BME Matematika Intézet

Ricci-görbület a kvantummechanikai állapottéren

Diplomamunka

Lovas Attila

Témavezető: Dr. Andai Attila

2014

Kivonat

Korábbi kutatásaink során kapcsolatot találtunk a kvantummechanikai határozatlansági relációk és az állapottéren értelmezett Riemann-metrikák között. Továbblépésként az állapottér Ricci-tenzorának tanulmányozását tűztük ki célul. A dolgozatban a kvantummechanikai állapotteret 1-kodimenziós részsokaságként magában foglaló Riemann sokaság Ricci-tenzorát számítottuk ki, majd előállítottuk annak másodrendű közelítését a legkevertebb állapot közelében. Ricci-tenzor legkevertebb állapotbeli alakjából megkaptuk, hogy az általunk vizsgált sokaság nem lehet Einstein-sokaság. Végül a legegyszerűbb nemtriviális esetet vizsgáltuk numerikusan, három nevezetes metrika esetén.

Önállósági nyilatkozat

Alulírott Lovas Attila matematikus hallgató kijelentem, hogy a dolgozatomat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetében készítettem a matematikus MSc. diploma megszerzése érdekében. Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel.

Lovas Attila

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció naív olvasata szerint két, nem felcserélhető operátorokkal reprezentált fizikai mennyiség – ilyenek például az impulzus és a hely – nem mérhető egyszerre tetszőlegesen pontossággal [28]. Ezen *elv* (pontosabban a Schrödinger által élesített változatnak [8]) matematikai megfelelője az, hogy a tekintett két mennyiség kovarianciamátrixának determinánsára adható egy nem triviális alsó becslés. Ezt Robertson még 1934-ben több fizikai mennyiségre általánosította [21].

Fél évszázaddal később Robertson eredménye már alkalmazás közelébe került. A kvantumszámítógép fizikai megvalósíthatósága a határozatlansági relációk kutatásának egyik fő mozgatórugója lett. Gibilisco, Imparato és Isola megmutatta [17, 18], hogy a fizikai mennyiségek kovarianciamátrixának determinánsára vonatkozó alsó becslés nagymértékben javítható bizonyos operátormonoton függvényekből származtatható kvantum kovarianciák segítségével. Andai [2] cikkében megmutatta, hogy a szóban forgó egyenlőtlenségek mindegyike a Brunn–Minkowski determináns-egyenlőtlenségre (lásd: [7] és [29]) vezethetők vissza.

A kvantum kovarianciák tulajdonképpen speciális Riemann-metrikák (ún. kvantum Fisher-információk) a kvantummechanikai állapottéren, amely – mintazt később látni fogjuk – egy sima sokaság. Korábbi kutatásaink során általánosítottuk Andai kovarianciamátrixok determinánsai között fennálló egyenlőtlenségekről szóló tételét és geometriai jelentést tulajdonítottunk a Schrödinger által bevezetett kovarianciának [16, 3]. Megmutattuk, hogy a kvantummechanikai határozatlansági relációk lényegében az állapottéren értelmezett különböző metrikák között fennálló egyenlőségek.

Az eddigi gyakorlatunkkal ellentétben egy tisztán geometriai fogalomból, az állapottér Ricci-görbületéből indulunk ki és célunk pedig az, hogy a Ricci-tenzort információgeometriai jelentéssel ruházzuk fel. Első lépésként meghatározzuk a kvantummechanikai állapottér Ricci-görbületét. Jelen dolgozat fő eredménye a Ricci-tenzor előállítása. Előzetes ismeretként feltételezzük a Riesz–Dunford operátorkalkulusban, az operátormonoton függvények elméletében, illetve a sima sokaságok elméletében való alapvető jártasságot. A fejezet hátralevő részében definiáljuk vizsgálódásunk tárgyát: a kvantummechanikai állapotteret.

Kizárólag olyan kvantumrendszereket vizsgálunk, melyek leírhatók véges dimenzós Hilbert-terek segítségével. Ilyen például egy véges sok részecskét tartalmazó rendszer a spinje nem relativisztikus esetben.

1.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ pedig egy rögzített n-dimenziós Hilbert-tér, továbbá jelölje $\mathcal{M}_n$ a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér lineáris operátorainak $Lin(\mathcal{H}_n)$ halmazát.*

1. *A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett 1 nyomú, önadjungált, pozitív lineáris operátorokat* állapotoknak *nevezzük. Az állapotok összességét* állapottérnek *hívjuk, ezt $\mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ jelöli.*

$$\mathcal{M}^{(1)}_{n,sa} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathcal{M}_n,\, D \geq 0,\, D = D^+,\, \mathrm{Tr}(D) = 1 \right\}$$

2. *A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett önadjungált operátorokat* fizikai menynyiségeknek *vagy más szóval* obszervábiliseknek *nevezzük. A fizikai mennyiségek összességét jelölje $\mathcal{M}_{n,sa}$.*

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \left\{ A \,\middle|\, A \in \mathcal{M}_n,\, A = A^+ \right\}$$

