaszban a fénynél lassabban haladó részecskék megfelelő ábrázolását adjuk meg a 6. fejezet alapján. Továbbá megadjuk az így kapott ábrázolással unitér ekvivalens kalapos- illetve kalaptalan spinoramplitúdóhoz tartozó ábrázolásokat.

A negyedik szakaszban a fénysebességgel haladó részecskéket vizsgáljuk meg. Látni fogjuk, hogy ezek egy részének értelmezhető a spinje. Az ilyen részecskéket egyszerűbb matematikailag kezelni, ezért nem csak a kvantummechanika szempontjából kívánatos ábrázolásukat adjuk meg, hanem a spinoramplitúdókhoz tartozókat is. A többi fénysebességgel haladó részecske megfelelő ábrázolását szintén megadjuk. Ekkor az ábrázolás tere meglehetősen bonyolult lesz, ezért egy könnyebben kezelhető Hilbert-téren megadunk egy újabb (az eredetivel unitér ekvivalens) ábrázolást.

Az ötödik szakaszban a fénynél gyorsabb részecskék egy csoportjával foglalkozunk. Matematikailag nehéz feladat a teljes osztályozásuk, ezért csak két fajtával számolunk. Az első fajtába tartozókat egy nemnegatív valós számmal jellemezhetjük, a második típusúakat pedig egy félegész számmal. Megadjuk az unitér ábrázolásukat, valamint az első típusúak esetén a spinoramplitúdós ábrázolást is. Valamint az így kapott ábrázolások bonyolult Hilbert-teréről áttérünk egy másik egyszerűbb térre, amin az ábrázolások alakja is könnyebben kiszámolható. Végül a hatodik szakaszban az álló részecskéket vizsgáljuk meg.

Irodalom

[BR] A. Barut, R. Raczka: *Theory of Groups Representations and applications* 1-2 kötet, PWN, 1977.

[Kri] Kristóf János: *A Poincaré-csoport ábrázolása* Szakdolgozat

[Mac] G. W. Mackey: *Unitary Group Representation in Physics, Probability and Number Theory* Benjamin/Cummings, 1978.

[Mat] Tamás Matolcsi: *A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics.* Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.

[Oni] A. L. Onishchik (szerkesztő): *Lie Groups and Lie Algebras I.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS) 20. kötet Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Var] V. S. Varadarajan: *Geometry of Quantum Theory II.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

[Vil] A. A. Kirillov (Ed.): *Representation Theory and Noncommutatitve Harmonic Analysis II.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

Az 1, 2 szakasz alapja [Br], [Kri], [Mac], [Mat], [Oni] és [Var], a 3. és 6. szakaszé pedig [Kri] és [Var].

A 3. szakaszban kifejtett, fénynél lassabb részecskék kétféle spinoramplitúdójának az ábrázoláselméleti szempontból korrekt matematikai tárgyalásával még nem találkoztam. A 4. szakaszban a fotonokra bevezetett spinoramplitúdók egzakt, helyes megadását nem találtam az irodalomban. A fénynél gyorsabb objektumok ábrázoláselméleti megközelítésével szintén nem találkoztam még.

7.1. A $\mathcal{P}^4$ csoport projektív reprezentációja

Először az $\mathcal{L}^4$ teljes Lorentz-csoportot vizsgáljuk meg közelebbről, majd a (6.6.) szakaszban leírtak alapján megkeressük a $\mathcal{P}^4$ Poincaré-csoport projektív ábrázolásait. Ehhez felhasználjuk a (6.4.) szakaszban bevezetett megengedett hatosok által indukált ábrázolásokról szóló tételeket, megadjuk a (6.5.)-ben definiált egyszerűbb ábrázolást, valamint a (6.7.) segítségével áttérünk a Hilbert-nyalábon történő ábrázolásra. Ennek segítségével megkapjuk a Dirac-egyenletet.

Definiáljuk a következő mátrixhalmazt:

(7.1.1.) $$\mathfrak{p}^n := \{A \in \mathrm{Mat}_n \,|A = A^T, AG^n + G^n A = 0\},$$

melyre a Lorentz-csoport részletes vizsgálatánál lesz szükségünk.

7.1.1. Tétel. *Tekintsük a*

$$f : \{+1,-1\} \times \{+1,-1\} \times SO(3) \times \mathfrak{p}^4 \to \mathcal{L}^4 \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, R, S) \mapsto \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 R \end{pmatrix} \exp(S)$$

leképzést. Ha a $\{+1,-1\}$ halmazon a diszkrét topológiát vesszük és f értelmezési tartományán a szorzattopológiát, akkor f homeomorfizmus.

A $\mathcal{L}^4$ csoportnak a fenti tétel alapján négy összefüggő komponense van, ezeket megadhatjuk a

(7.1.2.) $$\begin{aligned} \mathcal{L}^4_1 &:= f(\{+1\} \times \{+1\} \times SO(3) \times \mathfrak{p}^4) \\ \mathcal{L}^4_s &:= f(\{+1\} \times \{-1\} \times SO(3) \times \mathfrak{p}^4) \\ \mathcal{L}^4_t &:= f(\{-1\} \times \{-1\} \times SO(3) \times \mathfrak{p}^4) \\ \mathcal{L}^4_{st} &:= f(\{-1\} \times \{+1\} \times SO(3) \times \mathfrak{p}^4). \end{aligned}$$

formulákkal. Definiáljuk a tükrözés diagonális mátrixait:

(7.1.3.) $$\begin{aligned} I &:= \mathrm{diag}(1,1,1,1) & I_t &:= \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \\ I_s &:= \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) & I_{st} &:= \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Ezek L_{inv} halmaza

(7.1.4.) $$L_{inv} := \{I, I_s, I_t, I_{st}\}$$

véges, kommutatív, diszkrét topologikus részcsoportja $\mathcal{L}^4$-nek. A halmaz elemeit *téridő tükrözések*nek nevezzük.

7.1.2. Tétel. *Minden $\Lambda \in \mathcal{L}^4_{id}$ elemhez létezik olyan $u \in \mathbb{R}^+_0$ és $R_1, R_2 \in SO(3)$, hogy:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}.$$

Speciálisan, minden $\Lambda \in \mathcal{L}^4_{id}$ elemre teljesülnek:

$$\det \Lambda = 1, \qquad \Lambda_{0,0} \geq 1.$$

Itt $\Lambda_{i,j}$ a Λ mátrix (i,j) elemét jelöli.

Most rátérünk a Lorentz-csoport fedőcsoportjának a meghatározására. Legyenek $(\sigma_i)_{i=1,2,3}$ a Pauli-mátrixok és (σ_0) a 2×2-es egységmátrix, azaz

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezek segítségével megadunk egy A izomorfizmust a valós négydimenziós vektortér és a $H_2(\mathbb{C})$-vel jelölt, 2×2-es komplex, hermitikus mátrixok között:

(7.1.5.) $$A : \mathbb{R}^4 \to H_2(\mathbb{C}) \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{i=0}^{3} x_i \sigma_i$$

$$\text{vagyis} \quad A(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Az A leképzésre igazak a

(7.1.6.) $$\det A(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \qquad \operatorname{Tr} A(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_0$$

képletek. Az egyszerűbb írásmód kedvéért az $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ elemet $(x_0, \underline{x})$ vagy $\vec{x}$ alakban írjuk. Az $\vec{x}$ elem A általi képét $\hat{x}$-szel jelöljük. Ha $(\cdot,\cdot)$ jelöli az euklideszi skalárszorzat A által létesített képét, akkor a skalárszorzatra a

(7.1.7.) $$\vec{x}_1 \vec{x}_2 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\hat{x}_1 \hat{x}_2)$$

képletet kapjuk.

Minden $m \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mátrixhoz definiáljuk a

(7.1.8.) $$\delta(m)_* : H_2(\mathbb{C}) \to H_2(\mathbb{C}) \qquad \xi \mapsto m \xi m^*$$

lineáris leképzést. Az A leképzés segítségével minden $m \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ elemhez az $\mathbb{R}^4$ térnek egy

(7.1.9.) $$\hat{\delta}(m) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \vec{x} \mapsto A^{-1}\big(m(A\vec{x})m^*\big)$$

transzformációja tartozik. Mivel $\det m = 1$ és $\det \xi = \det m \xi m^*$, ezért $\hat{\delta}(m) \in \mathcal{L}^4_{id}$.

7.1.3. Tétel. *Minden $\Lambda \in \mathcal{L}^4_{id}$ transzformációhoz létezik egy $m \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ úgy, hogy $\hat{\delta}(m) = \Lambda$. A*

$$\delta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}^4_{id} \qquad m \mapsto \hat{\delta}(m)$$

leképzés olyan szürjektív, valós-analitikus, csoporthomomorfizmus, melynek magja az

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

halmaz.

7.1.4. Tétel. *Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoport féligegyszerű, összefüggő, egyszeresen összefüggő, hatdimenziós Lie-csoport. Az $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \delta)$ pár az $\mathcal{L}^4_{id}$ csoport fedése.*

A Lorentz-csoport után a Poincaré-csoport fedőcsoportját keressük meg. Legyen

$$\mathcal{P}^* := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4 \tag{7.1.10.}$$

féldirekt szorzat és legyen

$$\bar{\delta} : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^4_{id} \qquad (A, x) \mapsto (\delta(A), x) \tag{7.1.11.}$$

leképezés.

7.1.5. Tétel. *A $\bar{\delta}$ leképezés szürjektív, valós-analitikus csoport homomorfizmus. A $\mathcal{P}^*$ csoport nem féligegyszerű, összefüggő, egyszeresen összefüggő, valós tízdimenziós Lie-csoport. A $(\mathcal{P}^*, \bar{\delta})$ pár a $\mathcal{P}^4_{id}$ csoport fedése.*

Ha $\mathbb{R}^4$ teret vektortérként nézzük és a (6.8.) pontban definiált t_1 leképzést az $\mathcal{L}^4_{id}$ csoport ábrázolásaként, akkor megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{P}^4_{id}$ a $\mathcal{L}^4_{id}$-hez δ-val asszociált inhomogén csoport (6.6.7. def.) továbbá δ megengedett reprezentáció (6.6.7. def.). A (6.6.9.) tétel szerint a $\mathcal{P}^*$ csoport minden unitér kociklusa egzakt, valamint a $\mathcal{P}^4_{id}$ csoport folytonos projektív ábrázolásait megkaphatjuk a $\mathcal{P}^*$ folytonos unitér ábrázolásaiból.

Most rátérünk a $\mathcal{P}^*$ csoport folytonos unitér ábrázolásainak a megadására a (6.) fejezet alapján.

Az $\mathbb{R}^4$ téren a Lorentz-skalárszorzat

$$\{(x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)\} := x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \tag{7.1.12.}$$

alakú. A Lorentz-skalárszorzatot gyakran

$$\{(x_0, \underline{\mathrm{x}}), (y_0, \underline{\mathrm{y}})\} = \{\vec{x}, \vec{y}\} = x_0 y_0 - \underline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}}$$

alakban írjuk. Minden $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$ elemre definiálhatjuk $\mathbb{R}^4$ egy karakterét:

$$\dot{a} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{T} \qquad \vec{x} \mapsto \exp i\{\vec{x}, \vec{a}\}. \tag{7.1.13.}$$

Ekkor a

$$\text{(7.1.14.)} \qquad \vartheta : \mathbb{R}^4 \to \hat{\mathbb{R}}^4 \qquad \vec{a} \mapsto \dot{a}$$

leképzés izomorfizmus $\mathbb{R}^4$ és az $\mathbb{R}^4$ karaktercsoportja között. Bevezetjük a P^4 jelölést a $\hat{\mathbb{R}}^4$ karaktercsoportra és a vele izomorf $\mathbb{R}^4$ csoportra. Az $\mathbb{R}^4$ karaktercsoportja azonosítható $\mathbb{R}^4$ csoporttal, ezt másképp úgy mondjuk, hogy $\mathbb{R}^4$ *önduális.* Azonban a továbbiakban megmaradunk a P^4 jelölés mellett.

Idézzük fel a (6.2.4.-6.2.6.) formulákat, a

$$H := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \quad t := \delta \quad A := \mathbb{R}^4$$

konkrét esetben. Igazolható, hogy a (6.2.6.) formulában szereplő θ leképzés az imént definiált ϑ izomorfizmus, akkor teljesül a (6.2.6.) fomula, vagyis ebben a konkrét esetben

$$\text{minden} \quad h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\text{-re} \quad \vartheta \circ \delta_h = q_{P^4,h}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \circ \vartheta.$$

Ekkor a következő állítást kapjuk.

7.1.6. Állítás. *A* $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathbb{R}^4, \delta)$ *és* $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), P^4, q_{P^4}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})})$ *topologikus transzformációcsoportok ekvivalensek, azaz minden* $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *elemre az alábbi diagram kommutatív.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "\delta_h"] \arrow[d, "\vartheta"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "\vartheta"] \\
P^4 \arrow[r, "q_{P^4}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(h,\cdot)"'] & P^4
\end{tikzcd}$$

Mivel P^4 izomorf az $\mathbb{R}^4$ csoporttal, ezért a $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathbb{R}^4, \delta)$ transzformációcsoport helyett a $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), P^4, \delta)$ transzformációcsoporttal foglalkozunk. A δ leképzés eredetileg

$$\delta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^4)$$

alakú, azonban a jelölés megváltoztatása nélkül gyakran

$$\delta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(P^4)$$

leképzésnek gondoljuk.

Az $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), P^4, \delta)$ speciális lokálisan kompakt transzformációcsoportban legyen minden $m \in \mathbb{R}^+$-re

(7.1.15.)

$$\begin{aligned}
X_m^{\pm} &:= \{(p_0, \underline{\mathrm{p}}) \in P^4 | p_0^2 - \underline{\mathrm{p}}^2 = m^2, \mathrm{sgn}(p_0) = \pm 1\} \\
X_0^{\pm} &:= \{(p_0, \underline{\mathrm{p}}) \in P^4 | p_0^2 - \underline{\mathrm{p}}^2 = 0, \mathrm{sgn}(p_0) = \pm 1\} \\
X_0^0 &:= \{(0, \underline{0}) \in P^4\} \\
Y_m &:= \{(p_0, \underline{\mathrm{p}}) \in P^4 | p_0^2 - \underline{\mathrm{p}}^2 = -m^2\}.
\end{aligned}$$

7.1.7. Tétel. *Az $X_m^{\pm}, X_0^{\pm}, X_0^0, Y_m$ halmazok az adott transzformációcsoport pályái.*

A (6.3.2.) tétel szerint minden pályán létezik kváziinvariáns mérték. Definiáljuk a következő mértékeket:

(7.1.16.)
$$\forall m \in \mathbb{R}_0^+ \quad \alpha_m^{\pm} : K(X_m^{\pm}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \alpha_m^{\pm}(f)$$
$$\alpha_m^{\pm}(f) := \int_{P^3} \frac{f\big(\pm\sqrt{\underline{\mathrm{p}}^2 + m^2}, \underline{\mathrm{p}}\big)}{2\sqrt{\underline{\mathrm{p}}^2 + m^2}} d\underline{\mathrm{p}}$$

(7.1.17.)
$$\forall m \in \mathbb{R}^+ \quad \beta_m : K(Y_m) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \beta_m(f)$$
$$\beta_m(f) := \int_{|\underline{\mathrm{p}}|>m} \frac{f\big(+\sqrt{\underline{\mathrm{p}}^2 + m^2}, \underline{\mathrm{p}}\big) + f\big(-\sqrt{\underline{\mathrm{p}}^2 + m^2}, \underline{\mathrm{p}}\big)}{2\sqrt{\underline{\mathrm{p}}^2 - m^2}} d\underline{\mathrm{p}}$$

Gyakran fogjuk használni az alábbi jelöléseket:

$$\int_{X_m^{\pm}} f(\vec{p}) d\alpha_m^{\pm}(\vec{p}) := \alpha_m^{\pm}(f)$$
$$\int_{Y_m} f(\vec{p}) d\beta_m(\vec{p}) := \beta_m(f).$$

7.1.8. Tétel. *Az $\alpha_m^{\pm}, \beta_m$ mértékek pozitív, nemnulla, invariáns mértékek a pályákon. Az X_0^0 pályán minden mérték invariáns és triviális.*

Most minden pályán válsztunk egy (x_0) reprezentáns pontot, majd ezeknek a pontoknak keressük meg a (G_{x_0}) stabilizátorát. A pontok legyenek az alábbiak:

(7.1.18.)
$$\begin{aligned} (\pm m, 0, 0, 0) &\in X_m^{\pm} \quad m \in \mathbb{R}^+ \\ (\pm 1, 0, 0, \pm 1) &\in X_0^{\pm} \\ (0, m, 0, 0) &\in Y_m \quad m \in \mathbb{R}_0^+ \\ (0, 0, 0, 0) &\in X_0^0. \end{aligned}$$

7.1.9. Tétel. *Az $(\pm m, 0, 0, 0)$ pont stabilizátora az $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ csoport.*
Az $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$ stabilizátora:

$$G_{(\pm 1,0,0,\pm 1)} = \left\{ \begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; z \in \mathbb{T} \right\}.$$

Az $(0, m, 0, 0)$ pont stabilizátora:

$$G_{(0,m,0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & i \cdot b \\ i \cdot c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad + bc = 1 \right\}.$$

A $(0,0,0,0)$ *pont stabilizátora az egész* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *csoport.*

A megengedett hatosban szereplő adatok közül eddig meghatároztuk a pályákat, a pályákon megadtunk pozitív, nemnulla kváziinvariáns mértékeket, melyek szerencsére nem csak kváziinvariánsak, hanem invariánsak is, ezért a megengedett hatosban szereplő f függvény az azonosan 1 függvény. Választottunk pályákat reprezentáló pontokat, melyek stabilizátorát megadtuk. Ezeken kívül szükség van adott reprezentáns pontbeli Borel-metszetekre, valamint a stabilizátorok folytonos unitér ábrázolásaira. A Borel-metszetek a (6.1.1.) tétel szerint minden ponthoz léteznek a pályákon.

7.1.10. Tétel. *A Borel-metszetekre vonatkozó feltételek:*

(1) *Ha* $m \in \mathbb{R}^+$, *akkor a*

$$c_{(\pm m,0,0,0)} : X_m^{\pm} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

függvény pontosan akkor metszete az $X_m^{\pm}$ *pályának az* $(\pm m, \underline{0})$ *reprezentáns pontban, ha:*

$$c_{(\pm m,0,0,0)}(\vec{p})c_{(\pm m,0,0,0)}(\vec{p})^* = \frac{\pm 1}{m}\sum_{i=0}^{3} p_i\sigma_i \quad \forall \vec{p} \in X_m^{\pm}.$$

(2) *Egy*

$$c_{(\pm 1,0,0,\pm 1)} : X_0^{\pm} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

függvény pontosan akkor metszete az $X_0^{\pm}$ *pályának a* $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$ *pontban, ha:*

$$c_{(\pm 1,0,0,\pm 1)}(\vec{p})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}c_{(\pm 1,0,0,\pm 1)}(\vec{p})^* = \frac{\pm 1}{2}\sum_{i=0}^{3} p_i\sigma_i \quad \forall \vec{p} \in X_0^{\pm}.$$

(3) *Ha* $m \in \mathbb{R}^+$, *akkor egy*

$$c_{(0,m,0,0)} : Y_m \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

függvény pontosan akkor metszete az Y_m *pályának a* $(0, m, 0, 0)$ *pontban, ha*

$$c_{(0,m,0,0)}(\vec{p})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}c_{(0,m,0,0)}(\vec{p})^* = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{3} p_i\sigma_i \quad \forall \vec{p} \in X_0^{\pm}.$$

(4) *Minden* $c_{(0,0,0,0)} : X_0^0 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *függvény metszete az* X_0^0 *pályának a* $(0,0,0,0)$ *pontban.*

A metszetfüggvények megtalálására nem létezik általános módszer. Bemutatunk egy eljárást, mellyel ebben a konkrét esetben meg tudjuk adni az adott pontbeli metszeteket.

A metszetfüggvényt keressük a következő alakban:

$$c(\vec{p}) = x_0\sigma_0 + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3.$$

Használjuk fel a $(\sigma_i)_{i=0,1,2,3}$ mátrixokra a

$$\begin{array}{ll} \sigma_i^2 = \sigma_0 \quad i = 0,1,2,3 & \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \quad i,j = 1,2,3 \\ \sigma_i\sigma_0 = \sigma_0\sigma_i = \sigma_i \quad i = 0,1,2,3 & \sigma_i^* = \sigma_i \quad i = 0,1,2,3 \end{array}$$

összefüggéseket. A (8.1.10.) tételben szereplő első feltétel a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} c(\vec{p})c(\vec{p})^* &= (x_0\sigma_0 + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)^2 = \\ &= (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sigma_0 + 2x_0x_1\sigma_1 + 2x_0x_2\sigma_2 + 2x_0x_3\sigma_3 = \\ &= \frac{\pm p_0}{m}\sigma_0 + \frac{\pm p_1}{m}\sigma_1 + \frac{\pm p_2}{m}\sigma_2 + \frac{\pm p_3}{m}\sigma_3. \end{aligned}$$

Ebből az egyenletből egyszerűen megkaphatjuk $(x_i)_{i=0,1,2,3}$ értékeket, ügyelve arra, hogy a

$$\det c(\vec{p}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$$

feltétel teljesüljön. A számítás végeredménye:

(7.1.19.)

$$c_{(\pm m,0,0,0)} : X_m^\pm \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \qquad (p_0,p_1,p_2,p_3) \mapsto c_{(\pm m,0,0,0)}(p_0,p_1,p_2,p_3)$$

$$c_{(\pm m,0,0,0)}(p_0,p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{\sqrt{2m(m \pm p_0)}}\big((m+p_0)\sigma_0 + p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3\big)$$

$$c_{(\pm m,0,0,0)}(p_0,p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{\sqrt{2m(m \pm p_0)}}\begin{pmatrix} m+p_0+p_3 & p_1 - i\cdot p_2 \\ p_1 + i\cdot p_2 & m+p_0-p_3 \end{pmatrix}.$$

A második esetben már bonyolultabb a metszetfüggvény meghatározása, ezért csak a végeredményt közöljük:

(7.1.20.)

$$c_{(\pm1,0,0,\pm1)} : X_0^\pm \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \qquad \vec{p} \mapsto c_{(\pm1,0,0,\pm1)}(\vec{p})$$

$$c_{(\pm1,0,0,\pm1)}(\vec{p}) = \begin{cases} \frac{\pm1}{\sqrt{2|p_0+p_3|}}\begin{pmatrix} p_0+p_3 & 0 \\ p_1 + i\cdot p_2 & \frac{\pm\sqrt{2|p_0+p_3|}}{p_0+p_3} \end{pmatrix}, & p_0+p_3 \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\pm2p_0}} \\ -\sqrt{\pm2p_0} & 0 \end{pmatrix}, & p_0+p_3 = 0. \end{cases}$$

A harmadik

$$c(\vec{p})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c(\vec{p})^* = \frac{1}{m}(p_0\sigma_0 + p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3)$$

feltételnél érdemes észrevenni, hogy a középen szereplő mátrix nem más, mint σ_1. A képletbe behelyettesítve a

$$c(\vec{p}) = x_0\sigma_0 + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$$

kifejezést a következőt kapjuk:

$$c_{\vec{p}}\sigma_1 c(\vec{p}) = 2x_0x_1\sigma_0 + (x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\sigma_1 + 2x_1x_2\sigma_2 + 2x_1x_3\sigma_3.$$

Az egynlet megoldásánál segítségünkre lehet az alábbi metszet:

$$c_{(0,m,0,0)} : X_m^{\pm} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \qquad (p_0, p_1, p_2, p_3) \mapsto c_{(0,m,0,0)}(p_0, p_1, p_2, p_3)$$

$$c_{(0,m,0,0)}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_1+m)}}\big(p_0\sigma_0 + (p_1+m)\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3\big)$$

$$c_{(0,m,0,0)}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_1+m)}}\begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 + m - i\cdot p_2 \\ p_1 + m + i\cdot p_2 & m + p_0 - p_3 \end{pmatrix}$$

mely $p_1 + m > 0$ esetben eleget tesz a fenti egyenletnek, de $\det\big(c_{(0,m,0,0)}(\cdot)\big) = -1$.

7.2. A stabilizátorok ábrázolása

A $G_{(m,0,0,0)}$ csoport ábrázolása:

Legyen E komplex Hilbert-tér és minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen

$$\bigotimes^{n} E$$

az E tér önmagával vett n-szeres tenzorszozata, valamint

$$\mathrm{TS}^n(E)$$

az E tér n-szeres szimmetrikus tenzorszorzata. Ezeken a tereken bevezethetünk Hilbert-tér struktúrát, melyet az E feletti skalárszorzás generál. A továbbiakban ezeket a tenzorszorzat tereket Hilbert-tereknek tekintjük.

Legyen D^0 az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoport triviális komplex egydimenziós ábrázolása:

(7.2.1.) $$D^0 : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad (h, z) \mapsto D_h^0(z) := z.$$

Jelölje $D^{\frac{1}{2}}$ az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ önábrázolását:

(7.2.2.) $$D^{\frac{1}{2}} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \qquad (h, \vec{v}) \mapsto h\vec{v}.$$

Minden j pozitív félegész számra jelölje D^j a $D^{\frac{1}{2}}$ ábrázolás $2j$-szer önmagával vett tenzorszorzatának a $\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)$ térre való megszorítását:

(7.2.3.) $$D^j(h) := \bigotimes^{2j} D^{\frac{1}{2}}(h)|_{\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)}.$$

7.2.1. Tétel. *Minden $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ pozitív félegész számra a*

$$D^j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Lin}\big(\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)\big)$$

leképzés az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$*-nek komplex* $(2j+1)$*-dimenziós folytonos irreducibilis ábrázolása a* $\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)$ *véges dimenziós vektortérben. A*

$$D^j|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})} : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Lin}\big(\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)\big)$$

leképzés az $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ *csoport komplex* $(2j+1)$*-dimenziós folytonos unitér ábrázolása a* $\mathrm{TS}^{2j}(\mathbb{C}^2)$ *Hilbert-téren. Továbbá a*

$$\big(D^j|_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})}\big)_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}}$$

rendszer az $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ *folytonos unitér irreducibilis ábrázolásainak egy teljes reprezentánsrendszere.*

A $G_{(0,m,0,0)}$ csoport ábrázolása:

Vizsgáljuk meg közelebbről a $G_{(0,m,0,0)}$ csoportot. A $(0,m,0,0)$ pont stabilizátorát nem az $\mathcal{L}^4_{id}$ csoportban adtuk meg, hanem az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ fedőcsoportjában. A Lorentz-csoportban a stabilizátor a következő:

(7.2.4.)

$$G^{\mathcal{L}}_{(0,m,0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^4_{id} \;\middle|\; a_{00} > 0, \right.$$
$$\left. \det(a_{ij})_{i,j=0,2,3} = 1, (a_{ij})_{i,j=0,2,3} \in O_{1,2} \right\}.$$

A stabilizátor felső indexe jelöli azt a csoportot, melyben a pont stabilizátorát megadtuk. Emlékeztetőül a stabilizátor a fedőcsoportban

$$G^{\mathrm{SL}(\mathbb{C})}_{(0,m,0,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & i\cdot b \\ i\cdot c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}) \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad+bc = 1 \right\} \tag{7.2.5.}$$

alakú.

7.2.2. Állítás. *Legyen τ_1 és τ_2 a*

(7.2.6.)

$$\tau_1 : G^{\mathrm{SL}(\mathbb{C})}_{(0,m,0,0)} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} a & i\cdot b \\ i\cdot c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 : G^{\mathcal{L}}_{(0,m,0,0)} \to \mathcal{L}^3_{id} \qquad \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{00} & a_{02} & a_{03} \\ a_{20} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

képletekkel definiálva. A τ_1 és τ_2 leképzések jól definiált folytonos csoportizomorfizmusok.

Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoport ábrázolásairól a következő tétel ad felvilágosítást.

7.2.3. Tétel [Vil]. *Tekintsük az $L^2(\mathbb{R},\mu,\mathbb{C})$ Hilbert-teret, ahol μ a Lebesgue-mérték; a (ρ,ε) pár jellemzi az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ egy unitér ábrázolását az $L^2(\mathbb{R},\mu,\mathbb{C})$ Hilbert-téren, ahol $\rho\in\mathbb{R}$ és $\varepsilon\in\{0,1\}$. Az ábrázoló operátorok*

$$T_{(\rho,\varepsilon)}:\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathrm{Lin}\big(L^2(\mathbb{R},\mu,\mathbb{C})\big)\quad g\mapsto T_{(\rho,\varepsilon)}(g)$$
$$\text{ha}\quad g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\quad\text{akkor:}$$
$$T_{(\rho,\varepsilon)}(g)f(x)=|\beta x+\delta|^{i\cdot\rho-1}\operatorname{sgn}^{\varepsilon}(\beta x+\delta)f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)$$

képlettel adhatók meg. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoportnak van diszkrét idexű unitér reprezentációja a komplex számsík $\mathbb{C}_+$ felső félsíkján értelmezett komplex értékű függvények H_l^- Hilbert-terén. A H_l^- téren a skalárszorzás

$$(F_1,F_2)=\frac{i}{2\Gamma(-2l-1)}\int_{\mathbb{C}_+}F_1(w)\overline{F_2(w)}y^{-2l-2}dwd\bar{w},$$

ahol $w=x+iy$ és $dwd\bar{w}=-2idxdy$. Az ábrázoló operátorok minden $l=-1,-3/2,-2,-5/2,\ldots$ negatív félegész számra:

$$T_l^-:\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathrm{Lin}\big(H_l^-\big)\quad g\mapsto T_l^-(g)$$
$$\text{ha}\quad g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\quad\text{akkor:}$$
$$T_l^-(g)f(x)=(\beta x+\delta)^{2l}f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right).$$

Az $l=1,3/2,2,\ldots$ számok ábrázolása hasonló módon adható meg a $\mathbb{C}_-$ alsó számsíkon értelmezett analitikus függvények Hilbert-terén.

Ezzel a képlettel a két dimenziós téren értelmezett Lorentz-csoport fedőcsoportjának az unitér ábrázolásait is megadtuk.

A $G_{(\pm1,0,0,\pm1)}$ csoport ábrázolása:

Most a $G_{(\pm1,0,0,\pm1)}$ stabilizátor folytonos unitér ábrázolásait keressük meg. Ehhez használni fogjuk a féldirekt szorzatban előálló csoportok folytonos unitér ábrázolásának az (6.) pontban leírt elméletét. Először meghatározzuk a csoport megengedett hatosait.

7.2.4. Állítás. *Definiáljuk a*

$$\kappa:\mathbb{T}\to Aut(\mathbb{C})\qquad z\mapsto\kappa_z$$
$$\kappa_z(a):=z^2a$$

leképzés. Ekkor értelmezhető a $\mathbb{T}\times_\kappa\mathbb{C}$ féldirekt szorzat, mely speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat, ha $\mathbb{T}$ és $\mathbb{C}$ a természetes topológiával van ellátva. A

$$\Omega:\mathbb{T}\times_\kappa\mathbb{C}\to G_{(\pm1,0,0,\pm1)}\qquad(z,a)\mapsto\begin{pmatrix}z&z^{-1}a\\0&z^{-1}\end{pmatrix}$$

leképezés izomorfizmus.

Minden b komplex számra a

$$\hat{a}_b : \mathbb{C} \to \mathbb{T} \qquad a \mapsto \exp(i\,\mathrm{Re}(ba^*)) \tag{7.2.7.}$$

leképzés egy karaktere $\mathbb{C}$-nek, továbbá a

$$Q : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} \qquad b \mapsto \hat{a}_b \tag{7.2.8.}$$

leképzés izomorfizmus. A komplex számok karakterterén a $\mathbb{T}$-pályák a következők:

$$\begin{aligned} &C_0 = \{\hat{a}_0\} \\ &C_r = \{\hat{a}_b | \quad |b| = r\} \quad r \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{7.2.9.}$$

Az pályákon megadunk kváziinvariáns mértékeket. Jelölje $\mu_{\mathbb{T}}$ a Lebesgue-mérték $\frac{1}{2\pi}$-szeresét a $\mathbb{T}$ komplex egységkörön, vagyis:

$$\begin{aligned} &\mu_{\mathbb{T}} : K(\mathbb{T}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \mu_{\mathbb{T}}(f) \\ &\mu_{\mathbb{T}}(f) := \int_0^{2\pi} \frac{f(\exp(i\vartheta))}{2\pi} d\vartheta. \end{aligned} \tag{7.2.10.}$$

A C_r ($r \in \mathbb{R}^+$) pályán a μ_r mérték legyen:

$$\begin{aligned} &\mu_r : K(C_r) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \mu_r(f) \\ &\mu_r(f) := \int_0^{2\pi} \frac{f(r\exp(i\vartheta))}{2r\pi} d\vartheta. \end{aligned} \tag{7.2.11.}$$

A C_0 pályán minden mérték invariáns és triviáis. Mivel a mértékek invariánsak is, ezért a megengedett hatosban szereplő f függvény az azonosan 1 függvény. A C_r pályákon legyen $x_r = r$, a C_0 pályán az $x_0 = 0$ pont a válsztott reprezentánspont. A pontokhoz tartozó Borel-metszetek

$$\begin{aligned} &c_{x_r} : C_r \to \mathbb{T} \qquad (r, \varphi) \mapsto (1, \varphi/2) \\ &c_{x_0} : C_0 \to \mathbb{T} \qquad (0) \mapsto (1, 0) \end{aligned} \tag{7.2.12.}$$

formulával adhatók meg. Az x_0 pont G_{x_0} stabilizátora az egész $\mathbb{T}$ csoport, az x_r pont stabilizátora a

$$G_{x_r} = \{(1, 0), (-1, 0)\} \tag{7.2.13.}$$

részcsoport. A megengedett hatosok teljes osztályozásához a stabilizátorok folytonos unitér ábrázolásait kell már csak megadni. A G_{x_0} csoport folytonos unitér irreducibilis ábrázolásait $n \in \mathbb{Z}$ egész számokkal indexelhetjük és az ábrázoló operátorok

$$\begin{aligned} &\pi_n : \mathbb{T} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{C}) \qquad q \mapsto q^n \\ &q^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad x \mapsto q^n x \end{aligned} \tag{7.2.14.}$$

alakúak. A G_{x_r} csoportnak két nem ekvivalens folytonos unitér irreducibilis ábrázolása van:
(7.2.15.)

$$\pi_r, \pi_r' : \{(1,0),(-1,0)\} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{C}) \qquad \pi_r(\cdot,0) = id_{\mathbb{C}} \quad \pi_r'(\pm 1, 0) = \pm 1 \cdot id_{\mathbb{C}}.$$

A megengedett hatosokhoz tartozó unitér ábrázolások a következők lesznek a (6.4.3.) képletnek megfelelően:

(7.2.16.) A $\mathcal{H}^n := L^2(C_0, \mu, \mathbb{C})$ Hilbert-téren:

$$U^n : (\mathbb{T} \times_\kappa C) \times \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n \quad (z,a,f) \mapsto U^n_{z,a}(f)$$

$$U^n_{z,a}(f)(x) := x(a)\pi_n(z) f(z^{-1}x)$$

(7.2.17.) A $\mathcal{H}^r := L^2(C_r, \mu_r, \mathbb{C})$ Hilbert-téren:

$$U^r : (\mathbb{T} \times_\kappa C) \times \mathcal{H}^r \to \mathcal{H}^r \quad (z,a,\alpha) \mapsto U^r_{z,a}(f)$$

$$U^r_{z,a}(f)(x) := x(a) f(z^{-1}x)$$

(7.2.18.) A $\mathcal{H}^r_* := L^2(C_r, \mu_r, \mathbb{C})$ Hilbert-téren:

$$U^{r*} : (\mathbb{T} \times_\kappa C) \times \mathcal{H}^r_* \to \mathcal{H}^r_* \quad (z,a,f) \mapsto U^{r*}_{z,a}(f)$$

$$U^{r*}_{z,a}(f)(x) := x(a)\pi_r'\big(c_{x_r}(x)^{-1} z c_{x_0}(h^{-1}x)\big) f(z^{-1}x).$$

A fenti három eset tovább egyszerűsíthető, ha észerevesszük, hogy $\mathcal{H}^n \simeq \mathbb{C}$, valamint behelyettesítjük a Borel-metszeteket és kihasználjuk, hogy különböző r paraméterekhez tartozó Hilbert-terek mind izomorfak az $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}, \mu_{\mathbb{T}})$ térrel. Fontos megjegyezni, hogy a fenti képletekben szereplő szorzások közül néhány a csoport pályán való hatását jelenti. Pl.: az $f(z^{-1}x)$ jelölés részletesen kiírva a

$$f\big(\kappa_{z^{-1}}(x)\big)$$

formulát jelenti, ami nem más, mint $f(z^{-2}x)$. Ezeket az egyszerűsítéseket elvégezve a következő ábrázolásokat kapjuk:

(7.2.19.) A $\mathcal{H}^n := \mathbb{C}$ Hilbert-téren:

$$U^n : (\mathbb{T} \times_\kappa C) \times \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n \quad (z,a,v) \mapsto U^n_{z,a}(v)$$

$$U^n_{z,a}(v) := z^n v$$

(7.2.20.) A $\mathcal{H}^r := L^2(\mathbb{T}, \mu_{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ Hilbert-téren:

$$U^r : (\mathbb{T} \times_\kappa \mathbb{C}) \times \mathcal{H}^r \to \mathcal{H}^r \quad (z,a,f) \mapsto U^r_{z,a}(f)$$

$$U^r_{z,a}(f)(x) := \exp\big(i \cdot r \,\mathrm{Re}(xz^{-1}a^*)\big) f(z^{-2}x)$$

$$U^{r*} : (\mathbb{T} \times_\kappa C) \times \mathcal{H}^r \to \mathcal{H}^r \quad (z,a,f) \mapsto U^{r*}_{z,a}(f)$$

$$U^{r*}_{z,a}(f)(x) := \exp\big(i \cdot r \,\mathrm{Re}(xz^{-1}a^*)\big) z f(z^{-2}x).$$

A (6.6.9) tétel alapján mondhatjuk, hogy az összes folytonos unitér komplex szeparábilis Hilbert-térbeli irreducibilist ábrázolást megkaptuk.

7.3. Fénynél lassabb részecskék

Az $X_m^{\pm}$ pályához tartozó ábrázolás $m > 0$ esetén a fénynél lassabb, m tömegű részecskéket írja le. Azokhoz a megengedett hatosokhoz tartozó ábrázolásokat elemezzük, melyekben szereplő pálya megegyezik az $X_m^{\pm}$ halmazzal.