Az állapottér egy zárt konvex halmaz a $(\mathcal{M}_n, \mathbb{C})$ vektortérben. Ennek a halmaznak az extremális [1] pontjait hívjuk *tiszta állapotoknak*, a többi pontot pedig *kevert állapotoknak* nevezzük. Megállapodunk abban, hogy D a továbbiakban mindig állapotot jelöl. Az $(\mathcal{M}_n, \mathbb{C})$ vektortéren a $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^*B)$ hozzárendelés egy belső szorzást ad meg. A $\mathrm{Tr}(A^*B) \in \mathbb{C}$ számot az A és B operátorok Hilbert–Schmidt skaláris szorzatnak nevezzük. A Hilbert–Schmidt belső szorzás az $\mathcal{M}_{n,sa}$ halmazon egybeesik az $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ hozzárendelés által definiált leképezéssel. Ellenőrizhető, hogy a Hilbert–Schmidt skaláris szorzás nem elfajult és $(\mathcal{M}_{n,sa}, \mathbb{R})$ egy nem elfajult altere az $(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ vektortérnek, azaz egyik esetben sem található olyan operátor, ami ortogonális lenne a tekintett vektortér minden elemére nézve.

[1] Egy konvex halmazbeli elemet abban az esetben nevezünk *extremálisnak*, ha nem áll elő két különböző konvex halmazbeli elem nem triviális konvex kombinációjaként.

2. Az állapottér geometriája

2.1. Az állapottér mint Riemann sokaság

A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett belső szorzás folytonosságából adódóan az állapottér belsejét pontosan azok az állapotok alkotják, melyekhez szigorúan pozitív lineáris operátorok tartoznak, ezért ezt a halmazt $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$-al fogjuk jelölni. Az állapottér belseje egy összefüggő nyílt halmaz, melyet kizárólag kevert állapotok alkotnak.

2.1. Állítás. *Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$-al jelölt belseje ellátható egy közönséges sima sokaság struktúrával. Az így kapott sima sokaságot jelölje szintén $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$.*

Bizonyítás.

Az állapottér belsejét egyetlenegy térképpel fogjuk lefedni. A koordinátázást komplex állapotokra mutatjuk meg, a valós állapotok koordinátázása hasonlóképpen történik.

Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ egy állapot és $\{e_i\}_{i=1}^n$ a $\mathcal{H}_n$ n-dimenziós Hilbert-tér egy bázisa. Tekintsük $\mathcal{M}_n$ szokásos bázisát (mátrixegységek) a $\mathcal{H}_n$ ezen bázisra vonatkozóan.

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$$

Vezessük be az

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(E_{kl} + E_{lk}) \quad \text{és} \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(E_{kl} - E_{lk}) \tag{1}$$

$(1 \leq k < l \leq n)$ operátokokat. Ekkor a

$$\phi : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to \mathbb{R}^{n^2-1} \quad D \mapsto \phi(D) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\phi(D) := (&\mathrm{Tr}\, DE_{11}, \ldots, \mathrm{Tr}\, DE_{n-1,n-1}, \mathrm{Tr}\, D(e_1 \vee e_2), \ldots, \mathrm{Tr}\, D(e_1 \vee e_n), \\ &\ldots, \mathrm{Tr}\, D(e_{n-1} \vee e_n), \mathrm{Tr}\, D(e_1 \wedge e_2), \ldots, \mathrm{Tr}\, D(e_1 \wedge e_n), \ldots, \mathrm{Tr}\, D(e_{n-1} \wedge e_n))\end{aligned} \tag{3}$$

módon definiált leképezés kölcsönösen egyértelmű és inverzével együtt folytonos, tehát homeomorfizmus $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ és $\mathbb{R}^{n^2-1}$ egy összefüggő nyílt halmaza között.

Q.E.D.

2.1. Megjegyzés. *A D állapot mátrixreprezentációjában a $e_i \vee e_j$ és E_{ii} leképezések felelnek meg a D mátrix valós részének, az $e_i \wedge e_j$ leképezések pedig a képzetes résznek. Így a valós állapotok koordinátázása annyiban tér el a komplex állapotok koordinátázásától, hogy a $e_i \wedge e_j$ leképezéseket kihagyjuk. Az állapottér fenti térképezését szokás* kanonikus koordinátázásnak *is nevezni.*

A továbbiakban az $F_{kl} := 2(e_k \vee e_l)$ és a $H_{kl} := 2(e_k \wedge e_l)$ jelöléseket fogjuk használni.

2.1. Definíció. *Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ sokaságon egy $g \in T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \vee T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ (2,1)-típusú sima tenzormezőt* Riemann-metrikának *nevezünk, ha tetszőleges*

$$X : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to T\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$$

sima vektormező esetén a

$$g(X, X) : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to \mathbb{R}$$

függvény nemnegatív és $(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}) \quad g(X, X)(D) = 0 \Leftrightarrow X(D) = 0.$

2.2. Állítás. *Egy tetszőleges $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ állapot felett a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér izomorf a nulla nyomú fizikai mennyiségek $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ valós számtest feletti vektorterével.*

Bizonyítás.

Az érintőtér azon meghatározását vesszük alapul, mely az érintővektorokat a sokaságban haladó sima görbék ekvivalencia osztályaiként adja meg, ahol az ekvivalencia reláció az elsőrendű érintkezés.

Legyen $\gamma : (-1, 1) \to \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sima görbe, melyre $\gamma(0) = D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$. A Tr művelet lineáris funkcionál, ezért

$$\operatorname{Tr} \dot{\gamma}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \operatorname{Tr}(\gamma(t) - \gamma(0)) = 0 \tag{4}$$

teljesül, azaz $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$. A $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér vektorai $(D, \dot{\gamma}(0))$ alakú párokkal reprezentálhatók és minden ilyen párra igaz, hogy a második elem $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$-beli elem, ezért rögzített $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ esetén a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér beágyazható a $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ vektortérbe.