A (7.2.) fejezetben definiáltuk az $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ csoport folytonos irreducibilis unitér ábrázolását minden $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$ félegész számhoz:

$$D^{(j)} : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to W^{(j)}$$

ahol $W^{(j)}$ Hilbert-tér, melynek dimenziója $2j + 1$. Ez az ábrázolás kiterjeszthető az egész $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoportra, melyet ugyanígy jelölünk:

$$D^{(j)} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to W^{(j)}.$$

Az eddigiek alapján azt mondhatjuk, hogy az $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), P^4, \delta)$ topologikus transzformációcsoport megengedett hatosai közé tartozik az alábbi hatos:

$$\text{(7.3.1.)} \qquad \big(X_m^{\pm}, \alpha_m^{\pm}, 1, (\pm m, 0, 0, 0), c_{(\pm m,0,0,0)}, W^{(j)}\big).$$

A továbbiakban a jelölések egyszerűsítése miatt az $(\pm m, 0, 0, 0)$ pontbeli $c_{(\pm m,0,0,0)}$ Borel-metszetet röviden csak $c_{\pm m}$-nek írjuk. A hatosban központi szerepet játszik az $(m, j) \in \mathbb{R}^+ \times \frac{1}{2}\mathbb{N}$ pár. Az m-et a részecske *tömeg*ének, a j paramétert a részecske *spin*jének nevezzük. A megengedett hatos által generált ábrázolás definíciója (6.4.1.-6.4.4.) alapján az ábrázolás alakja a következő lesz:

$$\text{(7.3.2.)} \qquad \mathcal{H} = L^2(X_m^{\pm}, \alpha_m^{\pm}, W^{(j)})$$

$$U_{(h,\vec{x})}^{(m,j,\pm)} \varphi(\vec{p}) := e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1} D^{(j)}(h) D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\delta^{-1}(h))\big)\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big).$$

A (6.4.4.) után leírt feltételek teljesülnek, ezért használhatjuk a 6.4.4.-nél sokkal egyszerűbb 6.4.5. képletet.

A $\mathcal{H}$ Hilbert-téren a norma a következő (6.4.1. állítás alapján):

$$\text{(7.3.3.)} \qquad ||\varphi||_{(m,j,\pm)} = \sqrt{\int_{X_m^{\pm}} ||\varphi(\vec{p})||^2 d\alpha_m^{\pm}(\vec{p})}.$$

A megengedett hatosok által generált ábrázolások unitér- illetve antiunitér ekvivalenciájáról a (6.4.3.) és a (6.4.4.) tételek alapján a következő állítást kapjuk:

7.3.1. Tétel. *Az $U^{(m_1,j_1,\pm)}$ és $U^{(m_2,j_2,\pm)}$ ábrázolások akkor és csak akkor unitér vagy antiunitér ekvivalensek, ha*

$$(m_1, j_1) = (m_2, j_2) \in \mathbb{R}^+ \times \frac{1}{2}\mathbb{N}.$$

Az $U^{(m,j,+)}$ és $U^{(m,j,-)}$ ábrázolások antiunitér ekvivalensek.

Ahhoz, hogy a részecske spinorábrázolását megkapjuk, meg kell vizsgálni a (6.5.)-ben leírt EXT. feltétel teljesíthetőségét. A (5.5.2.) állítás 3. pontja alapján ez teljesül, sőt élhetünk a $W = \check{W}$ választással. Ezenkívül, a feltételben szereplő $\check{m}$ folytonos Borel-morfizmus nem más, mint a $D^{(j)}$ operátor kiterjesztése az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoportra.

Érdemes felidézni a (6.5.)-ben definiált $\hat{E}$ és $\check{E}$ prehilbert-tereket és a hozzájuk asszociált $\hat{H}$ és $\check{H}$ Hilbert-tereken megadott $\hat{U}$ és $\check{U}$ ábrázolásokat, valamint a Hilbert-terek között ható $\check{S}$ és $\hat{S}$ operátorok definícióját. A jelen esetben mivel az $\alpha_m^{\pm}$ mérték invariáns az orbiton, valamint $W = \check{W}$, ezért a (6.5.9.) és (6.5.10.) képletekkel számolhatunk, melyek egyszerűbbek, mint az általános esetre vonatkozó képletek.

Jelölje $\mathcal{F}(X_m^{\pm}, \alpha_m^{\pm}, W^{(j)})$ az $X_m^{\pm}$ orbiton értelmezett $W^{(j)}$-be képző $\alpha_m^{\pm}$-mérhető függvények halmazát. Ekkor a (6.5.)-ben leírtak alapján definiáljuk a következő prehilbert tereket:

(7.3.4.)

$$\check{E}^{(m,j,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_m^{\pm}, \alpha_m^{\pm}, W^{(j)}) \ \Big| \ \int_{X_m^{\pm}} ||\, D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1} \varphi(\vec{p}) \,||_{(m,j,\pm)}^2 \, d\alpha_m^{\pm}(\vec{p}) < +\infty \Big\},$$

$$\hat{E}^{(m,j,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_m^{\pm}, \alpha_m^{\pm}, W^{(j)}) \ \Big| \ \int_{X_m^{\pm}} ||\, D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big) \varphi(\vec{p}) \,||_{(m,j,\pm)}^2 \, d\alpha_m^{\pm}(\vec{p}) < +\infty \Big\}.$$

Ezeken a prehilbert tereken (6.5.3.) és (6.5.4.)-nek megfelelően a félnormák az alábbiak:

(7.3.5.)

$$||\varphi||_{(m,j,\pm)}^{\vee} := \sqrt{\int_{X_m^{\pm}} ||\, D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1} \varphi(\vec{p}) \,||_{(m,j,\pm)}^2 \, d\alpha_m^{\pm}(\vec{p})},$$

$$||\varphi||_{(m,j,\pm)}^{\wedge} := \sqrt{\int_{X_m^{\pm}} ||\, D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big) \varphi(\vec{p}) \,||_{(m,j,\pm)}^2 \, d\alpha_m^{\pm}(\vec{p})}.$$

Az $\check{E}$ és $\hat{E}$ terekhez asszociált Hilbert-teret $\check{H}^{(m,j,\pm)}$-val és $\hat{H}^{(m,j,\pm)}$-val jelöljük.

A (6.5.5.) és (6.5.6.)-nak megfelelően definiáljuk az $\check{S}$ és a $\hat{S}$ leképzéseket:

(7.3.6.)
$$\check{S}_{(m,j,\pm)} : L^2(X_m^\pm, W^{(j)}, \alpha_m^\pm) \to \check{H} \qquad \varphi \mapsto \check{S}_{(m,j,\pm)}(\varphi)$$
$$\check{S}_{(m,j,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})$$
$$\hat{S}_{(m,j,\pm)} : L^2(X_m^\pm, W^{(j)}, \alpha_m^\pm) \to \hat{H} \qquad \varphi \mapsto \check{S}_{(m,j,\pm)}(\varphi)$$
$$\hat{S}_{(m,j,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(j)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}).$$

A (6.5.1.) alapján tudjuk, hogy az $\check{S}_{(m,j,\pm)}$ és $\hat{S}_{(m,j,\pm)}$ operátorok unitér operátorok. Az (6.5.7.) és (6.5.8.) alapján a $\check{H}^{(m,j,\pm)}$ és a $\hat{H}^{(m,j,\pm)}$ Hilbert-tereken az alábbi ábrázoló operátorokat definiáljuk:

(7.3.7.)
$$\check{U}^{(m,j,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \check{H}^{(m,j,\pm)} \to \check{H}^{(m,j,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \check{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\check{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}}D^{(j)}(h)\varphi(h^{-1}\vec{p})$$
$$\hat{U}^{(m,j,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \hat{H}^{(m,j,\pm)} \to \hat{H}^{(m,j,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \hat{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\hat{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}}D^{(j)}(h^{-1})\varphi(h^{-1}\vec{p}).$$

A $\hat{H}^{(m,j,\pm)}$ Hilbert-tér elemeit *kalapos*, a $\check{H}^{(m,j,\pm)}$ Hilbert-tér elemeit *kalaptalan spinoramplitúdó*nak nevezik. A (6.5.1.) tétel alapján a következő tételt kapjuk.

7.3.2. Tétel. *A fenti jelöléseket alkalmazva $\check{S}_{(m,j,\pm)}$ és $\hat{S}_{(m,j,\pm)}$ unitér operátorok, valamint*
$$\check{U}^{(m,j,\pm)} \in Hom_C\big((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4), Unit_S(\check{H}^{(m,j,\pm)})\big)$$
$$\hat{U}^{(m,j,\pm)} \in Hom_C\big((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4), Unit_S(\hat{H}^{(m,j,\pm)})\big).$$

Az $\check{U}^{(m,j,\pm)}$ és $\hat{U}^{(m,j,\pm)}$ ábrázolások unitér ekvivalensek $U^{m,j,\pm}$-val, melyet a következő kommutatív diagram fejez ki minden $(h, \vec{x}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4$ elemre:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{H}^{(m,j,\pm)} & \xleftarrow{\hat{S}_{(m,j,\pm)}} & L^2(X_m^\pm, \alpha_m^\pm, W^{(j)}) & \xrightarrow{\check{S}_{(m,j,\pm)}} & \check{H}^{(m,j,\pm)} \\
{\scriptstyle \hat{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}}\downarrow & & {\scriptstyle U^{m,j,\pm}_{(h,\vec{x})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \check{U}^{(m,j,\pm)}_{(h,\vec{x})}} \\
\hat{H}^{(m,j,\pm)} & \xleftarrow[\hat{S}_{(m,j,\pm)}]{} & L^2(X_m^\pm, \alpha_m^\pm, W^{(j)}) & \xrightarrow[\check{S}_{(m,j,\pm)}]{} & \check{H}^{(m,j,\pm)}
\end{array}$$

A kalapos és kalaptalan spinoramplitúdók közti áttérést az alábbi L operátorok adják meg:

(7.3.8.)
$$\hat{L} := \hat{S}_{(m,j,\pm)} \circ \check{S}^{-1}_{(m,j,\pm)} : \check{H}^{(m,j,pm)} \to \hat{H}^{(m,j,\pm)} \qquad \check{\varphi} \mapsto \hat{\varphi} := \hat{L}(\check{\varphi})$$
$$\hat{\varphi}(\vec{p}) = D^{(j)}\left(\frac{p_0\sigma_0 \mp p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3}{m}\right)\check{\varphi}(\vec{p})$$
$$\check{L} := \check{S}^{-1}_{(m,j,\pm)} \circ \hat{S}^{-1}_{(m,j,\pm)} : \hat{H}^{(m,j,pm)} \to \check{H}^{(m,j,\pm)} \qquad \hat{\varphi} \mapsto \check{\varphi} := \check{L}(\hat{\varphi})$$
$$\check{\varphi}(\vec{p}) = D^{(j)}\left(\frac{p_0\sigma_0 \pm p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3}{m}\right)\hat{\varphi}(\vec{p})$$

A fenti formulák egyszerűen adódnak a c_{x_0} metszetfüggvény

$$c_{x_0}c_{x_0}^* = c_{x_0}^2 = \frac{\pm 1}{m}\sum_{i=0}^{3} p_i\sigma_i$$

tulajdonságából.

7.4. Fénysebességgel haladó részecskék

A fénysebességgel haladó részecskéket az $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), P^4, \delta)$ transzformációcsoportnak az $X_0^{\pm}$ pályákhoz tartozó hatosok által generált ábrázolásai írják le a fénysebességgel haladó részecskéket. A $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$ pontbeli $c_{(\pm 1,0,0,\pm 1)}$ Borel-metszetet röviden csak $c_{\pm}$-nak írjuk, a $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$ választott pontot pedig (± 1)-nek. A (6.2.)-ben megadtuk a (± 1) pont stabilizátorával izomorf $\mathbb{T}\times_{\kappa}\mathbb{C}$ csoport folytonosos unitér irreducibilis ábrázolásait. Ezek alapján a $G_{(\pm 1)}$ csoport ábrázolásai:

(7.4.1.) $$V^n := U^n \circ \Omega^{-1} \quad V^r := U^r \circ \Omega^{-1} \quad V^{r*} := U^{r*} \circ \Omega^{-1}.$$

A (8.1.) és a (8.2.) pont alapján az $X_0^{\pm}$ pályákhoz tartozó hatosok:

(7.4.2.) $$\begin{gathered}\big(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, 1, (\pm 1), c_{\pm}, V^{(n)}\big)\\ \big(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, 1, (\pm 1), c_{\pm}, V^{(r)}\big)\\ \big(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, 1, (\pm 1), c_{\pm}, V^{(r*)}\big).\end{gathered}$$

Ezen hatosok által generált ábrázolások:

(7.4.3.) A $\mathcal{H}^{(n,\pm)} = L^2(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, \mathbb{C})$ Hilbert-téren:

$$U^{(n,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(n,\pm)} \to \mathcal{H}^{(n,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto U_{h,\vec{x}}^{(n,\pm)}(f)$$

$$U_{h,\vec{x}}^{(n,\pm)}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} V^{(n)}\Big(c_{\pm}(\vec{p})^{-1} h c_{\pm}\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)\Big) f\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)$$

(7.4.4.) A $\mathcal{H}^{(r,\pm)} = L^2\big(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, L^2(\mathbb{T}, \mu_{\mathbb{T}}, \mathbb{C})\big)$ Hilbert-téren:

$$U^{(r,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(r,\pm)} \to \mathcal{H}^{(r,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto U_{h,\vec{x}}^{(r,\pm)}(f)$$

$$U_{h,\vec{x}}^{(r,\pm)}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} V^{(r)}\Big(c_{\pm}(\vec{p})^{-1} h c_{\pm}\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)\Big) f\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)$$

$$U^{(r*,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(r,\pm)} \to \mathcal{H}^{(r,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto U_{h,\vec{x}}^{(r*,\pm)}(f)$$

$$U_{h,\vec{x}}^{(r*,\pm)}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} V^{(r*)}\Big(c_{\pm}(\vec{p})^{-1} h c_{\pm}\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)\Big) f\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big).$$

Érdemes megjegyezni, hogy n_1, n_2 egészekre a $\mathcal{H}^{(n_1,\pm)}$ és a $\mathcal{H}^{(n_2,\pm)}$ Hilbert-terek izomorfak, valamint különböző r_1, r_2 pozitív valós számokra a $\mathcal{H}^{(r_1,\pm)}$ Hilbert-tér izmorf a $\mathcal{H}^{(r_2,\pm)}$ térrel. Az ábrázolások ekvivalenciájáról a következő tétel szól.

7.4.1. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{Z}$ egészre és $r \in \mathbb{R}^+$ valósra az*

$$(U^{(n,+)}, U^{(n,-)}) \quad (U^{(r,+)}, U^{(r,-)}) \quad (U^{(r*,+)}, U^{(r*,-)})$$

ábrázoláspárok antiunitér ekvivalensek.

A $\mathcal{H}^{(n,\pm)}, \mathcal{H}^{(r,\pm)}$ Hilbert-tereken a norma a

(7.4.5.)

$$||f||_{(n,\pm)} = \sqrt{\int_{X_0^\pm} || \, f(\vec{p}) \, || \, d\alpha_0^\pm(\vec{p})}$$

$$||f||_{(r,\pm)} = \sqrt{\int_{X_0^\pm} || \, f(\vec{p}) \, || \, d\alpha_0^\pm(\vec{p})} = \sqrt{\int_{X_0^\pm} \int_{\mathbb{T}} |f(\vec{p})|^2 d\mu_{\mathbb{T}} d\alpha_0^\pm(\vec{p})}.$$

képletekkel adhatók meg. Definiáljunk egy $\mathcal{C}$ leképzést a két Hilbert-tér között:

(7.4.6.)

$$\mathcal{C} : L^2\big(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, L^2(\mathbb{T}, \mu_{\mathbb{T}}, \mathbb{C})\big) \to L^2(X_0^\pm \times \mathbb{T}, \alpha_0^\pm \times \mu_{\mathbb{T}}, \mathbb{C}) \quad f \mapsto f_{(f)} := \mathcal{C}(f)$$

$$f_{(f)}(x, z) := f(x)(z) \qquad x \in X_0^\pm \quad z \in \mathbb{T}.$$

Egyszerűen igazolható, hogy a $\mathcal{C}$ leképzés izomorfizmus. A $L^2(X_0^\pm \times \mathbb{T}, \alpha_0^\pm \times \mu_{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ Hilbert-tér jele legyen $\mathcal{H}_f$. Az ábrázoló operátorok ezen a Hilbert-téren:

(7.4.7.)

$$W^{(r)} := \mathcal{C} \circ U^{(r,\pm)} \circ \mathcal{C}^{-1}$$

$$W^{(r*)} := \mathcal{C} \circ U^{(r*,\pm)} \circ \mathcal{C}^{-1}.$$

Egy adott $(h, x) \in SL_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4$ csoportelem esetén az operátorok hatását az alábbi módon lehet megadni:

(7.4.8.)

$$(g, y) := \Omega^{-1}\Big(c_\pm(\vec{p}) h c\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big)\Big) \qquad g \in \mathbb{T} \quad y \in \mathbb{C}$$

$$W^{(r)}_{h,x} f(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} e^{ir \operatorname{Re}(zg^{-1}y^*)} f\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}, g^{-2}z\big)$$

$$W^{(r*)}_{h,x} f(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} e^{ir \operatorname{Re}(zg^{-1}y^*)} g f\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}, g^{-2}z\big).$$

A W operátorok definíciójából látható, hogy az általuk megvalósított ábrázolás unitér ekvivalens az eredeti U ábrázolással.

A fénynél lassabban haladó részecskéknél tudtuk értelmezni a spinoramplitúdó fogalmát, ugyanis az ehhez elengedhetetlen EXT feltétel teljesíthető volt. Most megvizsgáljuk a fénysebbességgel haladó részecskék spinoramplitúdójának az értelmezhetőségét.