Most legyen $A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ tetszőleges és vegyük a $t \mapsto \gamma(t) := D + tA$ görbét. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \subseteq \mathbb{R}^{n^2-1}$ halmaz nyílt és γ folytonos, ebből következik, hogy $\exists \varepsilon > 0$, melyre a γ görbe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumra való megszorítása teljes egészében az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságban halad. A $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ leképezés lineáris, ezért sima, $\gamma(0) = D$ és $\dot{\gamma}(0) = A$. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ lineáris tér tehát nemcsak beágyazható a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtérbe, hanem izomorf is vele.

Q.E.D.

2.2. Kvantum Fisher információk

A kvantum Fisher információ a klasszikus statisztikai modellek elméletéből ismert Fisher-féle információs mátrix általánosítása nemkommutatív esetre. A Fisher-féle információsmátrix többféleképpen is általánosítható kvantumos esetre, itt a Cenzov és Morozova által leírt általánosítsát mutatjuk be. Mindezt a teljesség igénye nélkül tesszük, pusztán azért, hogy példát adjunk információgeometriai szempontból érdekes metrika családokra állapottéren. A tudományterület információgeometriai hátteréről bővebb információ az [1] dolgozatban található.

2.2. Definíció. *Egy $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_m$ lineáris leképezést* pozitív leképezésnek *mondunk, ha pozitív operátor T általi képe pozitív operátor.*

Minden k természetes számra az $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{M}_n$ elemhez rendeljük hozzá az $[\mathcal{A}]^i_j = A^i_j$ blokkmátrixot, ahol $i, j = 1, \ldots, k$ és $A^i_j \in \mathcal{M}_n$.

2.3. Definíció. *Egy $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_m$ lineáris leképezést abban az esetben nevezzük* teljesen pozitív *leképezésnek, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a*

$$T^{(k)} : \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{M}_m \quad \mathcal{M}_n \ni A^i_j \mapsto \left[T^{(k)}A\right]^i_j = T\,[A]^i_j \tag{5}$$

leképezés pozitív leképezés. A $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_m$ leképezést sztochasztikus leképezésnek *hívunk, ha teljesen pozitív és felcserélhető a Tr művelettel.*

2.4. Definíció. *Riemann sokaságok egy $\left(\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}, g^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ családját* monoton metrika családnak *nevezzük, ha tetszőleges m, n pozitív egész számokra és minden*

$$T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_m$$

sztochasztikus leképezésre bármely $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ *állapotban teljesül az*

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}) \quad g_{T(D)}^{(m)}(T(A),T(A)) \leq g_D^{(n)}(A,A) \tag{6}$$

egyenlőtlenség. A monoton metrika családok tagjait kvantum Fisher információknak *hívjuk.*

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ halmazon a $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$ reláció egy parciális rendezést ad meg. Vizsgálható, hogy az $\mathcal{M}_n$ halmazon értelmezett $\mathcal{M}_n$ halmazba képző függvények hogyan viselkednek az imént bevezetett parciális rendezésre nézve.

2.5. Definíció. *Egy* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonos függvényről akkor mondjuk, hogy* operátormonoton (növekvő)*, ha tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *és* $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ *esetén igaz, hogy ha* $A \leq B$*, akkor az* $f(A) \leq f(B)$ *egyenlőtlenség teljesül. Egy* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *operátormonoton függvényt* szimmetrikusnak *nevezzük, ha eleget tesz a*

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

függvényegyenletnek és normáltnak *hívjuk, ha* $f(1) = 1$.

A szimmetrikus, normált operátormonoton függvények halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ jelöli.

2.1. Példa. *Az alábbi függvények mindegyike szimmetrikus, normált operátormonoton függvény:*

$$x \mapsto \frac{1+x}{2}, \quad x \mapsto \frac{2x}{1+x}, \quad x \mapsto \frac{2x^{\frac{1+\alpha}{2}}}{1+x^{2\alpha}}, \quad x \mapsto \frac{x-1}{\log x}, \quad x \mapsto \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta - 1)(x^{1-\beta} - 1)},$$

ahol $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *és* $0 < |\beta| < 1$.

Az operátormonotonicitás egy igen erős feltétel, melynek sok nem triviális következménye van. Igaz például, hogy minden $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény differenciálható. A bizonyítást illetően lásd Bhatia [20] könyvét.

A (7) egyenlőség különböző oldalain álló függvények differenciálásával belátható, hogy egy $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvény deriváltjai eleget tesznek az alábbi függvényegyenleteknek.

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - xf'(x) \tag{8}$$

$$f''\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 f''(x) \tag{9}$$

A (8) azonosságba $x = 1$ értéket helyettesítve azonnal adódik, hogy $f'(1) = \frac{1}{2}$, vagyis egy szimmetrikus, normált operátormonoton függvény deriváltja az $x = 1$ helyen csakis $\frac{1}{2}$ lehet.

Az operátormonoton függvények és a monoton metrika családok között szoros kapcsolat mutatható ki, erről szól Petz osztályozási tétele [4].

2.1. Tétel (Petz 1996). *Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a monoton metrikacsaládok és a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények között. Az $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvényhez a*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad g^{(n)}(D)(X,Y) = Tr\left(X\left(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D}R_{n,D}^{-1})R_{n,D}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(Y)\right) \tag{10}$$

formula monoton metrikák egy $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ családját rendeli, ahol $L_{n,D}$ a D mátrixszal való balról-, $R_{n,D}$ pedig a D mátrixszal való jobbról szorzás operáció.

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk, a tétel bizonyítása Petz [4] dolgozatában megtalálható.

Q.E.D.

2.2. Példa. *Az $f(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{x}+1)^2$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvényhez asszociált monoton metrika család tagjait* Wigner–Yanase *metrikáknak nevezik.*

Tetszőleges $\beta \in [-1,2] \setminus \{0,1\}$ számra szimmetrikus, normált operátormonoton függvényt határoz meg a $f_\beta(x) = \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta-1)(x^{1-\beta}-1)}$ hozzárendelés. Az ezen függvénycsalád tagjaihoz metrikákat Wigner–Yanase–Dyson *metrikáknak hívják.*

2.2. Megjegyzés. *Jogosan vetődhet fel a kérdés, hogy az eddigi vizsgálódásaink során csupán az állapottér belsejét néztük és a tiszta állapotokról nem mondtunk semmit. Az egész $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér egy peremes sokaság struktúrával látható el. A tiszta állapotok az $\partial\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ perem részhalmazát alkotják. Petz monoton metrikák radiális kiterjeszthetőségéről szóló tétele [4] értelmében igaz, hogy egy $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D,f}$ kvantum Fisher információ pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha $f(0) \neq 0$.*

2.3. Cenzov–Morozova-függvények

Sokszor kényelmesebb a kvantum Fisher információkat indexelő szimmetrikus, normált operátormonoton függvények helyett az azokból származtatott Cenzov–Morozova-függvényekkel dolgozni.

2.6. Definíció. *Minden szimmetrikus, normált operátormonoton f függvényhez rendelhető egy ún.* Cenzov–Morozova-függvény *az alábbi módon.*

$$c_f(x,y) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{xf\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{11}$$

Vegyük észre, hogy az $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvény (7) értelemben vett szimmetriájával ekvivalens az, hogy az f függvényből a fenti formulával származtatható c_f Cenzov–Morozova-függvény szimmetrikus kétváltozós függvény. A (7), (8) és (9) azonosságokból és a magasabb rendű deriváltak szimmetriájából a Cenzov–Morozova-függvény parciális deriváltjaira további értékes összefüggések nyerhetők.

$$\begin{gathered}\partial_1 c_f(x,y) = \partial_2 c_f(y,x)\\ \partial_{11}^2 c_f(x,y) = \partial_{22}^2 c_f(y,x)\\ \partial_{12}^2 c_f(x,y) = \partial_{21}^2 c_f(x,y) = \partial_{21}^2 c_f(y,x) = \partial_{12}^2 c_f(y,x)\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}c_f(x,y) &= -(x\partial_1 c_f(x,y) + y\partial_2 c_f(x,y))\\ c_f(x,y) &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_{11} c_f(x,y) & \partial_{12} c_f(x,y) \\ \partial_{21} c_f(x,y) & \partial_{22} c_f(x,y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

A (12) egyenlőségcsoport a c_f függvény szimmetriájából következik, így ezeket az összefüggéseket azokban az esetekben is fel lehet használni, amikor a metrika nem operátormonoton függvényből származik.

Egy $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvényhez a (10) formula által rendelt metrika család tagjaira használhatóbb kifejezést kaphatunk a Riesz–Dunford függvénykalkulus eredményeinek felhasználásával, ugyanis az f függvény szimmetriájából és operátormonotonicitásából következik, hogy analitikusan kiterjeszthető a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontozott komplex számsíkra (lásd: [1]). Jelölje c az f függvényhez asszociált Cenzov–Morozova-függvény kiterjesztését a

$$\mathbb{C}_+ := \{a + bi \in \mathbb{C} | a > 0\}$$

halmazra, γ_1 és γ_2 pedig legyenek $\mathbb{C}_+$ halmazban haladó zárt sima görbék, melyek a $D \in \mathcal{M}_{n,sa}$ operátor $\sigma(D)$ spektrumát pontosan egyszer kerülik meg, vagyis

$$\forall x \in \sigma(D) \quad \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_k} \frac{1}{z-x}\,\mathrm{d}z = 1 \quad k = 1,2$$

teljesül. Ekkor a származtatott metrikára a

$$g(D)(X,Y) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1}\oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta)X(\xi-D)^{-1}Y(\eta-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{14}$$

előállítás érvényes. Az így értelmezett $D \mapsto g(D)(X,Y)$ függvény differenciálható úgy, hogy az „integráljel mögött" deriválunk. A fenti formulában – és ezentúl mindig – a $(\xi - D)$ és $(\eta - D)$ szimbólumok a $(\xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}_n} - D)$ és $(\eta \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}_n} - D)$ kifejezéseket rövidítik. A származtatott metrika (14) módon történő kiszámításáról az [1] tézis tartalmaz több információt. Innentől fogva a D mátrixról csak önadjungáltságot tételezünk fel. Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság az állapottérnél könnyebben kezelhető. Az állapottér az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaság 1-kodimenziós Riemann részsokasága. A 2.2 állítás bizonyításában mutatott utat követve belátható, hogy az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság érintőtere minden pontban az $(\mathcal{M}_{n,sa}, \mathbb{C})$ vektortérrel izomorf.