Legyen $E := \mathbb{C}^2$ kétdimenziós komplex vektortér, melynek báziselemei:

$$e_1 := (1, 0) \qquad e_2 := (0, 1).$$

A V^n ábrázolás tere egydimenziós, amit azonosíthatunk $0 \leq n$ esetén a

$$\bigotimes^{n} e_1$$

és $n \leq 0$ esetén a

$$\bigotimes^{|n|} e_2$$

térrel. Az E vektortéren egyetlen olyan Hilbert-tér struktúra van, ahol a kanonikus báziselemek normája egységnyi, és ez a Hilbert-tér struktúra a tenzorszorzatra is átvihető. A továbbiakban a V^n operátort ilyen tenzorszorzattéren megvalósított ábrázolásnak tekintjük, azaz:

$$\begin{aligned} 0 \leq n :& V^n \in \mathrm{Hom}_C\big(G_{(\pm 1)}, \mathrm{Unit}_S(\bigotimes^{n} e_1)\big), \\ 0 > n :& V^n \in \mathrm{Hom}_C\big(G_{(\pm 1)}, \mathrm{Unit}_S(\bigotimes^{|n|} e_2)\big). \end{aligned}$$

Az EXT feltételben szereplő kifejezések legyenek a következők:

(7.4.9.)

$$\begin{aligned} W :=& \begin{cases} \bigotimes^n e_1, & 0 \leq n, \\ \bigotimes^{|n|} e_2, & 0 > n. \end{cases} \\ \check{W} :=& \mathrm{TS}^{|n|}(E) \\ m :=& V^n \\ \check{m} :=& \begin{cases} D^{(n/2)}, & 0 \leq n, \\ D^{(|n|/2)}, & 0 > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Ekkor az fenti kifejezésekre teljesül az EXT feltétel. Ezek után megadjuk a kalapos- és kalaptalan spinoramplitúdók Hilbert-terét. Az $\check{E}$ és $\hat{E}$ prehilbert-terek legyenek az alábbiak:

$$\text{Ha} \quad 0 \leq n \quad \text{akkor:}$$

(7.4.10.)

$$\begin{aligned} \check{E}^{(+n,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, \mathrm{TS}^n(E)) \;\Big|\; & \\ \forall \vec{p} \in X_0^{\pm} \quad & D^{(n/2)}\big(c_{\pm}(\vec{p})\big)^{-1} \varphi(\vec{p}) \in \bigotimes^{n} e_1, \\ \int_{X_0^{\pm}} & \|\, D^{(n/2)}\big(c_{\pm}(\vec{p})\big)^{-1} \varphi(\vec{p}) \,\|_{(n,\pm)}^2 \, d\alpha_0^{\pm}(\vec{p}) < +\infty \Big\}, \\ \hat{E}^{(+n,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_0^{\pm}, \alpha_0^{\pm}, \mathrm{TS}^n(E)) \;\Big|\; & \\ \forall \vec{p} \in X_0^{\pm} \quad & D^{(n/2)}\big(c_{\pm}(\vec{p})\big) \varphi(\vec{p}) \in \bigotimes^{n} e_1, \\ \int_{X_0^{\pm}} & \|\, D^{(n/2)}\big(c_{\pm}(\vec{p})\big) \varphi(\vec{p}) \,\|_{(n,\pm)}^2 \, d\alpha_0^{\pm}(\vec{p}) < +\infty \Big\}. \end{aligned}$$

Ha $\quad 0 > n \quad$ akkor:

(7.4.11.)

$$\check{E}^{(-n,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \mathrm{TS}^{|n|}(E)) \ \Big| \ \forall \vec{p} \in X_0^\pm \quad D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}) \in \bigotimes^{|n|} e_2, \ \int_{X_0^\pm} || \, D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}) \, ||^2_{(|n|,\pm)} \, d\alpha_0^\pm(\vec{p}) < +\infty \Big\},$$

$$\hat{E}^{(-n,\pm)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \mathrm{TS}^{|n|}(E)) \ \Big| \ \forall \vec{p} \in X_0^\pm \quad D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p}) \in \bigotimes^{|n|} e_2, \ \int_{X_0^\pm} || \, D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p}) \, ||^2_{(|n|,\pm)} \, d\alpha_0^\pm(\vec{p}) < +\infty \Big\}.$$

Ezeken a prehilbert tereken (6.5.3.) és (6.5.4.)-nek megfelelően a félnormák az alábbiak:

(7.4.12.)

$$||\varphi||^{\vee}_{(\pm n,\pm)} := \sqrt{\int_{X_0^\pm} || \, D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}) \, ||^2_{(|n|,\pm)} \, d\alpha_0^\pm(\vec{p})}$$

$$||\varphi||^{\frown}_{(\pm n,\pm)} := \sqrt{\int_{X_0^\pm} || \, D^{(|n|/2)}\big(c_\pm(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p}) \, ||^2_{(|n|,\pm)} \, d\alpha_0^\pm(\vec{p})}.$$

Az $\check{E}^{(\pm n,\pm)}$ és $\hat{E}^{(\pm n,\pm)}$ terekhez asszociált Hilbert-teret $\check{H}^{(\pm n,\pm)}$-val és $\hat{H}^{(\pm n,\pm)}$-val jelöljük. Definiáljuk az $\check{S}$ és a $\hat{S}$ leképzéseket:

Ha $\quad 0 \leq n \quad$ akkor:

(7.4.13.)

$$\check{S}_{(+n,\pm)} : L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{n} e_1) \to \check{H}^{(+n,\pm)} \qquad \varphi \mapsto \check{S}_{(+n,\pm)}(\varphi)$$

$$\check{S}_{(+n,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(n/2)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})$$

$$\hat{S}_{(+n,\pm)} : L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{n} e_1) \to \hat{H}^{(+n,\pm)} \qquad \varphi \mapsto \hat{S}_{(+n,\pm)}(\varphi)$$

$$\hat{S}_{(+n,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(n/2)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}).$$

Ha $\quad 0 > n \quad$ akkor:

(7.4.14.)

$$\check{S}_{(-n,\pm)} : L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{|n|} e_2) \to \check{H}^{(-n,\pm)} \qquad \varphi \mapsto \check{S}_{(-n,\pm)}(\varphi)$$

$$\check{S}_{(-n,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(|n|/2)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})$$

$$\hat{S}_{(-n,\pm)} : L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{|n|} e_2) \to \hat{H}^{(-n,\pm)} \qquad \varphi \mapsto \check{S}_{(-n,\pm)}(\varphi)$$

$$\hat{S}_{(-n,\pm)}(\varphi)(\vec{p}) = D^{(|n|/2)}\big(c_{\pm m}(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}).$$

A (6.5.1.) tétel alapján mondhatjuk, hogy $\check{S}_{(\pm n,\pm)}$ és $\hat{S}_{(\pm n,\pm)}$ unitér operátorok.

A $\check{H}^{(\pm n,\pm)}$ és a $\hat{H}^{(\pm n,\pm)}$ Hilbert-tereken az ábrázoló operátorok a következők:

Ha $\quad 0 \le n \quad$ akkor:

(7.4.15.)

$$\check{U}^{(+n,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \check{H}^{(+n,\pm)} \to \check{H}^{(+n,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \check{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\check{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} D^{(n/2)}(h)\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big)$$
$$\hat{U}^{(+n,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \hat{H}^{(+n,\pm)} \to \hat{H}^{(+n,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \hat{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\hat{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} D^{(n/2)}(h^{-1})\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big).$$

Ha $\quad 0 > n \quad$ akkor:

(7.4.16.)

$$\check{U}^{(-n,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \check{H}^{(-n,\pm)} \to \check{H}^{(-n,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \check{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\check{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} D^{(|n|/2)}(h)\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big)$$
$$\hat{U}^{(-n,\pm)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \hat{H}^{(-n,\pm)} \to \hat{H}^{(-n,\pm)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \hat{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)$$
$$\hat{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} D^{(|n|/2)}(h^{-1})\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big).$$

Az előző fejezetben bevezetett spinoramplitúdók mintájára a $\hat{H}^{(\pm n,\pm)}$ Hilbert-tér elemeit *kalapos*, a $\check{H}^{(\pm n,\pm)}$ Hilbert-tér elemeit *kalaptalan spinoramplitúdó*nak nevezik. A (6.5.1.) tételt alkalmazva a következő tételt kapjuk.

7.4.2. Tétel. *A fenti jelölésekkel $\check{S}_{(\pm n,\pm)}$ és $\hat{S}_{(\pm n,\pm)}$ unitér operátorok, valamint*

$$\check{U}^{(\pm n,\pm)} \in Hom_C\big((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4), Unit_S(\check{H}^{(\pm n,\pm)})\big)$$
$$\hat{U}^{(\pm n,\pm)} \in Hom_C\big((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4), Unit_S(\hat{H}^{(\pm n,\pm)})\big).$$

A $\check{U}^{(\pm n,\pm)}$ és $\hat{U}^{(\pm n,\pm)}$ ábrázolások unitér ekvivalensek $U^{n,\pm}$-val, melyet a következő kommutatív diagram fejez ki minden $(h,\vec{x}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4$ elemre:
Ha $0 \le n$ akkor:

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^{(+n,\pm)} \arrow[d, "\hat{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}"'] & L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^n e_1) \arrow[l, "\hat{S}_{(+n,\pm)}"'] \arrow[r, "\check{S}_{(+n,\pm)}"] \arrow[d, "U^{+n,\pm}_{(h,\vec{x})}"'] & \check{H}^{(+n,\pm)} \arrow[d, "\check{U}^{(+n,\pm)}_{(h,\vec{x})}"] \\
\hat{H}^{(+n,\pm)} & L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^n e_1) \arrow[l, "\hat{S}_{(+n,\pm)}"] \arrow[r, "\check{S}_{(+n,\pm)}"'] & \check{H}^{(+n,\pm)}
\end{tikzcd}$$

Ha $0 > n$ akkor:

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^{(-n,\pm)} \arrow[d, "\hat{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}"'] & L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{|n|} e_2) \arrow[l, "\hat{S}_{(-n,\pm)}"'] \arrow[r, "\check{S}_{(-n,\pm)}"] \arrow[d, "U^{-n,\pm}_{(h,\vec{x})}"'] & \check{H}^{(-n,\pm)} \arrow[d, "\check{U}^{(-n,\pm)}_{(h,\vec{x})}"] \\
\hat{H}^{(-n,\pm)} & L^2(X_0^\pm, \alpha_0^\pm, \bigotimes^{|n|} e_2) \arrow[l, "\hat{S}_{(-n,\pm)}"] \arrow[r, "\check{S}_{(-n,\pm)}"'] & \check{H}^{(-n,\pm)}
\end{tikzcd}$$

A másik két fénysebességgel haladó részecske spinoramplitúdóit nem értelmezzük.

7.5. Fénynél gyorsabb részecskék

Az Y_m pályához tartozó hatosok által generált ábrázolás a fénynél gyorsabb részecskéket írja le. Az előzőekhez hasonlóan a $(0, m, 0, 0)$ referencia pontra az (m) jelölést vezetjük be, a referencia pontbeli $c_{(0,m,0,0)}$ Borel-metszetre a c_m jelölést, a stabilizátor pedig legyen egyszerűen G_m. A stabilizátor unitér ábrázolásai:

(7.5.1.) $$V^{(\rho,\varepsilon)} := T_{(\rho,\varepsilon)} \circ \tau_1 \quad V^{-l} := T_l^- \circ \tau_1 \quad V^{+l} := T_l^+ \circ \tau_1.$$

Tehát a megengedett hatosok közé tartoznak a

(7.5.2.) $$\begin{gathered}\big(Y_m, \beta_m, 1, (m), c_m, V^{(\rho,\varepsilon)}\big)\\ \big(Y_m, \beta_m, 1, (m), c_m, V^{-l}\big)\\ \big(Y_m, \beta_m, 1, (m), c_m, V^{+l}\big)\end{gathered}$$

hatosok. A megengedett hatosok által generált ábrázolások:

(7.5.3.) A $\mathcal{H}^{(m,\rho,\varepsilon)} := L^2\big(Y_m, \beta, L^2(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})\big)$ Hilbert-téren:

$$\mathcal{U}^{(m,\rho,\varepsilon)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(\rho,\varepsilon)} \to \mathcal{H}^{(\rho,\varepsilon)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \mathcal{U}^{(\rho,\varepsilon)}_{h,\vec{x}}(f)$$

$$\mathcal{U}^{(m,\rho,\varepsilon)}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} V^{(\rho,\varepsilon)}\Big(c_m(\vec{p})^{-1} h c_m\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)\Big) f\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)$$

(7.5.4.) A $\mathcal{H}^{(m,\pm l)} := L^2(Y_m, \beta, H_l^\pm)$ Hilbert-téren:

$$\mathcal{U}^{(m,\pm l)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(m,\pm l)} \to \mathcal{H}^{(m,\pm l)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \mathcal{U}^{(m,\pm l)}_{h,\vec{x}}(f)$$

$$\mathcal{U}^{(m,\pm l)}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} V^{(\pm l)}\Big(c_m(\vec{p})^{-1} h c_m\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big)\Big) f\big(\delta^{-1}(h)\vec{p}\big).$$

Ezek a fénynél gyorsabb részecskék unitér ábrázolásai. (Persze egyéb unitér ábrázolás is létezhet.)

7.5.1. Tétel. *Az $\mathcal{U}^{(m_1,\rho_1,\varepsilon_1)}$ és $\mathcal{U}^{(m_1,\rho_1,\varepsilon_1)}$ ábrázolások akkor és csak akkor unitér ekvivalensek, ha*

$$m_1 = m_2 \quad \rho_1 = \rho_2 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Az $\mathcal{U}^{(m_1,-l_1)}$ és $\mathcal{U}^{(m_2,-l_2)}$ valamint az $\mathcal{U}^{(m_1,l_1)}$ és $\mathcal{U}^{(m_2,l_2)}$ ábrázolások akkor és csak akkor unitér ekvivalensek, ha

$$m_1 = m_2 \quad l_1 = l_2.$$

Közelebbről megvizsgáljuk az $\mathcal{U}^{(\rho,\varepsilon)}$ és az $\mathcal{U}^{(-l)}$ ábrázolásokat. Ehhez először áttérünk egy másik Hilbert-térre a

(7.5.5.)

$$\mathcal{C}^{(m,\rho,\varepsilon)} : L^2\big(Y_m, \beta, L^2(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})\big) \to L^2(Y_m \times \mathbb{R}, \beta \times \mu, \mathbb{C}) \quad f \mapsto f_{(f)} := \mathcal{C}^{(m,\rho,\varepsilon)}(f)$$
$$f_{(f)}(x,z) := f(x)(z) \qquad x \in Y_m \quad z \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{C}^{(m,-l)} : L^2(Y_m, \beta, H_l^-) \to L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^* \quad f \mapsto f_{(f)} := \mathcal{C}^{(m,-l)}(f)$$
$$f_{(f)}(x,z) := f(x)(z) \qquad x \in Y_m \quad z \in \mathbb{C}_+$$

operátorokkal. Itt a $L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^*$ kifejezésben a felső indexben lévő $*$ arra utal, hogy minden $y \in Y_m$ pályapont esetén az $f \in L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^*$ függvényhez rendelt

$$f(y,\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$$

leképzés analitikus, valamint a a skalárszorzat a következő alakú:

$$f_1, f_2 \in L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^* \quad \text{elemek skalárszorzata}$$

(7.5.6.)

$$(f_1, f_2) = \frac{i}{2\Gamma(-2l-1)} \int_{\underline{\mathrm{p}} \in Y_m : |\underline{\mathrm{p}}| > m} \int_{\mathbb{C}_+} F_1(\underline{\mathrm{p}}, w)\overline{F_2(\underline{\mathrm{p}}, w)} y^{-2l-2} dw d\bar{w} d\beta(\vec{p})$$
$$w = x + iy \quad dwd\hat{w} = -2idxdy$$

Vagyis $L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^*$ nem a megszokott négyzetesen integrálható függvények tere, és nem a szokásos skalárszorzással tesszük Hibert-térré.

Az $L^2(Y_m \times \mathbb{R}, \beta \times \mu, \mathbb{C})$ Hilbert-teret jelöljük $H^{(m,\rho,\varepsilon)}$ szimbólummal, a függvénytérhez meglehetősen hasonló $L^2(Y_m \times \mathbb{C}_+, \beta \times \mu, \mathbb{C})^*$ Hilbert-teret pedig $H^{m,-l}$-val. Ezen a Hilbert-téren definiáljuk az ábrázoló operátorokat az alábbi képlettel:

(7.5.7.)

$$U^{(m,\rho,\varepsilon)} := \mathcal{C}^{(m,\rho,\varepsilon)} \circ \mathcal{U}^{(m,\rho,\varepsilon)} \circ \big(\mathcal{C}^{(m,\rho,\varepsilon)}\big)^{-1}$$
$$U^{(m,-l)} := \mathcal{C}^{(m,-l)} \circ \mathcal{U}^{(m,-l)} \circ \big(\mathcal{C}^{(m,-l)}\big)^{-1}.$$

A $\mathcal{C}$ leképzések unitér izomorfizmusok Hilbert-terek között, ezért a fent definiált U operátorok által megvalósított ábrázolások unitér ekvivalensek az $\mathcal{U}$ ábrázolásokkal.

Adott $(h, \vec{x}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4$ csoportelem esetén az U operátorok hatását úgy kaphatjuk meg, hogy előbb a $(m, h, \vec{p})$ hármashoz egy stabilizátor elemet rendelünk:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \tau_1\Big(c_m(\vec{p}) h c_m\Big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\Big)\Big) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

és ezzel továbbszámolva kapjuk az ábrázolásra az alábbi kifejezést:

(7.5.8.) $$U^{(m,\rho,\varepsilon)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times H^{(m,\rho,\varepsilon)} \to H^{(m,\rho,\varepsilon)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto U_{h,\vec{x}}^{(m,\rho,\varepsilon)}(f)$$

$$U^{(m,\rho,\varepsilon)}_{h,\vec{x}} f(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} |\beta z + \delta|^{i\cdot\rho - 1} \operatorname{sgn}^{\varepsilon}(\beta z + \delta) f\Big(\delta(h)^{-1}\vec{p}, \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\Big)$$

$$U^{(m,-l)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times H^{(m,-l)} \to H^{(m,-l)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto U^{(m,-l)}_{h,\vec{x}}(f)$$

$$U^{(m,-l)}_{h,\vec{x}} f(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} (\beta z + \delta)^{2l} f\Big(\delta(h)^{-1}\vec{p}, \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\Big).$$

A spinoramplitúdók megadásához az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoportnak az EXT feltételnek megfelelő $\check{m}$ reprezentációját kell megtalálnunk egy $\check{W}$ Hilbert-téren. Tekintsük az alábbi Hilbert-teret:

$$\check{W} := L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C}),$$

vagyis a komplex számokon értelmezett, komplex értékű, négyzetesen integrálható függvények terét. Ezt a Hilbert-teret $H^{(m,\rho)}$-val jelöljük. Ezen a téren minden $\rho \in \mathbb{R}$ számhoz megadhatjuk az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ egy ábrázolását:

(7.5.9.) $$\bar{A}_{(\rho)} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Lin}\big(L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})\big) \qquad g \mapsto A_{(\rho)}(g)$$

$$\text{ha} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{akkor:}$$

$$\bar{A}_{(\rho)}(g) f(x) = |\beta x + \delta|^{i\cdot\rho - 1} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right).$$

Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoportnak az $L^2(\mathbb{R})$ téren a 7.2.3. tételben megadott ábrázolását természetes módon kiterjeszthetjük az $L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})$ térre. Mivel a G_m stabilizátor nem esik egybe az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoporttal, csak izomorf vele, ezért a stabilizátor ábrázolása a következő:

$$A^{(\rho)} := \bar{A}_{(\rho)} \circ \tau_1.$$

Ezt figyelembe véve az imént megadott $\check{W}$ Hilbert-tér és $A^{(\rho)}$ ábrázolás kielégíti az EXT feltételt, vagyis

(1) az $L^2(R)$ tér természetes módon azonítható $L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})$ egy zárt alterével,
(2) az $A^{(\rho)}$ ábrázolásra minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvény és $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoportelem esetén teljesül, hogy

$$A^{(\rho)}(g) f = V^{(\rho,0)}(g) f.$$

Azt EXT feltétel teljesítése után megadjuk a fénynél gyorsabb részecskék stabilizátorának $V^{(\rho,0)}$ ábrázolásához tartozó spinoramplitúdókat.

Az $\check{E}$ és $\hat{E}$ prehilbert-terek legyenek az alábbiak:

(7.5.10.)

$$\begin{aligned}\check{E}^{(m,\rho)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}\big(Y_m, \beta, L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})\big) \;\Big|\; & \\ & \forall \vec{p} \in Y_m \quad A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}) \in L^2(\mathbb{R}), \\ & \int_{Y_m}\int_{\mathbb{C}} \Big|\Big| \Big(A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p})\Big)(z) \Big|\Big|_{\mathbb{C}}^2 d\mu(z)d\beta_m(\vec{p}) < +\infty \Big\}, \\ \hat{E}^{(m,\rho)} := \Big\{ \varphi \in \mathcal{F}\big(Y_m, \beta, L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})\big) \;\Big|\; & \\ & \forall \vec{p} \in Y_m \quad A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p}) \in L^2(\mathbb{R}), \\ & \int_{Y_m}\int_{\mathbb{C}} \Big|\Big| \Big(A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})\Big)(z) \Big|\Big|_{\mathbb{C}}^2 d\mu(z)d\beta_m(\vec{p}) < +\infty \Big\}.\end{aligned}$$

Ezeken a prehilbert tereken a félnormák az alábbiak:

(7.5.11.)

$$||\varphi||^{\vee}_{(m,\rho)} := \sqrt{\int_{Y_m}\int_{\mathbb{C}} \Big|\Big| \Big(A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p})\Big)(z) \Big|\Big|_{\mathbb{C}}^2 d\mu(z)d\beta_m(\vec{p})}$$

$$||\varphi||^{\wedge}_{(m,\rho)} := \sqrt{\int_{Y_m}\int_{\mathbb{C}} \Big|\Big| \Big(A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})\Big)(z) \Big|\Big|_{\mathbb{C}}^2 d\mu(z)d\beta_m(\vec{p})}.$$

Az $\check{E}^{(m,\rho)}$ és $\hat{E}^{(m,\rho)}$ terekhez asszociált Hilbert-tereket jelöljük $\check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)}$-val és $\hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)}$-val. A $\mathcal{H}^{(m,\rho,0)}$ Hilbert-térről az $\check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}$ és $\hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}$ leképzésekkel térhetünk át a $\check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)}$ és $\hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)}$ Hilbert-terekre:

(7.5.12.)

$$\check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} : \mathcal{H}^{(m,\rho,0)} \to \check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad \varphi \mapsto \check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}(\varphi)$$
$$\check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}(\varphi)(\vec{p}) := A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)\varphi(\vec{p})$$
$$\hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} : \mathcal{H}^{(m,\rho,0)} \to \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad \varphi \mapsto \hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}(\varphi)$$
$$\hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)}(\varphi)(\vec{p}) := A^{(\rho)}\big(c_m(\vec{p})\big)^{-1}\varphi(\vec{p}).$$

A kalapos- illetve kalaptalan spinoramplitúdók terén az unitér ábrázolások a következők:

(7.5.13.)

$$\check{\mathcal{U}}^{(m,\rho)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \to \check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \check{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(\varphi)$$
$$\check{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}}A^{(\rho)}(h)\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big)$$
$$\hat{\mathcal{U}}^{(m,\rho)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \to \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad (h, \vec{x}, \varphi) \mapsto \hat{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(\varphi)$$
$$\hat{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(\varphi)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}}A^{(\rho)}(h^{-1})\varphi\big(\delta(h)^{-1}\vec{p}\big).$$

Ezekkel a formulákkal megadtuk a fénynél gyorsabb részecskék egy fajtájának a spinor ábrázolását. Ennek az ábrázolásnak a Hilbert-tere azonban nehezen kezelhető, hiszen a Hilbert-tér egy eleme a pályán értelmezett, függvényértékű függvények egy osztálya. A *lokalizáció* problémájánál látni fogjuk, hogy ez a Hilbert-tér nem szerencsés, ezért áttérünk egy másik Hilbert-térre unitér transzformációval és megadunk az új téren a régivel unitér ekvivalens ábrázolást.