Vezessük be a $G : \mathcal{M}_{n,sa} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{M}_n)$ függvényt, melyet a következő hozzárendelés értelmez.

$$G(D)(Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1}\oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}Y(\eta-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{15}$$

Ekkor a (14) Riemann-metrika a $g(D)(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(XG(D)(Y))$ alakban írható fel. Számításaink során szükség lesz a G leképezés első és második deriváltjaira.

2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{G}_n := \{A \in \mathcal{M}_n | \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n\}$, ekkor a következő kijelentések igazak.*

1. *$\mathcal{G}_n \subset \mathcal{M}_n$ nyílt halmaz.*

2. *Az $i : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n$ $A \mapsto A^{-1}$ operátor inverzió differenciálható, és*

$$\forall A \in \mathcal{G}_n \quad \forall X \in \mathcal{M}_n \quad (di)(A)(X) = -A^{-1}XA^{-1}$$

teljesül a deriváltra.

Bizonyítás. Lásd [13].

Q.E.D.

2.2. Lemma. *Legyen $\xi \in \mathbb{C}$ és $\mathcal{G}_\xi := \{A \in \mathcal{M}_n | \exists (\xi - A)^{-1} \in \mathcal{M}_n\}$, ekkor a következő kijelentések teljesülnek.*

1. *$\mathcal{G}_\xi \in \mathcal{M}_n$ nyílt halmaz.*

2. *Az $i_\xi : \mathcal{G}_\xi \to \mathcal{M}_n$ $A \mapsto (\xi - A)^{-1}$ függvény differenciálható, és a deriváltra teljesül, hogy*

$$\forall A \in \mathcal{G}_\xi \quad X \in \mathcal{M}_n \quad (d i_\xi)(A)(X) = (\xi - A)^{-1} X (\xi - A)^{-1}. \tag{16}$$

Bizonyítás. A 2.1 lemma és a láncszabály alapján nyilvánvaló.

Q.E.D.

Egy tetszőleges, X és Y változókat tartalmazó „Kifejezés" *szimmetrizáltjára* és *antiszimmetrizáltjára* az alábbi jelöléseket vezetjük be.

$$\begin{aligned} \{\text{Kifejezés}(X,Y)\}_{X,Y} &:= \text{Kifejezés}(X,Y) + \text{Kifejezés}(Y,X) \\ [\text{Kifejezés}(X,Y)]_{X,Y} &:= \text{Kifejezés}(X,Y) - \text{Kifejezés}(Y,X) \end{aligned} \tag{17}$$

2.3. Állítás. *Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}$, $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n$, G pedig a (15) formula által adott leképezés, ekkor a dG és $d^2 G$ deriváltakra a következő előállítások érvényesek.*

i.

$$\begin{aligned} dG(D)(X)(Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi - D)^{-1} X (\xi - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \\ + \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} X (\eta - D)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{18}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
&d^2G(D)(X)(Y)(Z) = \\
&= \Bigg\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi - D)^{-1} X (\xi - D)^{-1} Y (\xi - D)^{-1} Z (\eta - D)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi - D)^{-1} Y (\xi - D)^{-1} Z (\eta - D)^{-1} X (\eta - D)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi - D)^{-1} Z (\eta - D)^{-1} X (\eta - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \Bigg\}_{X,Y}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Bizonyítás.

Komplexfüggvénytani tény, hogy a homotóp görbéken vett integrálok egyenlők. A D operátornak a spektruma egy véges halmaz (a D operátor mátrixának a sajátértékei), ezért a γ_1 és γ_2 görbéket választhatjuk úgy, hogy $\forall x \in \sigma(D)$ $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(x) = 1$ $k = 1, 2$ teljesüljön. Kihasználva, hogy „be lehete deriválni" az integráljel mögé a (16) formulát és a ii. esetben a c függvény szimmetrikusságát felhasználva rövid számolás után a (18) és (19) formulákat kapjuk.

Q.E.D.

2.4. Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság Levi–Civita kovariáns deriválása

A Riemann geometria egyik alapvető fogalmához, a kovariáns deriváláshoz többféle úton is el lehet jutni. Kiindulhatunk például az érintőnyalábon – mint sima sokaságon – értelmezett homogén vektormezőkből (ún. *spray*) [26] vagy a vektornyalábokon értelmezett konnexió fogalmából. Ez utóbbi tárgyalásmód általánosabb, a [15] dolgozatomban egy ilyen utat mutatok be nagy vonalakban. Itt most a Jean Louis Koszul által 1955-ben bevezetett tárgyalásmódot követjük. Nem törekszünk teljességre, kizárólag csak a továbblépéshez nélkülözhetetlen fogalmakat definiáljuk. Az állítások közül pedig kizárólag azokat bizonyítjuk, amelyeket speciálisan az $\mathcal{M}_n$ sokaság részsokaságaira mondunk ki. A tenzormezők bázisponttól való függését ezentúl csakis akkor tüntetjük fel, ha a bázisponttól való függés fel nem tüntetése fatális félreértéseket okozna.

Emlékeztetünk, hogy egy M sima sokaságon értelmezett vektormezők $\Gamma(M, TM)$ halmaza egy kanonikus modulus struktúrával rendelkezik a sokaságon értelmezett sima függvények $C^\infty(M, \mathbb{C})$ gyűrűje felett.

2.7. Definíció. *Egy $\nabla : \Gamma(M,TM) \times \Gamma(M,TM) \to \Gamma(M,TM)$ leképezést* kovariáns deriválásnak *hívunk az M sokaságon, ha eleget tesz az alábbi négy kritériumnak.*

1. *$\nabla_{(X+Y)}U = \nabla_X U + \nabla_Y U$, ha $X, Y, U \in \Gamma(M, TM)$.*

2. *$\nabla_X(U + V) = \nabla_X U + \nabla_X V$, ha $X, U, V \in \Gamma(M, TM)$.*

3. *$\nabla_{\phi \cdot X} U = \phi \cdot \nabla_X U$, ha $X, U \in \Gamma(M, TM)$ és $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.*

4. *$\nabla_X(\phi \cdot U) = (X\phi) \cdot U + \phi \nabla_X U$, ha $X, U \in \Gamma(M, TM)$ és $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.*

2.4. Állítás. *Legyen ∇ kovariáns deriválás az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon, ekkor létezik egy olyan Γ (2,1)-típusú tenzormező az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon, hogy tetszőleges X és Y vektormezők esetén a következő egyenlőség érvényes.* [2]

$$\nabla_X Y = dY(X) + \Gamma(X, Y) \tag{20}$$

Bizonyítás.

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság egyetlen térképpel lefedhető, legyen egy ilyen lefedés $(x^1 \dots x^{n^2})$. A $\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{k \in \{1,\dots,n^2\}}$ vektormezők az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon egy bázismezőt határoznak meg. Létezik tehát sima függvényeknek olyan $\left(X^k\right)_{k\in\{1,\dots,n^2\}}, \left(Y^k\right)_{k\in\{1,\dots,n^2\}} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ rendszere, melyre az $X = \sum\limits_{k=1}^{n^2} X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ és $Y = \sum\limits_{k=1}^{n^2} Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ előállítások érvényesek. A kovariáns deriválás fenti definíciójában szereplő tulajdonságokat felhasználva a következőt kapjuk.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum\limits_{k=1}^{n^2} X^k \frac{\partial}{\partial x^k}} \sum_{k=1}^{n^2} Y^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} X^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} X^k Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} = \\
&= \mathrm{d}\, Y(X) + \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} X^k Y^l \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l}}_{\sum\limits_{r=1}^{n^2} \Gamma^r_{kl} \frac{\partial}{\partial x^r}}
\end{aligned} \tag{21}$$

[2] Itt a d az $Y : \mathcal{M}_{n,sa} \to \mathcal{M}_{n,sa}$ normált terek közt ható függvény deriválását jelenti és semmiképpen sem jelöl „külső deriváltat”.

A fenti levezetésből leolvasható, hogy a Γ tenzormező $(x^1 \dots x^{n^2})$ térképezésre és a $\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{k\in\{1,\dots,n^2\}}$ bázismezőre vonatkozó komponensei a Γ^r_{kl} sima függvények.

Q.E.D.

A differenciálható sokaságok elméletében a Γ^r_{kl} sima függvényeket Christoffel-szimbólumoknak hívják. Megállapodunk abban, hogy „házi használatra" a fenti Γ tenzormezőt hívjuk Christoffel-szimbólumnak. Azért van ez a furcsa kettősség, mert $\mathcal{M}_{n,sa}$ elemeire tekinthetünk úgy, mint egy Riemann sokaság pontjaira és úgy is, mint mátrixokra. Ezen szemléletmód következménye, hogy az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon adott X és Y vektormezők Lie-zárójele $[X,Y] = \mathrm{d}\,X(Y) - \mathrm{d}\,Y(X)$ módon is felírható.

2.8. Definíció. *Egy M sima sokaságon adott kovariáns deriválás* torziótenzora *alatt a*

$$\mathfrak{T}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

formulával megadott (2,1)-típusú tenzormezőt értjük. A ∇ kovariáns deriválásról akkor mondjuk, hogy torziómentes*, ha a torziótenzora azonosan nulla.*

A kovariáns deriválás metrikusságát szokás úgy is jellemezni, hogy a metrika kovariáns deriváltja nulla. Ez a jellemzés a következő meghatározást szolgáltatja.

2.9. Definíció. *Egy (M,g) szemi-Riemann sokaságon adott ∇ kovariáns deriválást* metrikusnak *mondunk, ha tetszőleges $X,Y,Z \in \Gamma(M,TM)$ vektormezőkkel az*

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

egyenlőség teljesül.

A fenti definícióval ekvivalens, annál valamivel szemléletesebb definíció található Szenthe [26] könyvében.

2.2. Tétel. *Egy (M,g) szemi-Riemann sokaságon pontosan egy metrikus és torzió mentes kovariáns deriválás létezik, amelyet* Levi–Civita kovariáns deriválásnak *hívunk és az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaság esetén a neki megfelelő Christoffel-szimbólumokat a következő egyenlőség egyértelműen meghatározza.*

$$g(\Gamma(X,Y),Z) = \frac{1}{2}\left(d\,g(X)(Y,Z) + d\,g(Y)(X,Z) - d\,g(Z)(X,Y)\right) \qquad (22)$$

Bizonyítás. Ezt a tételt nem bizonyítjuk. A bizonyítás a [27] és a [26] könyvekben megtalálható.

Q.E.D.