Vezessünk be egy új leképzést a mérhető függvények halmazai között:

(7.5.14.)

$$\mathcal{K}_{(m,\rho)} : \mathcal{F}\big(Y_m, \beta, L^2(\mathbb{C}, \mu, \mathbb{C})\big) \to \mathcal{F}(Y_m \times \mathbb{C}, \beta \times \mu, \mathbb{C}) \qquad f \mapsto \mathcal{K}_{(m,\rho)}(f)$$
$$\mathcal{K}_{(m,\rho)}(f)(\vec{p}, z) := \big(f(\vec{p})\big)(z).$$

Az $\check{E}^{(m,\rho)}$ és $\hat{E}^{(m,\rho)}$ terek $\mathcal{K}_{(m,\rho)}$ általi képét jelöljük $\check{F}^{(m,\rho)}$-val és $\hat{F}^{(m,\rho)}$-val. Ezek prehilbert terek lesznek, a belőlük származtatott Hilbert-tereket $\check{H}^{(m,\rho)}$-val és $\hat{H}^{(m,\rho)}$-val jelöljük. A $\mathcal{K}_{(m,\rho)}$ leképzés felemelhető Hilbert-terek leképzésévé:

(7.5.15.)
$$\check{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} : \check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \to \check{H}^{(m,\rho)}$$

$$\hat{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} : \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \to \hat{H}^{(m,\rho)}.$$

Egyszerűen igazolható, hogy ezek unitér izomorfizmusok. A $H^{(m,\rho)}$ Hilbert-terek egyszerűbbek, mint a $\mathcal{H}^{(m,\rho)}$ terek, mert nem függvényértékű függvények terei, hanem komplex értékű függvényeké.

Az $\mathcal{S}_{(m,\rho)}$ leképzésekhez hasonlóan az új tereken is bevezetjük a $H^{(m,\rho)}$ térről a spinorampliúdók terébe ható függvényeket:

(7.5.16.)
$$\check{S}_{(m,\rho)} : H^{(m,\rho)} \to \check{H}^{(m,\rho)} \qquad \check{S}_{(m,\rho)} := \check{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} \circ \check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \circ \mathcal{C}^{-1}_{m,\rho}$$

$$\hat{S}_{(m,\rho)} : H^{(m,\rho)} \to \hat{H}^{(m,\rho)} \qquad \check{S}_{(m,\rho)} := \hat{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} \circ \hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \circ \mathcal{C}^{-1}_{m,\rho}.$$

Ezek szintén unitér izomorfizmusok lesznek. Az új spinoramplitúdó tereken az ábrázoló operátorok jelölése legyen:

(7.5.17.)
$$\check{U}^{(m,\rho)} : \big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4\big) \times \check{H}^{(m,\rho)} \to \check{H}^{(m,\rho)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \check{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(f)$$

$$\hat{U}^{(m,\rho)} : \big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4\big) \times \hat{H}^{(m,\rho)} \to \hat{H}^{(m,\rho)} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \hat{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(f).$$

Az eddigi eredményeket egy kommutatív diagram segítségével foglaljuk össze, ahol az ábrázolások mind unitér ekvivalensek, a Hilbert-terek közti leképzések pedig unitér izomorfizmusok.

$$\check{\mathcal{C}}_{(m,\rho)}$$

$$\check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \quad \check{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}} \quad \check{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad \check{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} \qquad \check{H}^{(m,\rho)} \quad \check{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}} \quad \check{H}^{(m,\rho)}$$

$$\check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \quad \check{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \qquad \check{S}_{(m,\rho)} \quad \check{S}_{(m,\rho)}$$

$$\mathcal{H}^{(m,\rho)} \quad \mathcal{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}} \quad \mathcal{H}^{(m,\rho)} \qquad \mathcal{C}_{(m,\rho)} \qquad H^{(m,\rho)} \quad U^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}} \quad H^{(m,\rho)}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \quad \hat{\mathcal{S}}_{(m,\rho)} \qquad \hat{S}_{(m,\rho)} \quad \hat{S}_{(m,\rho)}$$

$$\longrightarrow \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \xrightarrow{\hat{\mathcal{U}}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}} \hat{\mathcal{H}}^{(m,\rho)} \qquad \hat{\mathcal{C}}_{(m,\rho)} \qquad \hat{H}^{(m,\rho)} \quad \hat{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}} \quad \hat{H}^{(m,\rho)}$$

$$\hat{\mathcal{C}}_{(m,\rho)}$$

$$\mathcal{C}_{(m,\rho)}$$

Most megadjuk az $U^{(m,\rho)}$ ábrázoló operátorok konkrét formáját egy $(h,\vec{x}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4$ csoportelemen. Írjuk fel h-t és $\vec{x}$-et az alábbi formában:

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Legyen $\vec{p} \in Y_m$ pont a pályán a következő alakú:

$$\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3).$$

Bevezetünk egy $\vec{q}$ vektort, mellyel könnyebben megadhatjuk az ábrázoló operátorokat.

(7.5.18.)

$$\begin{aligned} q_0 :=& \frac{p_0}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2) - p_1 \operatorname{Re}(\gamma\alpha^* + \delta\beta^*) \\ & - p_2 \operatorname{Im}(\gamma\alpha^* + \delta\beta^*) + \frac{p_3}{2}(-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 :=& - p_0 \operatorname{Re}(\alpha\beta^* + \gamma\delta^*) + p_1 \operatorname{Re}(\alpha\delta^* + \beta\gamma^*) - \\ & - p_2 \operatorname{Im}(\alpha\delta^* + \beta\gamma^*) + p_3 \operatorname{Re}(\alpha\beta^* - \gamma\delta^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_2 :=& p_0 \operatorname{Im}(\beta\alpha^* + \delta\gamma^*) + p_1 \operatorname{Im}(\alpha\delta^* + \gamma\beta^*) + \\ &+ p_2 \operatorname{Re}(\alpha\delta^* - \gamma\beta^*) - p_3 \operatorname{Im}(\beta\alpha^* + \delta\gamma^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3 :=& \frac{p_0}{2}(-|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\gamma|^2 + |\delta|^2) - p_1 \operatorname{Re}(-\gamma\alpha^* + \delta\beta^*) - \\ &- p_2 \operatorname{Im}(-\gamma\alpha^* + \delta\beta^*) + \frac{p_3}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2 + |\delta|^2).\end{aligned}$$

A $\vec{q} := (q_0, q_1, q_2, q_3)$ vektor egy pont az Y_m orbiton. Ekkor az $U^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}$ operátorok hatása egy f függvényen a $(\vec{p}, z) \in Y_m \times \mathbb{C}$ pontban:

(7.5.19.)
$$\check{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} |i\beta z + \delta|^{i\cdot\rho-1} f\left(\vec{q}, \frac{\alpha z - i\gamma}{i\beta x + \delta}\right)$$
$$\hat{U}^{(m,\rho)}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}, z) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} |-i\beta z + \alpha|^{i\cdot\rho-1} f\left(\vec{q}, \frac{\delta z + i\gamma}{-i\beta x + \alpha}\right).$$

7.6. Álló részecskék

Az X^0_0 orbithoz tartozó megengedett hatosok reprezentálják az álló részecskéket. Ezek reprezentációjával nem foglalkozunk részletesen, csak formálisan írjuk fel a megengedett hatoshoz tartozó unitér ábrázolást.

Definiáljuk az alábbi metszetfüggvényt:

(7.6.1.)
$$c_{(0,0,0,0)} : X^0_0 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \qquad c_{(0,0,0,0)}(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és az alábbi mértéket:

(7.6.2.)
$$\mu_0 : K(X^0_0) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \mu_0(f)$$
$$\mu_0(f) := f(0,0,0,0).$$

Legyen a $(V^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i})_{i\in I}$ operátorrendszer az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoport $\mathcal{H}^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i}$ komplex, szeparábilis Hilbert-téren megvalósított folytonos unitér irreducibilis ábrázolásainak egy teljes reprezentánsrendszere. Ekkor az

(7.6.3.)
$$\left(X^0_0, \mu_0, 1, (0,0,0,0), c_{(0,0,0,0)}, (V^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i})_{i\in I}\right)$$

hatos a Poincaré-csoport megengedett hatosa. Ezen hatosok által generált unitér ábrázolások minden $i \in I$-re a következők:

(7.6.4.)
$$\mathcal{H}^{(i)} := L^2\left(X^0_m, \mu_0, \mathcal{H}^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i}\right) \quad \text{Hilbert-téren:}$$
$$U^{(i)} : (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4) \times \mathcal{H}^{(i)} \to \mathcal{H}^{(i)} \qquad \left(h, (0,0,0,0), f\right) \mapsto U^{(i)}_{h,\vec{0}}(f)$$
$$U^{(i)}_{h,\vec{0}}(f)(\vec{0}) = V^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i}(h) f(\vec{0}).$$

Az ábrázolások unitér ekvivalenciájáról szól a következő tétel.

7.6.1. Tétel. *Az $U^{(i_1)}$ és $U^{(i_2)}$ ábrázolások akkor és csak akkor unitér ekvivalensek, ha*

$$i_1 = i_2.$$

A $\mathcal{H}^{(i)}$ Hilbert-terek minden $i \in I$-re kanonikusan izomorfak a $\mathcal{H}^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i}$ Hilbert-terekkel. A kanonikus izmorfizmust a

$$\mathcal{T}^{(i)} : \mathcal{H}^{(i)} \to \mathcal{H}^{(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})),i} \qquad f \mapsto f_i := \mathcal{T}(f) \tag{7.6.5.}$$
$$f_i := f(0,0,0,0)$$

leképzés adja meg. Ezen a Hilbert-téren a Poincaré-csoport unitér ábrázolásai:

$$W^{(i)} := \mathcal{T}^{(i)} \circ U^{(i)} \circ (\mathcal{T}^{(i)})^{-1} \tag{7.6.6.}$$

formulákkal adható meg. A $\mathcal{T}^{(i)}$ operátorok unitér izomorfizmusok Hilbert-terek között, ezért a $(W^{(i)})_{i\in I}$ ábrázolások unitér ekvivalensek az $(U^{(i)})_{i\in I}$ ábrázolásokkal.

8. Elemi részek matematikai vizsgálata

8.0. Bevezető

Az első szakaszban a spin jobb megértése céljából elengedhetetlen Clifford-algebrákat ismertetjük. Fontos megjegyezni, hogy fizikában gyakran Grassmann-algebrát használnak a spinnel járó tulajdonságok leírására, azonban a két megközelítésmód bizonyos szinten ekvivalens [DHSA].

A második szakaszban szintén a spinnel foglalkozunk; az SO(3) és az SU(2) csoportok ábrázolásait adjuk meg, valamint megemlítjük a Clebsh-Gordan formulát.

A harmadik szakaszban az elektron és a foton ábrázolását adjuk meg Hilbert-nyalábon a 6. fejezet alapján. A Maxwell-egyenletnél felmerülő szabad mértékválasztás matematikai okaira is ebben a szakaszban derül fény.

A negyedik szakaszban a disztribúcióelméleti bevezető után a Dirac- és Maxwell-egyenletet vezetjük le a nyalábon való ábrázolásból. Pontosan meghatározzuk, hogy ezen egyenletek mely megoldásainak lehet (a levezetés alapján) jogosan fizikai értelmet tulajdonítani.

Irodalom

[BD] Theodor Bröcker, Tammo tom Dieck: *Representation of Compact Lie Groups*
Graduate Texts in Mathematics (GTM) sorzat, 98. kötet
Springer-Verlag, New York, 1985.

[DHSA] C. Doran, D. Hestenes, F. Sommen, N. Van Acker: *Lie groups as spin groups*
Journal of Mathematical Physics **34.** évfolyam (1993)
augusztusi (8.) szám, 3642-3669.

[Mat] Tamás Matolcsi: *A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics.*
Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.

[SB] Simon László, E. A. Baderko:*Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[Var] V. S. Varadarajan: *Geometry of Quantum Theory II.*
Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

Az 1. szakasz alapja [BD], [DHSA] és [Mat], a 2. szakaszé [BD]. A 3-6. szakaszok forrása [Mat] és [Var]. A 4. szakaszban leírt disztribúcióelméleti bevezető részletezve megtalálható [SB]-ben.

8.1. Clifford-algebra

8.1.1. Definíció. Legyen V valós véges dimenziós vektortér. A $Q : V \to \mathbb{R}$ leképzést *kvadratikus formá*nak nevezzük, ha minden $v \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra teljesül, hogy

$$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v).$$

8.1.2. Definíció. Az A_i algebrai struktúrák homomorfizmusainak véges vagy végtelen

$$\ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

sorozatáról azt mondjuk, hogy *egzakt az A_i helyen*, ha f_i magja megegyezik f_{i-1} értékkészletével. *Egzakt sorozat*ról akkor beszélünk, ha az minden helyen egzakt.

Az egzakt sorozatban szereplő elemek tetszőleges típusú algebrák lehetnek (persze egy sorozaton belül ugyan olyan típusúaknak kell szerepelniük), de mi csak csoportok egzakt sorozatát fogjuk vizsgálni. Topologikus csoportok esetén a homomorfizmusok folytonosságát is megköveteljük.

Legyen N a G csoport egy részcsoportja, $i : N \to G$ az identikus beágyazás és $j : G \to G/N$ az N-hez tartozó projekció. Ekkor az

(8.1.1.) $$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G/N \longrightarrow \{e\}$$

sorozat egzakt. A

(8.1.2.) $$\{e\} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \{e\}$$

alakú egzakt sorozatokat *rövid egzakt sorozat*oknak nevezzük. A

(8.1.3.) $$\{e\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{e\}$$

sorozat pontosan akkor egzakt, ha f izomorfizmus.

A Clifford-algebráknál főleg a

(8.1.4.) $$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto -|x|^2$$

kvadratikus formát fogjuk használni, ennek a segítségével állítjuk elő a

(8.1.5.) $$\{e\} \to \frac{1}{2}\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n) \to \{e\}$$

rövid egzakt sorozatot. A kimondott tételek nagy része érvényben marad tetszőleges kvadratikus forma esetén, ezért amíg csak lehet, nem teszünk fel semmit a Q formáról.

8.1.3. Definíció. Legyen V valós véges dimenziós vektortér és $Q : V \to \mathbb{R}$ kvadratikus forma. A (V, Q) párhoz tartozó $\big(C(Q), i_Q\big)$ pár *Clifford-struktúra*, ha $C(Q)$ egységelemes valós számtest feletti algebra és $i_Q : V \to C(Q)$ lineáris leképzés, melyekre igaz az alábbi két feltétel.

(1) Minden $x \in V$ vektor esetén

$$\big(i_Q(x)\big)^2 = Q(x) \cdot 1,$$

ahol az 1 a $C(Q)$-ban lévő egységelemet jelöli.

(2) Ha A tetszőleges egységelemes, valós számtest feletti algebra és $j : V \to A$ olyan lineáris leképzés, hogy

$$\big(j(x)\big)^2 = Q(x)1_A \qquad \forall x \in V,$$

akkor létezik egyértelműen egy $\tau : C(Q) \to A$ algebra homomorfizmus úgy, hogy minden $x \in V$ esetén

$$\tau\big(i_Q(x)\big) = j(x).$$

A $C(Q)$ algebrát *Clifford-algebrá*nak nevezzük és a i_Q-t *Clifford-leképzés*nek hívjuk.

Egyszerűen megmutatható, hogy adott (V, Q) párhoz izomorfizmus erejéig egyértelműen hozzárendelhető egy $\big(C(Q), i_Q\big)$ Clifford-struktúra. A i_Q leképzést röviden i-nek írjuk, ha a szövegösszefüggésből egyértelműen kiderül, hogy melyik $C(Q)$ Clifford-algebrához tartozik.

Megmutatjuk, hogyan lehet a (V, Q) párhoz tartozó Clifford-struktúrát konstruktív módon előállítani. A V vektortér T tenzoralgebrájával kezdjük:

$$T = \bigoplus_{l=0}^{\infty} V^l \qquad V^0 = \mathbb{R} \quad V^1 = V \quad V^j = V \otimes \cdots \otimes V. \tag{8.1.6.}$$

A V^j a V-nek j-szeres tenzorszorzata. A V teret természetes módon beágyazhatjuk a T tenzoralgebrába:

$$V \xrightarrow{\subset} T.$$

A T algebrában a szorzás a

$$a \cdot b := a \otimes b \tag{8.1.7.}$$

képlettel adható meg, vagyis ha $a \in V^\mu$ és $b \in V^\nu$, akkor $a \otimes b \in V^{\mu+\nu}$. Legyen $\mathfrak{a}$ az alábbi elemek által generált ideál:

$$\{x \otimes x - Q(x)1 | x \in V\}. \tag{8.1.8.}$$

Ekkor $C(Q)$ nem más, mint a tenzoralgebra $\mathfrak{a}$-val való faktorizáltja:

$$C(Q) := T/\mathfrak{a}. \tag{8.1.9.}$$

Az $i : V \to C(Q)$ struktúra leképezés pedig az alábbi kompozíció:

(8.1.10.) $$i : V \xrightarrow{\subset} T \longrightarrow T/\mathfrak{a}.$$

Ha $V = \mathbb{R}^n$ és $Q(x) = -|x|^2$ minden $x \in V$ esetén, akkor a (V, Q) párhoz tartozó Clifford-algebrát C_n-vel jelöljük. A C_n algebra könnyen megfogalmazható generátorok és relációk nyelvén:

(8.1.11.) $$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad \text{a generátorok}$$

$$e_\nu^2 = -1 \qquad e_\mu e_\nu + e_\mu e_\nu = 0 \quad \text{ha} \quad \mu \neq \nu \qquad \text{a relációk.}$$

Az alábbi izomorfizmusok egyszerűen adódnak a fenti konstrukcióból:

(8.1.12.) $$C_0 = \mathbb{R} \quad C_1 = \mathbb{C} \quad C_2 = \mathbb{H}.$$

8.1.1. Tétel. *A $C(Q)$ Clifford-algebrának létezik egyértelműen egy*

$$t : C(Q) \to C(Q) \qquad x \mapsto x^t$$

kanonikus anti-automorfizmusa, az alábbi tulajdonságokkal:

(1) *Minden $x, y \in C(Q)$ vektorra*

$$(xy)^t = y^t x^t.$$

(2)

$$t \circ t = id_{C(Q)}.$$

(3) *Ha $x \in i(V)$, akkor $x^t = x$.*

Minden $x \in C(Q)$ elem felírható (nem egyértelműen)

(8.1.13.) $$x = x_1 x_2 \dots x_k$$

alakban, ahol $x_1, \dots, x_k \in i(V)$. A t anti-automorfizmus hatása az x elemen szemléletesen kifejezhető a

(8.1.14.) $$x^t = (x_1 x_2 \dots x_k)^t = x_k \dots x_2 x_1$$

képlettel.

A fentiek analógiájára létezik egy

(8.1.15.) $$\alpha : C(Q) \to C(Q) \qquad x \mapsto \alpha(x)$$

kanonikus automorfizmus, melyet egyértelműen meghatároznak az

(8.1.16.) $$\alpha \circ \alpha = id \qquad \alpha(x) = -x \quad \text{ha} \quad x \in i(V)$$

tulajdonságok. Vagyis

$$\alpha(x_1 \dots x_k) = (-1)^k (x_1 \dots x_k). \tag{8.1.17.}$$

A $k = 0, 1$ számokra definiájuk a Clifford-algebra egy-egy alterét:

$$C(Q)^k := \{x \in C(Q) | \alpha(x) = (-1)^k x\}. \tag{8.1.18.}$$

A $C(Q)^k$ halmaz vektortér, sőt, a vektortér struktúrát tekintve igaz a következő összefüggés:

$$C(Q) = C(Q)^0 \oplus C(Q)^1. \tag{8.1.19.}$$

Valamint ha $x \in C(Q)^\nu$ és $y \in C(Q)^\mu$, akkor $xy \in C(Q)^{\mu+\nu}$, ahol a kitevő 2-vel vett maradéka értendő. Ezt a tulajdonságot másképp úgy mondjuk, hogy $C(Q)$ $\mathbb{Z}/2$ *gradált-* vagy *graduált algebra*. Ha A és B két $\mathbb{Z}/2$ graduált algebra

$$A = A^0 \oplus A^1 \qquad B = B^0 + B^1, \tag{8.1.20.}$$

akkor definiáhatjuk az $A\hat{\otimes}B$ *graduált tenzorszorzatot*:

$$\begin{aligned} (A\hat{\otimes}B)^0 &:= (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1) \\ (A\hat{\otimes}B)^1 &:= (A^0 \otimes B^1) \oplus (A^1 \otimes B^0) \\ (A\hat{\otimes}B) &:= (A\hat{\otimes}B)^0 \oplus (A\hat{\otimes}B)^1 \qquad \text{mint vektortér,} \end{aligned} \tag{8.1.21.}$$

a szorzási szabály pedig:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := (-1)^{\mu\nu} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2), \tag{8.1.22.}$$

ha $a_2 \in A^\mu$ és $b_1 \in B^\nu$. A $\mathbb{Z}/2$ graduált algebrák graduált tenzorszorzata szintén $\mathbb{Z}/2$ graduált algebra lesz és igazolható, hogy a graduált tenzorszorzat a tenzorszozathoz hasonlóan asszociatív művelet. A C_n Clifford-algebrára az iménti definíciót használva a

$$C_n = \mathbb{C}\hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}\mathbb{C} \quad (n\text{-tényező}) \tag{8.1.23.}$$

felbontást kapjuk.

A Clifford-algebrák egy igen sokat használt tulajdonságáról ejtünk most szót.

8.1.2. Tétel. *A $i : V \to C(Q)$ Clifford-leképzés injektív, ezért a V teret a $C(Q)$ Clifford-algebra egy alterének tekintjük. Ha az $e_1, \dots e_n$ vektorok bázist alkotnak V-ben, akkor a szorzataik*

$$e_{\nu_1} e_{\nu_2} \dots e_{\nu_k} \qquad 1 \le \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k \le n$$

és az 1 *egységelem a* $C(Q)$ *Clifford-algebra egy bázisát alkotják, ezért* $\dim\big(C(Q)\big) = 2^n$.

Az α automorfizmus és a t anti-automorfizmus bármely sorrendű kompozíciója megegyezik:

(8.1.24.) $$t\alpha = \alpha t : C(Q) \to C(Q) \qquad x \mapsto \bar{x}$$

és ezt a műveletet nevezzük a *konjugálás*nak a $C(Q)$ Clifford-algebrában.

Legyen $C(Q)^*$ a $C(Q)$ Clifford-algebrában lévő invertálható elmek alábbi csoportja:

(8.1.25.) $$C(Q)^* := \{x \in C(Q) | \exists y \in C(Q) : \quad xy = yx = 1\}$$

és legyen

(8.1.26.) $$\Gamma(Q) := \{x \in C(Q)^* | \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1} \in V \qquad \forall v \in V\}.$$

Ekkor $\Gamma(Q)$ részcsoportja $C(Q)^*$-nek, a $\Gamma(Q)$ csoportot *Clifford-csoport*nak hívják. A konjugálás segítségével bevezetünk egy

(8.1.27.) $$N : C(Q) \to C(Q) \qquad x \mapsto x \cdot \bar{x}$$

műveletet, melyet *normá*nak nevezünk. Ha $x \in V$, akkor $N(x) = -Q(x) \cdot 1$.

Visszatérve a C_n Clifford-algebrára definiáljuk a

(8.1.28.) $$\rho : \Gamma_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \qquad \rho(x)v := \alpha(x)vx^{-1} \quad x \in \Gamma_n, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

homomorfizmust, ahol Γ_n a C_n Clifford-csoportja. Legyen $\mathrm{Pin}(n)$ az

$$N|_{\Gamma_n} : \Gamma_n \to C(Q)$$

homomorfizmus magja. Az $N|_{\Gamma_n}$ leképzés értékkészlete azonosítható $\hat{\mathbb{R}^n}$ csoporttal, azaz $\mathbb{R}^n$ karaktercsoportjával, vagyis írhatjuk az alábbi formulát:

$$N|_{\Gamma_n} : \Gamma_n \to \hat{\mathbb{R}^n}.$$

A ρ leképzés megszorítására lesz szükségünk a továbbiakban. Tekintsük a

$$\rho|_{\mathrm{Pin}(n)} : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$$

homomorfizmust. Ennek a leképzésnek az értékkészlete azonosítható az $\mathrm{O}(n)$ csoporttal, vagyis

$$\rho|_{\mathrm{Pin}(n)} : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n).$$

Ebből a leképzésből származtatott $(\rho|_{\mathrm{Pin}(n)})^{-1}\big(\mathrm{SO}(n)\big)$ ősképet jelöljük $\mathrm{Spin}(n)$ szimbolummal.

8.1.3. Állítás.

(1) *A* $\rho|_{\Gamma_n} : \Gamma_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n))$ *homomorfizmus magja* $\hat{\mathbb{R}^n}$.
(2) *Ha* $x \in \Gamma_n$, *akkor* $N(x) \in \hat{\mathbb{R}}$.
(3) *A normának a Clifford-csoportra való megszorítása*

$$N|_{\Gamma_n} : \Gamma_n \to \hat{\mathbb{R}}$$

homomorfizmus és $N\big(\alpha(x)\big) = N(x)$, *ha* $x \in \Gamma_n$.
(4) *Ha* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *akkor* $x \in \Gamma_n$ *és* $\rho(x)$ *az* x*-re merőleges síkra való tükrözés transzformációja. Ezen kívül* $\rho(\Gamma_n) \subset \mathrm{O}(n)$.
(5) *A* ρ *leképzésnek* $\mathrm{Pin}(n)$*-re való megszorításának a képtere* $\mathrm{O}(n)$, *azaz*

$$\rho|_{\mathrm{Pin}(n)} : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n)$$

és $\ker \rho|_{\mathrm{Pin}(n)} = \{+1, -1\} \subset C_n$.

8.1.4. Tétel.

(1) *Csoportok egzakt sorozatát kaphatjuk az alábbi módon, ha* $1 \leq n$.

$$\{e\} \xrightarrow{\subset} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\subset} \mathrm{Pin}(n) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(n) \longrightarrow \{e\}.$$

(2) *A* $\mathrm{Spin}(n)$ *és* $\mathrm{Pin}(n)$ *csoportok elláthatók Lie-csoport struktúrával.*
(3) *Lie-csoportok egzakt sorozata a*

$$\{e\} \xrightarrow{\subset} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\subset} \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \{e\}.$$

sorozat.
(4) *A* $\mathrm{Spin}(n)$ *Lie-csoport egyszeresen összefüggő és a*

$$\rho|_{\mathrm{Spin}(n)} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

fedőleképzéssel az $\mathrm{SO}(n)$ *csoport univerzális fedőcsoportja, ha* $3 \leq n$.

A $\mathrm{Spin}(n)$ csoportok kis n-re izomorfak jól ismert mátrixcsoportokkal:

(8.1.29.) $$\mathrm{Spin}(1) = \mathbb{Z}/2 \qquad \mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2)$$
$$\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \qquad \mathrm{Spin}(6) = \mathrm{SU}(4)$$

A C_n algebra graduált felbontását írjuk

(8.1.30.) $$C_n = C_n^0 \oplus C_n^1$$

alakban. Ekkor a $\mathrm{Spin}(n)$ csoportot egyszerűen megkaphatjuk a $\mathrm{Pin}(n)$ és C_n^0 metszeteként:

(8.1.31.) $$\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap C_m^0.$$

A Clifford-algebrában lévő szorzásra igaz, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

(8.1.32.) $$xy + yx = -2\langle x, y\rangle.$$

(A $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelöli az euklideszi skalárszorzást.)

Legyen $C'(Q_n) := C(-Q_n)$ Clifford-algebra, vagyis a

(8.1.33.) $$-Q_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto |x|^2$$

kvadratikus formához rendelt Clifford-algebra. A $C'(Q_n)$ algebra az $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ báziselemek által generált algebrával egyezik meg, melyben a

(8.1.34.) $$(e'_\nu)^2 = 1 \qquad \text{és} \quad e'_\nu e'_\mu + e'_\mu e'_\nu = 0 \quad \text{ha} \quad \mu \neq \nu$$

relációk teljesülnek.

8.1.5. Tétel. *Az alábbi algebrák izomorfak:*

$$C_n \otimes C_2' = C_{n+2}'$$
$$C_n' \otimes C_2 = C_{n+2}.$$

A C_n és C_n' algebrák kis n-re egyszerűen kiszámolhatók:

$$(8.1.35.)\qquad \begin{array}{lll} C_0 = \mathbb{R} & C_1 = \mathbb{C} & C_2 = \mathbb{H} \\ C_0' = \mathbb{R} & C_1' = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} & C_2' = \mathbb{R}(2). \end{array}$$

Nagyobb n-re az algebrákat az előbbi tétellel tudjuk előállítani:

n	C_n	C_n'
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}(2)$
3	$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2) \times \mathbb{H}(2)$
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{H}(4)$
7	$\mathbb{R}(8) \times \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$

A Clifford-algebrák periódikusságát fejezik ki a

$$C_{n+8} = C_n \otimes \mathbb{R}(16) \qquad C_{n+8}' = C_n' \otimes \mathbb{R}(16)$$

izomorfizmusok.

8.1.6. Tétel. *Minden C_n feletti modulus féligegyszerű. Izomorfizmus erejéig pontosan egy irreducibilis modulus létezik C_n felett, ha $n = 0, 1, 2, 4, 5, 6$ mod 8, és pontosan kettő, ha $n = 3, 7$ mod 8.*

Legyen $C_{p,q}$ a

$$(8.1.36.)\qquad \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |x|^2 - |y|^2$$

kvadratikus formához rendelt Clifford-algebra. A $C_{1,3}$ algebrát a *Minkowski-tér Clifford-algebrá*jának hívják és ismert a

$$(8.1.37.)\qquad C_{1,3} = \mathbb{H}(2)$$

izomorfizmus. Ennek az algebrának a generátorait 4×4-es mátrixok alakjában adjuk meg:

$$(8.1.38.)\qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezeket *Dirac-mátrixok*nak nevezzük. Számolással ellenőrizhető, hogy teljesítik a megfelelő relációkat. A C_3 Clifford-algerba generátorai pedig az ismert Pauli-mátrixok:

(8.1.39.) $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A Hilbert-nyalábon való ábrázolás szempontjából lesz fontos a következő észrevétel. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoportot ágyazzuk be a $\mathbb{C}(4)$ mátrixokba a

(8.1.40.) $$S : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}(4) \qquad m \mapsto S_m := \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & (m^{-1})^* \end{pmatrix}$$

leképzéssel, ahol $*$ a komplex konjugálást jelenti. Vezessük be az

(8.1.41.) $$a_{ij} : \mathbb{C}(4) \to \mathbb{C}$$

kiértékelő függvényt, mely adott mátrixhoz az (i, j)-edik elemét rendeli. Ekkor a δ fedőhomomorfizmusra igaz az

(8.1.42.) $$S_m^{-1} \gamma_i S_m = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}\big(\delta(m)\big)\gamma_j$$

egyenlőség.

8.2. $\mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3)$ ábrázolása, Clebsch-Gordan formula

A 7.2. pontban már bemutattuk az $\mathrm{SU}(2)$ csoport unitér ábrázolásait, azonban most más megközelítésből adjuk meg az ábrázoló operátorokat egy kevésbé absztrak Hilbert-téren, ezáltal a *Clebsch-Gordan formula* egy tisztán kombinatorikai, könnyen igazolható azonossággal lesz ekvivalens.

Legyen V_n a kétváltozós n-ed fokú homogén polinomok vektortere. Ha a változókat z_1 és z_2 jelöli, akkor a

(8.2.1.) $$P_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad 0 \le k \le n$$

polinomok egy bázisát adják V_n-nek. Jelölje $\mathbb{C}^{\mathrm{Pol}}[2]$ a kétváltozós polinomok vektorterét. Ekkor a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ csoportnak egy természetes hatása a $\mathbb{C}^{\mathrm{Pol}}[2]$ vektortéren:

(8.2.2.) $$P \in \mathbb{C}[z_1, z_2], \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad z = (z_1, z_2)$$
$$(gP)(z) := P(zg) = P(az_1 + bz_2, cz_1, dz_2).$$

8.2.1. Tétel. *A fenti konstrukciót használva, az* $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *csoport ábrázolása a* $V_n \subset \mathbb{C}^{\mathrm{Pol}}[2]$ *vektortéren irreducibilis.*

8.2.2. Tétel. *Az* SU_2 *csoport minden irreducibilis unitér ábrázolása izomorf valamely* V_n*-en megvalósuló ábrázolással.*

Ebben az esetben az ábrázolások tenzorszorzata kifejezhető bizonyos ábrázolások direkt összegével. Erről szól az alábbi tétel.

8.2.3. Clebsch-Gordan formula.

$$V_k \otimes V_l = \bigoplus_{j=0}^{q} V_{k+l-2j} \qquad q = \min\{k, l\}.$$

A fizikában gyakran a V_k ábrázolásokat félegész számokkal indexelik:

$$V(k/2) := V_k \tag{8.2.3.}$$

. Ekkor a Clebcsh-Gordan formula a következő:

$$V(a) \otimes V(b) = V(|a-b|) \oplus V(|a-b|+1) \oplus \cdots \oplus V(a+b). \tag{8.2.4.}$$

8.2.4. Tétel. *Az* SO(3) *irreducibilis ábrázolásai és az* SU(2) *olyan irreducibilis ábrázolásai, ahol a*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixelemhez tartozó operátor az identitás egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak egymással.

Tudjuk, hogy a tételben szereplő mátrix hatása a V_n téren a $(-1)^n$-el való szorzás, vagyis az SO(3)-nak V_{2n} ábrázolása az SU(2)-nek egy irreducibilis ábrázolását indukája. Ezt az ábrázolás megkülönböztetve az eddigitől W_n-nel jelöljük. Vegyük észre, hogy $\dim W_n = 2n + 1$. Fizikakönyvekben gyakoran találkozhatunk azzal az érveléssel, hogy W_n dimenziója csak nemnegatív egész szám lehet, ezért n nemnegatív félegész szám és ezt a számot nevezzük *spin*nek. A W_n ábrázolásokra is igaz a Clebsch-Gordan formula, azaz

$$W_a \otimes W_b = W_{|a-b|} \oplus W_{|a-b|+1} \oplus \cdots \oplus W_{a+b}. \tag{8.2.5.}$$

Legyen Y_n az n-ed fokú, három változós, homogén polinomok komplex vektortere. Az Y_n egy bázisa:

$$p_{p,q} := x_1^p x_2^q x_3^{l-p-q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \qquad 0 \le p, q \in \mathbb{Z}. \tag{8.2.6.}$$

Az Y_n téren a $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ csoport és annak az SO(3) részcsoportja természetes módon hat:

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad f \in Y_n \tag{8.2.7.}$$
$$(Af)(x) := f(Ax).$$

A $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ csoport ezen ábrázolása nem irreducibilis, ha $2 \leq l$. Legyen Δ a Laplace-operátor a polinomok terén:

$$\Delta : \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \to \mathbb{C}^{\mathrm{Pol}}[3] \qquad f \mapsto \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2. \tag{8.2.8.}$$

Definiáljuk a polinomok vektorterének egy alterét:

$$\mathfrak{Y}_n := \{f \in Y_n | \Delta f = 0\}. \tag{8.2.9.}$$

Az $\mathfrak{Y}_n$ elemeit *harmonikus polinomok*nak nevezzük. Ha a $\mathfrak{Y}_n$-beli függvényeket az S^2 egységgömbre megszorítjuk, akkor a *szférikus harmonikus polinom*okat kapjuk.

8.2.5. Állítás.

(1)
$$\dim Y_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \qquad \dim \mathfrak{Y}_n = 2n+1.$$

(2) *Az* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ C^∞ *függvények terén a Laplace operátor kommutál az* $\mathrm{SO}(3)$ *hatásával, vagyis* Δ $\mathrm{SO}(3)$ *ekvivariáns.*

(3) *Az* $\mathfrak{Y}_n$ *egy* $\mathrm{SO}(3)$ *invariáns altere* Y_n*-nek.*

(4) *Az* $\mathfrak{Y}_n$ *téren az* $\mathrm{SO}(3)$ *ábrázolása irreducibilis.*

8.3. Ábrázolás Hilbert-nyalábon

Először a fénynél lassabban haladó, m tömegű, feles spinű részecskék ábrázolását adjuk meg egy alkalmas Hilbert-nyalábon, pontosabban a (7.3.2.) képlettel definiált $U^{(m,1/2,+)}$ unitér ábrázolással unitér ekvivalens ábrázolást adunk meg.

A (6.7.) pontban leírtakat alkalmazzuk most egy konkrét ábrázolás esetére. A fejezetben használt jelölések megegyeznek a (6.7.)-ben szereplő jelölésekkel.

Lássuk el az X_m^+ pályát nyaláb struktúrával:

$$B_m^{(+,1/2)} := \left\{ (\vec{p}, \vec{v}) \in X_m^+ \times \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \sum_{k=0}^{3} p_k \gamma_k \vec{v} = m\vec{v} \right\}. \tag{8.3.1.}$$

A $\mathbb{C}^4$ vektortér elemeit is kis vektorral ellátott betűkkel jelöljük.