2.3. Tétel. *Az* $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ *Riemann sokaság Levi–Civita kovariáns deriválásához tartozó Christoffel-szimbólum a*

$$\Gamma(X,Y) = \frac{1}{2}G^{-1}\Big(\{dG(X)(Y) - \Lambda(X,Y)\}_{X,Y}\Big) \tag{23}$$

formulával fejezhető ki, ahol Λ *egy (2,1)-típusú tenzormező, amely a*

$$\Lambda(D)(X,Y) := \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}X(\eta-D)^{-1}Y(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{24}$$

formula által adott, ahol c *a* g *Riemann-metrikához tartozó Cenzov–Morozova-függvény.*

Bizonyítás.

A metrika (15) függvénnyel és Hilbert–Schmidt skaláris szorzással való kifejezését a (22) formulába írva a következőt kapjuk.

$$\mathrm{Tr}(Z\cdot G(\Gamma(X,Y))) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(Z(\mathrm{d}\,G(Y)(X) + \mathrm{d}\,G(X)(Y))) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(X\,\mathrm{d}\,G(Z)(Y)). \tag{25}$$

A Tr operáció linearitását és ciklikusságát valamint a c függvény szimmetriáját felhasználva a (25) formula utolsó összeadandója az alábbi módon alakítható át.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(X\,\mathrm{d}G(Z)(Y)) = \\
&\quad= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)X(\xi-D)^{-1}Z(\xi-D)^{-1}Y(\eta-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right) + \\
&\quad+ \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)X(\xi-D)^{-1}Y(\eta-D)^{-1}Z(\eta-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right) = \\
&\quad= \mathrm{Tr}\left(Z\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}X(\eta-D)^{-1}Y(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right) + \\
&\quad+ \mathrm{Tr}\left(Z\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}Y(\eta-D)^{-1}X(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

Definiáljuk a Λ tenzormezőt a (25) formulával, ekkor a következőt kapjuk.

$$\mathrm{Tr}(ZG(\Gamma(X,Y))) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(Z\left\{\mathrm{d}\,G(X)(Y) - \Lambda(X,Y)\right\}_{X,Y}\right) \tag{27}$$

Mivel a fenti összefüggés fennáll minden $Z \in \mathcal{M}_{n,sa}$ mátrixra, a Hilbert–Schmidt belső szorzás regularitása miatt az alábbi adódik.

$$G(\Gamma(X,Y)) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{d}\,G(X)(Y) - \Lambda(X,Y)\right\}_{X,Y} \tag{28}$$

A kapott egyenlőséget a G^{-1} mátrixszal balról szorozva kapjuk a bizonyítandó formulát.

$$\Gamma(X,Y) = \frac{1}{2}G^{-1}\left(\left\{\mathrm{d}\,G(X)(Y) - \Lambda(X,Y)\right\}_{X,Y}\right) \tag{29}$$

Q.E.D.

Későbbi számításaink során szükség lesz a $D \mapsto \Lambda(D)(X,Y)$ leképezés deriváltjára.

2.5. Állítás. *A $D \mapsto \Lambda(D)(X,Y)$ leképezés deriváltját a*

$$\begin{aligned}
&d\,\Lambda(D)(Z)(X,Y) = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}Z(\xi-D)^{-1}X(\eta-D)^{-1}Y(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \\
&+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}X(\eta-D)^{-1}Z(\eta-D)^{-1}Y(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \\
&+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)(\xi-D)^{-1}X(\eta-D)^{-1}Y(\xi-D)^{-1}Z(\xi-D)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned} \tag{30}$$

formula adja meg, ahol $X,Y,Z,D \in \mathcal{M}_{n,sa}$.

Bizonyítás. A bizonyítás a 2.3 állítás bizonyításához hasonló módon végezhető, nem részletezzük.

Q.E.D.

2.5. Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság Riemann görbülete

2.10. Definíció. *Egy M sima sokaságon legyen adott egy ∇ kovariáns deriválás. Igazolható, hogy a*

$$\mathfrak{R}(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

formula egy (3,1)-típusú sima tenzormezőt határoz meg az M sokaságon. Ezt a tenzormezőt az M sokaság ∇ kovariáns deriválásra vonatkozó Riemann-féle görbületi tenzorának nevezik.

Ellenőrizhető, hogy az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságra a Riemann tenzor fenti alakja az alábbival ekvivalens.

$$\mathfrak{R}(X,Y,Z) = \left[\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\mathrm{d}\, X(Y)} Z\right]_{X,Y} \tag{31}$$

2.11. Definíció. *Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon egy X vektormezőt* konstansnak *mondunk, ha $dX = 0$ teljesül rá.*

Ezentúl kizárólag konstans vektormezők vizsgálatával foglalkozunk az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon.

A (31) formulából a lentebb részletezett rövid számolás után a

$$\mathfrak{R}(X,Y,Z) = [\mathrm{d}\,\Gamma(X)(Y,Z) + \Gamma(X,\Gamma(Y,Z))]_{X,Y} \tag{32}$$

kifejezést nyerjük a Riemann-tenzorra.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(X,Y,Z) = \left[\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\underbrace{\mathrm{d}\, X(Y)}_{=0}} Z\right]_{X,Y} &= [\nabla_X(\Gamma(Y,Z))]_{X,Y} = \\ &= [\mathrm{d}\,\Gamma(X)(Y,Z) + \Gamma(X,\Gamma(Y,Z))]_{X,Y}\end{aligned} \tag{33}$$

2.3. Lemma.

$$dG^{-1}(X)(Y) = -G^{-1}\left(dG(X)\left(G^{-1}(Y)\right)\right) \tag{34}$$

Bizonyítás.