Legyenek $(\gamma_i)_{i=0,1,2,3}$ a (8.1.) fejezetben bevezetett Dirac-mátrixok. Ehhez a nyalábhoz tartozzon a

$$\pi : X_m^+ \times \mathbb{C}^4 \to X_m^+ \qquad (\vec{p}, \vec{v}) \mapsto \vec{p} \tag{8.3.2.}$$

leképzés. Minden $\vec{p} \in X_m^+$ ponthoz tartozik egy fibrum, jelen esetben ez

$$(8.3.3.)\quad B_m^{+,1/2}(\vec{p}) := \pi^{-1}(\{\vec{p}\}) = \left\{ (\vec{q}, \vec{v}) \in X_m^+ \times \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \vec{q} = \vec{p}, \quad \sum_{k=0}^{3} p_k \gamma_k \vec{v} = m\vec{v} \right\}.$$

Ahhoz, hogy a $B_m^{+,1/2}$ nyalábon tudjuk megadni a részecske reprezentációját, az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoportnak olyan Z hatását kell megtalálnunk $B_m^{+,1/2}$-en, melyre a

$$\begin{array}{ccc} B_m^{+,1/2} & \xrightarrow{Z_g} & B_m^{+,1/2} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X_m^+ & \xrightarrow[\delta_g]{} & X_m^+ \end{array}$$

diagram minden $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ esetén kommutatív. A δ az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoport hatását jelöli a X_m^+ pályán. A

$$(8.3.4.)\qquad Z : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times B_m^{+,1/2} \to B_m^{+,1/2} \qquad (g, \vec{p}, \vec{v}) \mapsto Z_g(\vec{p}, \vec{v})$$
$$Z_g(\vec{p}, \vec{v}) := \big(\delta_g \vec{p}, S_{(g^*)^{-1}} \vec{v}\big)$$

hatásról igazolható, hogy kommutatívvá teszi a fenti diagramot. (Az S leképzést a (8.1.40.) képlettel definiáltuk.)

A $(G_m^{+,1/2}, X_m^+, \pi)$ hármas ekkor még nem Hilbert-nyaláb, ugyanis nem vezettünk be minden $B_m^{+,1/2}(\vec{p})$ fibrumon Hilbert-tér struktúrát. A $\mathbb{C}^4$ téren jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^4}$ a megszokott skalárszorzást. Ha $\varphi : X_m^+ \to B_m^{+,1/2}$ függvény, akkor egy $\vec{q} \in X_m^+$ pontban legyen

$$(8.3.5.)\qquad \langle \varphi(\vec{q}), \varphi(\vec{q}) \rangle_{\mathbb{C}^4} := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{C}^4} \quad \text{ha} \quad (\vec{p}, \vec{v}) = \varphi(\vec{q}).$$

A $B_m^{+,1/2}(\vec{p})$ fibrumon legyen

$$(8.3.6.)\qquad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}} : B_m^{+,1/2}(\vec{p}) \times B_m^{+,1/2}(\vec{p}) \to \mathbb{C} \qquad \big((\vec{p}, \vec{u}), (\vec{p}, \vec{v})\big) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\vec{p}}$$
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\vec{p}} := \frac{1}{m} \langle \gamma_0 \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{C}^4}$$

egy kétváltozós művelet. Ha az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorokat koordinátákban adjuk meg:

$$(8.3.7.)\qquad \vec{u} := (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad \vec{v} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \qquad \text{akkor:}$$
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\vec{p}} = \frac{a_3 b_1^* + a_4 b_2^* + a_1 b_3^* + a_2 b_4^*}{m}.$$

Ebből a formából látható, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}}$ skalárszorzás a $B_m^{+,1/2}(\vec{p})$ fibrumon, mellyel $B_m^{+,1/2}(\vec{p})$ szeparábilis Hilbert-tér lesz. A fibrum természetes Borel-struktúrája megegyezik a $B_m^{+,1/2}$ által indukált Borel-struktúrával. A $(G_m^{+,1/2}, X_m^+, \pi)$ hármas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Hilbert-nyaláb voltához már csak azt kell igazolnunk, hogy minden $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ és $\vec{p} \in X_m^+$ elem esetén

(8.3.8.)
$$Z_g : B_m^{+,1/2}(\vec{p}) \to B_m^{+,1/2}(\delta_g \vec{p})$$

unitér izomorfizmus. Közvetlen számolással igazolható az

(8.3.9.)
$$S_{g^*} \gamma_0 S_g = \gamma_0$$

egyenlőség ami éppen a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}}$ skalárszorzás invarianciáját fejezi ki a S_g hatással szemben. Ez pedig azt jelenti, hogy Z_g unitér izomorfizmus. Tehát a

$$(G_m^{+,1/2}, X_m^+, \pi)$$

hármasról igazoltuk, hogy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Hilbert-nyaláb.

Vegyük észre a következőt. A

(8.3.10.)
$$\sum_{k=0}^{3} p_k \langle \gamma_0 \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}^4} = m \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}^4}$$

formulából következik, hogy

(8.3.11.)
$$\frac{1}{m} \langle \gamma_0 \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}^4} = \frac{1}{p_0} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}^4}.$$

Ezért gyakran a $B_m^{+,1/2}(p)$ fibrumon értelmezett $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}}$ skalárszorzást

(8.3.12.)
$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\vec{p}} = \frac{1}{p_0} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}^4}$$

formában írjuk.

A (6.7.1.) formulának megfelelően a Hilbert-nyaláb metszeteinek a halmaza:

(8.3.13.)
$$\mathrm{Sect}(B_m^{+,1/2}) = \big\{ \varphi : X_m^+ \to B_m^{+,1/2} \;\big|\; \varphi \text{ Borel-féle és } \forall \vec{p} \in X_m^+ : \varphi(\vec{p}) \in B_m^{+,1/2}(\vec{p}) \big\}.$$

Az új ábrázolás $\tilde{H}^{+,1/2,m}$ Hilbert-tere legyen a

(8.3.14.)
$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \mathrm{Sect}(B_m^{+,1/2}) \;\middle|\; \int_{X_m^+} \langle \varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p}) \rangle_{\vec{p}} d\alpha_m^+(\vec{p}) < \infty \right\}$$

függvénytérhez a

(8.3.15.)
$$| \cdot |_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \varphi \mapsto |\varphi|_{\mathcal{V}}$$
$$|\varphi|_{\mathcal{V}} := \int_{X_m^+} \langle \varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p}) \rangle_{\vec{p}} d\alpha_m^+(\vec{p})$$

félnormával asszociált Hilbert-tér.

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy $\varphi \in \mathcal{V}$-re az

$$|\varphi|_{\mathcal{V}} = 0 \tag{8.3.16.}$$

egyenlet pontosan akkor teljesül, ha α_m^+-majdnem minden $\vec{p} \in X_m^+$ elemre

$$\varphi(\vec{p}) = 0. \tag{8.3.17.}$$

Ezen a $\tilde{H}^{+,1/2,m}$ Hilbert-téren a normát a

$$\begin{aligned} &|\cdot|_{\tilde{H}} : \tilde{H}^{+,1/2,m} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \varphi \mapsto |\varphi|_{\tilde{H}} \\ &|\varphi|_{\tilde{H}} = \int_{X_m^+} \frac{1}{p_0} \langle \varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p}) \rangle_{\mathbb{C}^4} d\alpha_m^+(\vec{p}) \end{aligned} \tag{8.3.18.}$$

formulával számolhatjuk ki könnyen.

Legyen $(e_i)_{i=1,2,3,4}$ a $\mathbb{C}^4$ tér természetes bázisa. Az $(m,0,0,0)$ ponthoz tartozó fibrum $\mathbb{C}^4$-nek az e_1+e_3 és az e_2+e_4 vektorok által kifeszített kétdimenziós altere. Ennek a fibrumnak egy $\vec{u} \in \mathbb{C}^4$ eleme a

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \qquad \vec{v} \in \mathbb{C}^2 \tag{8.3.19.}$$

formában írható. Ezért létezik egy τ izomorfizmus, mely azonosítja a fibrumot az $(m,0,0,0)$ pont stabilizátorának, a G_{x_0} csoportnak, a (7.2.) fejezetben megadott, $D^{(1/2)}$ unitér ábrázolásának a terével:

$$\tau : B_m^{+,1/2}(m,0,0,0) \to \mathbb{C}^2 \qquad \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \mapsto \vec{v}. \tag{8.3.20.}$$

Továbbá az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ csoport Z hatása a nyalábon a $D^{(1/2)}$ ábrázolás által indukált, ami azt jelenti, hogy minden

$$\big((m,0,0,0), \vec{v}\big) \in B_m^{+,1/2}(m,0,0,0) \tag{8.3.21.}$$

fibrumon lévő pont esetén minden $g \in G_{x_0}$ csoportelemre igaz, az alábbi:

$$Z_g\big((m,0,0,0), \vec{v}\big) = \big(\delta_g(m,0,0,0), \tau^{-1} \circ D^{(1/2)} \circ \tau(\vec{v})\big). \tag{8.3.22.}$$

Ez azért teljesül, mert

$$S_{(g^*)^{-1}}\vec{u} = \begin{pmatrix} (g^*)^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g^*)^{-1}\vec{v} \\ g\vec{v} \end{pmatrix} \tag{8.3.23.}$$

és minden $g \in G_{x_0}$ esetén $g = (g^*)^{-1}$.

Ezáltal teljesítettük a (6.7.) fejezet végén kimondott követelményeket. Az alábbi eredményt kapjuk.

8.3.1. Tétel. *A Poincaré csoport folytonos unitér ábrázolása (a (6.7.6.) képletnek megfelelően) a $\tilde{H}^{+,1/2,m}$ Hilbert-téren:*

$$\tilde{U} : \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4\right) \times \tilde{H}^{+,1/2,m} \to \tilde{H}^{+,1/2,m} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \tilde{U}_{h,\vec{x}}(f)$$
$$\tilde{U}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} Z_h \varphi(\delta h^{-1}\vec{p}),$$

Ez unitér ekvivalens a (7.3.2.) képlettel definiált $U^{(m,1/2,+)}$ ábrázolással.

A felesnél nagyobb spinű részecskék nyalábon való ábrázolása hasonló gondolatmenettel kapható.

Most két fénysebességgel menő részecske ábrázolásának a direkt összegével unitér ekvivalens Hilbert-nyaláb ábrázolást adunk meg. Az egyik ábrázolás a $+1$ spinű, a másik a -1 spinű részecskét jelenti. Pontosabban, a (7.4.3.) képleteket használva, az

(8.3.24.) $$U^{(2,+)} \oplus U^{-2,+} : \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{C}\right) \times (\mathcal{H}^{(2,+)} \oplus \mathcal{H}^{(-2,+)}) \to \mathcal{H}^{(2,+)} \oplus \mathcal{H}^{(-2,+)}$$

ábrázolásal unitér ekvivalens ábrázolást adunk meg. A kapott ábrázolás unitér ekvivalens voltát az imént emlitettel nem bizonyítjuk, ugyanis a bizonyítás gondolatmenete teljesen azonos az először vizsgált esettel.

Legyen a nyaláb

(8.3.25.) $$B := \left\{ (\vec{p}, \vec{v}) \in X_0^+ \times \mathbb{C}^4 \;\middle|\; p_0 v_0 - p_1 v_1 - p_2 v_2 - p_3 v_3 = 0 \right\}$$

és a hozzá tartozó π leképzés

(8.3.26.) $$\pi : B \to X_0^+ \qquad (\vec{p}, \vec{v}) \mapsto \vec{p}.$$

Bevezetjük a Lorentz-formát a nyaláb pontjaira:

(8.3.27.) $$\{\cdot,\cdot\}_B : B \to \mathbb{C} \qquad (\vec{p}, \vec{v}) \mapsto \{\vec{p}, \vec{v}\}_B$$
$$\{\vec{p}, \vec{v}\}_B := p_0 v_0 - p_1 v_1 - p_2 v_2 - p_3 v_3$$

és olyan párokra, melynek elemei $\mathbb{C}^4$-ben vannak:

(8.3.28.) $$\{\cdot,\cdot\}_{\mathbb{C}^4} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C} \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \{\vec{u}, \vec{v}\}_{\mathbb{C}^4}$$
$$\{\vec{u}, \vec{v}\}_{\mathbb{C}^4} := -u_0 v_0^* + u_1 v_1^* + u_2 v_2^* + u_3 v_3^*.$$

Ha $\varphi : X_0^+ \to B$ függvény, akkor legyen a $\vec{p} \in X_m^+$ pontban

(8.3.29.) $$\{\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p})\}_{\mathbb{C}^4} := \{\vec{v}, \vec{v}\}_{\mathbb{C}^4} \qquad \text{ha} \quad (\vec{q}, \vec{v}) = \varphi(\vec{p}).$$

Legyen az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ hatása a B nyalábon a következő:

(8.3.30.)
$$Z : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times B \to B \qquad (g, \vec{p}, \vec{v}) \mapsto Z_g(\vec{p}, \vec{v})$$
$$Z_g(\vec{p}, \vec{v}) := (\delta_g \vec{p}, \delta_g \vec{v}).$$

Ekkor az alábbi diagram nyilvánvalóan minden $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ elem esetén kommutatív.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "Z_g"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ X_0^+ \arrow[r, "\delta_g"'] & X_0^+ \end{tikzcd}$$

Adott $\vec{p} \in X_0^+$ ponthoz tartozó fibrum

(8.3.31.)
$$B(\vec{p}) := \left\{ (\vec{q}, \vec{v}) \in X_0^+ \times \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \vec{p} = \vec{q} \quad p_0 v_0 - p_1 v_1 - p_2 v_2 - p_3 v_3 = 0 \right\}.$$

A $B(\vec{p})$ fibrumokon bevezetünk egy bilineáris funkcionált:

(8.3.32.)
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}} : B(\vec{p}) \times B(\vec{p}) \to \mathbb{C} \qquad \big((\vec{p}, \vec{v}), (\vec{p}, \vec{u})\big) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_{\vec{p}}$$
$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_{\vec{p}} := \{\vec{u}, \vec{v}\}_{\mathbb{C}^4}.$$

Igazolható, hogy minden $B(\vec{p})$ fibrumon a fenti képlet egy skalárszorzást határoz meg, amivel $B(\vec{p})$-t négydimenziós Hilbert-térré tehetjük. Tekintettel arra, hogy δ_g mindig valós és megőrzi a Lorentz-formát, ezért a Z_g hatásra nézve a fenti skalárszorzás invariáns. Ez egyben azt is jelenti, hogy a

(8.3.33.)
$$Z_g : B(\vec{p}) \to B(\delta_g \vec{p})$$

leképzés unitér izomorfizmus, vagyis a (B, X_0^+, π) hármas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ Hilbert-nyaláb.

A Hilbert-nyaláb metszeteinek a halmaza:

(8.3.34.)
$$\mathrm{Sect}(B) = \left\{ \varphi : X_0^+ \to B \;\middle|\; \varphi \quad \text{Borel-féle és} \quad \forall \vec{p} \in X_0^+ : \varphi(\vec{p}) \in B(\vec{p}) \right\}.$$

Legyen $\tilde{H}$ a

(8.3.35.)
$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi \in \mathrm{Sect}_B \;\middle|\; \int_{X_0^+} \langle \varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p}) \rangle_{\vec{p}} d\alpha_0^+(\vec{p}) < \infty \right\}$$

függvénytérhez a

(8.3.36.)
$$| \cdot |_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \varphi \mapsto |\varphi|_{\mathcal{V}}$$
$$|\varphi|_{\mathcal{V}} := \int_{X_0^+} \langle \varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p}) \rangle_{\vec{p}} d\alpha_m^+(\vec{p})$$

félnormával asszociált Hilbert-tér. A $\tilde{H}$ téren a normát a

(8.3.37.)
$$|\cdot|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \varphi \mapsto |\varphi|_{\tilde{H}}$$
$$|\varphi|_{\tilde{H}} = \int_{X_0^+} \{\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{p})\}_{\mathbb{C}^4} d\alpha_0^+(\vec{p})$$

formulával számolhatjuk ki.

Megjegyzés: A fenti képlettel meghatározott $\mathcal{V}$ téren egy $\varphi \in \mathcal{V}$ függvényre akkor és csak akkor igaz, hogy

(8.3.38.)
$$|\varphi|_{\mathcal{V}} = 0,$$

ha α_0^+-majdnem minden $\vec{p} \in X_0^+$ pontra teljesül az alábbi:

(8.3.39.)
$$p_j\varphi(\vec{p})_k = p_k\varphi(\vec{p})_j \qquad 0 \leq j < k \leq 3$$
$$\text{ha} \quad \varphi(\vec{p}) = (\varphi(\vec{p})_0, \varphi(\vec{p})_1, \varphi(\vec{p})_2, \varphi(\vec{p})_3).$$

Például a

(8.3.40.)
$$\varphi : X_0^+ \to B \qquad \vec{p} \mapsto (\vec{p}, \vec{p})$$

leképzés normája nulla. Ez azért különösen érdekes, mert a részecskefizikában gyakran találkozhatunk úgynevezett *nem fizikai állapotokkal*, melyek mögött valószínüleg hasonló matematikai jelenség húzódik meg. Formálisan használva a képleteket nem találunk elfogadható érvet, hogy miért nem jöhet létre olyan állapot, melyet a fenti vektortér jellemez.

8.3.2. Tétel. *A $\tilde{H}$ Hilbert-téren az*

$$\tilde{U} : \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4\right) \times \tilde{H} \to \tilde{H} \qquad (h, \vec{x}, f) \mapsto \tilde{U}_{h,\vec{x}}(f)$$
$$\tilde{U}_{h,\vec{x}}(f)(\vec{p}) = e^{i\{\vec{x},\vec{p}\}} Z_h \varphi(\delta h^{-1}\vec{p}).$$

reprezentáció unitér ekvivalens az

$$U^{(2,+)} \oplus U^{-2,+} : \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times_\delta \mathbb{R}^4\right) \times (\mathcal{H}^{(2,+)} \oplus \mathcal{H}^{(-2,+)}) \to \mathcal{H}^{(2,+)} \oplus \mathcal{H}^{(-2,+)}$$

reprezentációval (ahol a (7.4.3.) képletben szereplő jelölések használjuk).

8.4. Hullámegyenletek

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz, a K test legyen $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ és $0 \leq k$ egész szám. Jelentse $C^k(\Omega)$ az $f : \Omega \to K$ k-szor folytonosan differenciálható függvények összeségét. Jelölje $C_0^k(\Omega)$ azon $C^k(\Omega)$ térbeli függvényeket, amelyek tartója az Ω tér egy kompakt részhalmaza. A $C^\infty(\Omega)$ jelentse azon f függvények összeségét, amelyekre $f \in C^k(\Omega)$ bármely $0 \leq k$ egész számra.

Az $\mathbb{R}^n$-ből K-ba képző f függvény j-edik változó szerinti parciális deriváltját jelölje $\partial_j f$ $j = 1, 2, \dots, n$ esetén. A magasabb rendű parciális deriváltakat egy $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *multiindex* segítségével ($0 \leq \alpha_j$ egész szám) így jelöljük:

(8.4.1.)
$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Az α multiindex *rendje* legyen

(8.4.2.)
$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Azt mondjuk, hogy a $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ *függvényekből álló* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat tart a* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *függvényhez*, ha

(1) létezik olyan $T \in \Omega$ kompakt halmaz, hogy

(8.4.3.)
$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset T, \quad j \in \mathbb{N},$$

(2) minden α multiindexre

(8.4.4.)
$$\lim_{j\to\infty} (\partial^\alpha \varphi_j) = \partial^\alpha \varphi$$

egyenletesen az Ω halmazon.

A fenti konvergenciával ellátott $C_0^\infty(\Omega)$ vektorteret $\mathcal{D}(\Omega)$-val jelöljük, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ helyett röviden $\mathcal{D}$-t írunk. A $\mathcal{D}(\Omega)$ elemeit *alapfüggvényeknek* nevezzük.

Legyen $\mathcal{D}'(\Omega)$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ téren értelmezett, a $\mathcal{D}(\Omega)$ térbeli konvergenciára nézve folytonos, komplex értékű, lineáris funkcionálok halmaza. Ekkor $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ funkcionált az Ω halmazon értelmezett *disztribúciónak* vagy *általánosított függvénynek* nevezzük.

A funkcionálok halmazát a pontonkénti műveletekkel felruházva vektortér struktúrát kapunk.

A $\mathcal{D}'(\Omega)$ vektortérben bevezetjük az alábbi *gyenge konvergenciát*. Azt mondjuk, hogy az $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ disztribúciók $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozata *gyengén konvergál* az $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ disztribúcióhoz, ha minden rögzített $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alapfüggvény esetén

(8.4.5.)
$$\lim_{j\to\infty} \big(u_j(\varphi)\big) = u(\varphi).$$

Legyen u és v az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett disztribúció és $\Omega_1 \subseteq \Omega$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy *u és v egyenlők az Ω_1 nyílt halmazon*, ha $u(\varphi) = v(\varphi)$ minden olyan $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ függvényre, melyre $\operatorname{supp}\varphi \in \Omega_1$. Legyen u az Ω nyílt halmazon értelmezett disztribúció, továbbá legyen A azon Ω-beli pontok összessége, melyeknek van olyan nyílt környezete, ahol az u disztribúció nulla. Ekkor az *u disztribúció tartója*:

$$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus A. \tag{8.4.6.}$$

Rendeljük hozzá az $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ függvényhez, (mely lokálisan integrálható az Ω tartományban) az alábbi képlettel értelmezett R_f funkcionált:

$$R_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{8.4.7.}$$

Ekkor R_f disztribúció. Azokat a disztribúciókat, amelyek a fenti képlet szerint valamely lokálisan integrálható f függvény segítségével adhatók meg, *reguláris disztribuciók*nak nevezzük. A reguláris disztribúciók nem egyértelműen határozzák meg az őket előállító függvényeket.

8.4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$. Ekkor*

$$R_f = R_g \iff f = g \quad \textit{majdnem mindenütt az} \quad \Omega \quad \textit{halmazon.}$$

Legyen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ és j egész szám olyan, hogy $1 \le j \le n$. A $\partial_j u$ funkcionált így értelmezzük:

$$(\partial_j u)(\varphi) := -u(\partial_j \varphi). \tag{8.4.8.}$$

Tetszőleges α multiindex esetén $\partial^\alpha u$ legyen:

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi). \tag{8.4.9.}$$

A $\partial^\alpha u$ kifejezést az *u disztribúció parciális deriváltjá*nak nevezzük. A disztribúciók deriváltja nem akármilyen leképzés, mint azt a következő tétel mutatja.

8.4.2. Tétel. *Minden $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ disztribúcióra és α multiindexre $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

A fenti $\mathcal{D}$ alaptér után az alapfüggvények újabb terét, az $\mathcal{P}$ függvényteret definiáljuk. Tekintsük mindazon $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényeket, amelyekre tetszőleges, rögzített α, β multiindexek mellett:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty. \tag{8.4.10.}$$

A $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat akkor *tart a φ függvényhez*, ha bármely rögzített α, β multiindexre:

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big| \, x^\alpha \partial^\beta \varphi_k(x) - x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \, \big| \Big) = 0. \tag{8.4.11.}$$

Ezzel a konvergenciával ellátott vektorteret $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ függvénytérnek nevezzük.

Ahhoz, hogy további definíciókat tudjunk megadni, szükség van néhány tételre.

8.4.3. Tétel.

(1) *A $\mathcal{D}$ térbeli konvergenciából következik a $\mathcal{P}$ térbeli konvergencia.*
(2) $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.
(3) *Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{P}$ függvényhez megadható $\mathcal{D}$-beli függvények olyan sorozata, melyek φ-hez konvergálnak a $\mathcal{P}$ téren bevezetett konvergencia szerint.*
(4) *Legyen v a $\mathcal{P}$ téren értelmezett lineáris funkcionál, mely folytonos a $\mathcal{P}$-beli konvergenciára nézve. Legyen $u := v|_{\mathcal{D}}$ a v leszűkítése $\mathcal{D}$-re. Ekkor az $u \in \mathcal{D}$ disztribúció a v funkcionált egyértelműen meghatározza.*

Azokat a disztribúciókat, melyeknek létezik lineáris folytonos kiterjesztése a $\mathcal{D}$ térről a $\mathcal{P}$ térre, *temperált disztribúció*knak nevezzük.

Jelöljük $\mathcal{P}'$-vel a $\mathcal{P}$ téren értelmezett folytonos funkcionálokat. Ez vektortér lesz a szokásos műveletekkel, és értelmezhető benne a gyenge konvergencia. Az előbbi állítás szerint a temperált disztribúciók és $\mathcal{P}'$ elemei között kölcsönösen egyértelmű művelettartó megfeleltetés létesíthető, ezért $\mathcal{P}'$ elemeit temperált disztribúcióknak tekintjük. Ekkor jogosan írhatjuk az alábbi tartalmazást:

(8.4.12.) $$\mathcal{P}' \subset \mathcal{D}'.$$

8.4.4. Tétel. *Temperált disztribúció összes deriváltja is temperált disztribúció.*

Az előző fejezetben megadtuk az m tömegű, feles spinű részecskék ábrázolását Hilbert-nyalábon. Pontosan értelmeztük a $f : X_m^+ \to B_m^{+,1/2}$ metszetek terét a

(8.4.13.) $$\int_{X_m^+} \frac{1}{p_0} \langle f(\vec{p}), f(\vec{p}) \rangle_{\mathbb{C}^4} d\alpha_m^+(\vec{p})$$

normával. Most egy általánosabb függvényteret vezetünk be minden $0 \leq m, s$ valós számhoz:

(8.4.14.) $$\mathcal{T}_m^{+,s} := \left\{ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \quad \text{Borel-féle és} \quad \int_{X_m^+} \frac{1}{p_0^s} |f(\vec{p})|_{\mathbb{C}}^2 d\alpha_m^+(\vec{p}) < \infty \right\}.$$

8.4.5. Tétel. *Az*

$$\mathfrak{T} : \mathcal{T}_m^{+,s} \to \mathcal{P}'(\mathbb{R}^4) \qquad f \mapsto T_f$$
$$T_f(\varphi) := \int_{X_m^+} f(\vec{p}) \varphi(\vec{p}) d\alpha_m^+$$

leképzés jól definiált, így T_f temperált disztribúció.

Ha $f : X_m^+ \to B_m^{+,1/2}$ metszetfüggvény, akkor f felírható

(8.4.15.) $$f = (f_0, f_1, f_2, f_3) \qquad f_i \in \mathcal{T}_m^{+,1} \quad i = 0, 1, 2, 3$$

alakban. Az f_i pályán értelmezett függvényeket nulla értékkel kiterjeszthethük az egész $\mathbb{R}^4$-re. Az előző tételt alkalmazva, az $(f_i)_{i=0,1,2,3}$ függvényekhez hozzárendelhetünk $(T_{f_i})_{i=0,1,2,3}$ disztribúciókat, melyeket röviden

$$T_f = (T_{f_0}, T_{f_1}, T_{f_2}, T_{f_3}) \tag{8.4.16.}$$

vektordisztribúciónak írunk.

Az $\mathbb{R}^n$ téren eddig bevezetett fogalmakat könnyen általánosíthatjuk tetszőleges véges dimenziós V vektortérre. Továbbiakban is az általános V tér helyett a speciális $\mathbb{R}^n$ teret használjuk, azonban az absztrakt V vektortérre való áttérést megkönyítve az $\mathbb{R}^n$ duálisát nem azonosítjuk az Euklideszi skalárszorzással az $\mathbb{R}^n$ térrel, hanem a duálisára az $\mathbb{R}^n_d$ jelölést használjuk. Az $\mathbb{R}^n_d$ elemei fölé szintén vektorjelet írunk, de az alsó indexben szerepel a duálisra utaló 'd' betű. Az Euklideszi skalárszorzás jele legyen:

$$\vec{x}_d \vec{y} \qquad \text{ha} \quad \vec{x}_d \in \mathbb{R}^n_d, \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{8.4.17.}$$

Az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett Lebesgue-mérték legyen μ és az $\mathbb{R}^n_d$ téren ($\mathbb{R}^n$ duálisán) legyen μ_d a Lebesgue-mérték.

8.4.6. Tétel. *Legyen F^+ és F^- a következő két leképzés:*

$$\begin{aligned}
F^+ : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_d) \qquad & \varphi \mapsto F^+(\varphi) \\
F^+(\varphi)(\vec{x}_d) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} & e^{i\vec{x}_d\vec{y}} \varphi(\vec{y}) d\mu(\vec{y}) \\
F^- : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_d) \qquad & \varphi \mapsto F^-(\varphi) \\
F^+(\varphi)(\vec{x}_d) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} & e^{-i\vec{x}_d\vec{y}} \varphi(\vec{y}) d\mu(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Az F^+ és F^- műveletek jól definiáltak és folytonosak. Valamint az

$$F^\pm_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

leképzésekre:

$$F^+_d = (F^-)^{-1}, \quad F^-_d = (F^+)^{-1}.$$

Az F^+ és F^- művelet neve *pozitív-* illetve *negatív Fourier-transzformáció.*

A temperált disztribúciók terén a Fourier-transzformáció legyen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^\pm : \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n_d) \to \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n) \qquad & v \mapsto \mathfrak{F}^\pm(v) \\
\mathfrak{F}^\pm(v)(\varphi) := v\big(F^\pm(\varphi)\big)& \\
\mathfrak{F}^\pm_d : \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n_d) \qquad & v \mapsto \mathfrak{F}^\pm_d(v) \\
\mathfrak{F}^\pm_d(u)(\varphi) := v\big(F^\pm_d(\varphi)\big)&.
\end{aligned} \tag{8.4.18.}$$

8.4.7. Tétel. *Az $\mathfrak{F}^{\pm}$ és $\mathfrak{F}_d^{\pm}$ leképzések lineárisak, az egész téren értelmezettek és az egész térre képezenek, valamint folytonosak a gyenge konvergenciára nézve. Továbbá:*

$$\mathfrak{F}_d^{+} = (\mathfrak{F}^{-})^{-1}, \quad \mathfrak{F}_d^{-} = (\mathfrak{F}^{+})^{-1}.$$

A (8.4.5.) tételben bevezetett $(T_{f_i})_{i=0,1,2,3}$ disztribúciók pozitív Fourier-transzformáltjára az alábbi jelölést vezetjük be:

$$\hat{T}_f := (\hat{T}_{f_0}, \hat{T}_{f_1}, \hat{T}_{f_2}, \hat{T}_{f_3}) := \big(\mathfrak{F}^{+}(T_{f_0}), \mathfrak{F}^{+}(T_{f_1}), \mathfrak{F}^{+}(T_{f_2}), \mathfrak{F}^{+}(T_{f_3})\big). \tag{8.4.19.}$$

A $\hat{T}_f$ disztribúció lesz a Dirac-egyenlet alapja, ezért vizsgáljuk meg részletesen, pontosan milyen téren értelmezett ez a kifejezés. Ha az $\mathbb{R}^4$ teret a Lorentz-skalárszorzással nem azonosítjuk duálisával, a P^4 térrel, akkor az X_m^+ pályát mint P^4 egy részhalmazát kapjuk. Jelöljük P_d^4-vel a P^4 tér Euklideszi skalárszorzás szerinti duálisát. Ekkor a $\hat{T}_f$ értelmezési tartományára a

$$\mathrm{Dom}(\hat{T}_f) = \mathcal{P}_d^4 \tag{8.4.20.}$$

képletet kapjuk. A $\mathcal{P}_d^4$ teret mint $\mathbb{R}^4$ duálisának a duálisát azonosíthatjuk $\mathbb{R}^4$ térrel a szokásos módon:

$$\begin{aligned} &Q : \mathbb{R}^4 \to P_d^4 \qquad \vec{x} \mapsto \vec{x}_d^{\,p} \\ &\vec{x}_d^{\,p}(\vec{p}) := \vec{p}(\vec{x}) \quad \forall \vec{p} \in P^4. \end{aligned} \tag{8.4.21.}$$

A jelölés megváltoztatása nélkül a $\hat{T}_f$ disztribúciót a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ téren értelmezettnek tekintjük.

A T_f disztribúció (8.4.2.) tételben szereplő definícióját figyelembe véve a $T_f(\varphi) = 0$ egyenletből következik, hogy $\varphi = 0 \quad \alpha_m^+$-majdnem mindenütt az X_m^+ pályán. Ezért minden $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ függvényre:

$$T_f\big((p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2)\varphi\big) = 0 \tag{8.4.22.}$$

vagyis

$$(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2)T_f = 0. \tag{8.4.23.}$$

Mivel a 0 mérsékelt disztribúció, ezért képezhetjük a fenti egyenlet pozitív Fourier-transzformáltját. Ennek kiszámításában segít az alábbi formula.

Legyen minden α multiindexre

$$Q^{\alpha} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{8.4.24.}$$

függvény.

8.4.8. Tétel. *Minden α, β multiindexre és $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n_d)$, funkcionálra:*

$$Q^\alpha\Big(\partial^\beta\big(\mathfrak{F}^\pm(u)\big)\Big) = (\pm i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathfrak{F}^\pm\big(\partial^\alpha(Q^\beta u)\big)$$
$$\partial^\beta\Big(Q^\alpha\big(\mathfrak{F}^\pm(u)\big)\Big) = (\pm i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathfrak{F}^\pm\big(Q^\beta(\partial^\alpha u)\big).$$

Ezek alapján a (8.4.24) egyenlet Fourier-transzformáltja:

(8.4.25.) $$(-\Box - m^2)\hat{T}_f = 0,$$

ahol $\Box$ a *D'Alembert operátor*:

(8.4.26.) $$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Vagyis a $\hat{T}_f$ disztribúció teljesíti a

(8.4.27.) $$(\Box + m^2)\hat{T}_f = 0$$

egyenletet.

Ha olyan $f : X_m^+ \to B_m^{+,1/2}$ metszetfüggvényből indulunk ki, mely $\tilde{H}^{+,1/2,m}$ Hilbert-tér (8.3.14. és 8.3.15 formula) eleme, akkor a

(8.4.28.) $$f = (f_0, f_1, f_2, f_3) \qquad f_i \in \mathcal{T}_m^{+,1}$$

felbontást használva a T_f disztribúció $\hat{T}_f$ Fourier-transzformáltjára a

(8.4.29.) $$\sum_{j=0}^{3} i\gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{T}_f = m\hat{T}_f$$

egyenletet kapjuk feltételként. Ezt az egyenletet az *elektron Dirac-hullámegyenletének* nevezzük. Ha az egyenlet mindkét oldalára hattatjuk az

(8.4.30.) $$\sum_{j=0}^{3} i\gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

operátort, és figyelembe vesszük a γ_j mátrixok és a Fourier-transzformáció tulajdonságait, akkor az

(8.4.31.) $$(\Box + m^2)\hat{T}_f = 0$$

egyenletet kapjuk.

Próbáljuk meg a fenti gondolatmenetet, ahogy eljutottunk a Dirac-egyenletig, visszafele végiggondolni; vagyis vizsgáljuk meg, hogy a fenti (8.4.32.) egyenlet milyen megoldásai reprezentálnak fizikai állapotot. Kényelmesebb az egyenletnek a (8.4.23.) korábbi alakját vizsgálni. Felhasználjuk, hogy a

(8.4.32.) $$(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2)\varphi$$

alakú függvények pontosan akkor elemei $\mathcal{P}(P^4)$-nek, ha φ eltünik az $X_m^+ \cup X_m^-$ halmazon. Ezért olyan T_f disztribúciókat keresünk, melyek tartója az $X_m^\pm$ halmaz. Mivel $X_m^+ \cap X_m^- = \emptyset$, ezért a T_f disztribúciót felbonthatjuk két disztribúció összegére:

(8.4.33.) $$T_f = T_f^+ + T_f^-, \qquad \operatorname{supp} T_f^+ \subseteq X_m^+, \quad \operatorname{supp} T_f^- \subseteq X_m^-.$$

A $T_f^- = 0$ feltételt szokás megkövetelni, ugyanis így a *negatív energiájú megoldásokat* ki tudjuk zárni. Ezek után az a kérdés, hogy milyen T_f^+ disztribúciók reprezentálnak fizikai állapotot. A (8.4.2.) tételben szereplő formula alapján szükséges feltétel, hogy a T_f^+ disztribúció reguláris legyen, ez azonban nem elég. Legyen a T_f^+ reguláris disztribúciót meghatározó függvények egy repezentáns eleme $f^{T_f^+}$. Ekkor a (8.4.15. és 8.4.29.) képletek alapján a

(8.4.34.) $$\frac{1}{\sqrt{p_0}} f^{T_f^+} \in L^2(X_m^+, \alpha_m^+, \mathbb{C}^4)$$

feltétel már elégséges ahhoz, hogy $\hat{T}_f$ megoldás fizikai állapotot reprezentáljon.

A fénysebességgel menő részecskék esetén hasonló gondolatmenettel származtatjuk a hullámegyenletet.

Az $f \in \tilde{H}$ (8.3.35. és 8.3.36. képletek) függvényre az

(8.4.35.) $$f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$$

alakot használva (8.3.31.) alapján az

(8.4.36.) $$p_0 f_0(\vec{p}) - p_1 f_1(\vec{p}) - p_2 f_2(\vec{p}) - p_3 f_3(\vec{p}) = 0$$

egyenletet kapjuk. Az f-hez rendelt T_f temperált disztribúció $\hat{T}_f$ Fourier-transzformáltjára pedig az

(8.4.37.) $$\sum_{j=0}^{3} i\gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{T}_f = 0$$

egyenletet kapjuk, melyből következik a fénysebességgel haladó részecskék jól ismert

(8.4.38.) $$\Box \hat{T}_f = 0$$

hullámegyenlete. Ezt *Maxwell-egyenlet*nek nevezzük.

A (8.4.37.) képletet felemelve a disztribúciók körébe az

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\hat{T}_{f\,0} - \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{T}_{f\,1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{T}_{f\,2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{T}_{f\,3} = 0 \tag{8.4.39.}$$

egyenletet kapjuk. Ezt *Lorentz-feltétel*nek nevezzük.

Ha megvizsgáljuk, hogy az $\Box\hat{T}_f = 0$ egyenlet mely megoldásai jelentenek fizikai állapotokat, akkor az előző gondolatmeneten kívül egy új jelenséggel is találkozunk a (8.3.38. és 8.3.39.) képletekkel együtt említett megjegyzés alapján.

Legyen $\hat{T}_f$ és $\hat{Z}_g$ két megoldása az (8.4.39.) egyenletnek. Mivel csak akkor van esélyünk konkrét fizikai jelentést tulajdonítani ezen megoldásoknak, ha ezek reguláris disztribúciók, ezért nézzük meg az őket előállító f és g függvényeket. Ezek a függvények a (8.3.39.) képlet alapján, akkor egyenlők a $\tilde{H}$ Hilbert-téren, ha a belőlük képzett $h := f - g$ függvényre α_0^+-majdnem minden $\vec{p} \in X_0^+$ pontra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} p_j h(\vec{p})_k &= p_k h(\vec{p})_j \qquad 0 \le j < k \le 3 \\ \text{ha} \quad h(\vec{p}) &= \big(h(\vec{p})_0, h(\vec{p})_1, h(\vec{p})_2, h(\vec{p})_3\big). \end{aligned} \tag{8.4.40.}$$

Ezt az egyenletet a disztribúciók nyelvén úgy fogalmazhatjuk meg, hogy $\hat{T}_f$ és $\hat{Z}_g$ megoldásai a Maxwell-egyenletnek akkor jelentik ugyan aztaz állapotot, ha az $L := T_f - Z_g$ disztribúcióra teljesül az

$$\frac{\partial}{\partial x_j}L_k = \frac{\partial}{\partial x_k}L_j \qquad 0 \le j < k \le 3 \tag{8.4.41.}$$

egyenlet, melyet gyakran

$$\operatorname{rot} L = 0 \tag{8.4.42.}$$

alakban írunk. Ezt az jelenséget a *szabad mértékválasztás*nak nevezzük.