A láncszabályt és az operátor inverzió differenciálási szabályát a G leképezés és az operátor inverzió kompozíciójára alkalmazva kapjuk a fenti formulát.

Q.E.D.

2.4. Tétel. *Tekintsük az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaságot a Levi–Civita kovariáns deriválással. Ha X, Y és Z konstans vektormezők, akkor a Riemann görbület a következő alakot ölti.*

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(X,Y,Z) = \frac{1}{2}G^{-1}\Big[d^2\, G(X)(Z)(Y) - \{d\Lambda(X)(Y,Z)\}_{Y,Z} - \\ -\{\Lambda(X,\Gamma(Y,Z))\}_{X,\Gamma(Y,Z)} - [dG(X)(\Gamma(Y,Z))]_{X,\Gamma(Y,Z)}\Big]_{X,Y}\end{aligned} \tag{35}$$

Bizonyítás.

A Riemann görbületi tenzorra nyert (32) formulába a Christoffel-szimbólumra nyert (23) kifejezéseket beírva az alábbiakat kapjuk.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\Gamma(X)(Y,Z) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,G^{-1}(X)\left(\{\mathrm{d}\,G(Y)(Z)-\Lambda(Y,Z)\}_{Y,Z}\right)+ \\ &+\frac{1}{2}G^{-1}\left(\left\{\mathrm{d}^2\,G(X)(Y)(Z)-\mathrm{d}\,\Lambda(Y,Z)\right\}_{Y,Z}\right)= \\ &= G^{-1}\left(\frac{1}{2}\left\{\mathrm{d}^2\,G(X)(Y)(Z)-\mathrm{d}(X)(Y,Z)\right\}_{Y,Z}-\mathrm{d}\,G(X)(\Gamma(Y,Z))\right) \end{aligned} \tag{36}$$

$$\Gamma(X,\Gamma(Y,Z))=\frac{1}{2}G^{-1}\left(\{\mathrm{d}\,G(X)(\Gamma(Y,Z))-\Lambda(X,\Gamma(Y,Z))\}_{X,\Gamma(Y,Z)}\right) \tag{37}$$

A G leképezés második deriváljának szimmetriáját felhasználva kapjuk a kívánt alakot.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(X,Y,Z) &= [\mathrm{d}\,\Gamma(X)(Y,Z)+\Gamma(X,\Gamma(Y,Z))]_{X,Y}= \\ &= G^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\mathrm{d}^2\,G(X)(Y)(Z)-\mathrm{d}\,\Lambda(X)(Y,Z)\right\}_{Y,Z}-\mathrm{d}\,G(X)(\Gamma(Y,Z))\right]_{X,Y}+ \\ &+\frac{1}{2}G\left[\{\mathrm{d}(x)(\Gamma(Y,Z))-\Lambda(X,\Gamma(Y,Z))\}_{X,\Gamma(Y,Z)}\right]_{X,Y}= \\ &= \frac{1}{2}G^{-1}\left[\mathrm{d}^2\,G(X)(Z)(Y)-\{\mathrm{d}\,\Lambda(X)(Y,Z)\}_{Y,Z}-\right. \\ &\left.-\{\Lambda(X,\Gamma(Y,Z))\}_{X,\Gamma(Y,Z)}-[\mathrm{d}\,G(X)(\Gamma(Y,Z))]_{X,\Gamma(Y,Z)}\right]_{X,Y} \end{aligned} \tag{38}$$

Q.E.D.

3. A Ricci-görbület lokális alakja

Egy M sima sokaságon adott ∇ kovariáns deriválás Ricci-tenzora alatt a

$$\mathfrak{Ric}(Y,Z) := \mathrm{Tr}(X \mapsto \mathfrak{R}(X,Y,Z)) \tag{39}$$

formulával megadott (2,0)-típusú tenzormezőt értjük, ahol $\mathfrak{R}$ a görbületi tenzor. A fejezet célja az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaságon a Ricci-tenzor lokális alakjának kiszámítása. Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon adott g metrikáról feltesszük, hogy egy $c : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ szimmetrikus függvénnyel származtatható (14) módon. Egyenlőre annyit teszünk fel, hogy a c függvény holomorf, vizsgálódásainkat csak később szűkítjük le arra az esetre, amikor c egy f operátormonoton függvényhez asszociált Cenzov–Morozova-függvény. Célunk elérése érdekében sorravesszük a Riemann-tenzor kiszámításához szükséges mennyiségeket és meghatározzuk azok lokális alakját.

Mivel $D \in \mathcal{M}_{n,sa}$ egy önadjungált operátor a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren, választható egy olyan bázis, melyben a D operátor mátrixa diagonális: $D = diag\langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$, ahol $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ a D mátrix sajátértékei. Mostantól fogva minden számítást ebben a kitüntetett bázisban végzünk. Az eddigi fejezetekben bevezetett jelölések az alábbi hasznos rövidítéssel egészülnek ki.

$$c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m} := \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \prod_{r=1}^{n} (\xi - \lambda_{i_r})^{-1} \prod_{s=1}^{m} (\eta - \lambda_{j_s})^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{40}$$

A $c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m}$ szimbólum triviális szimmetriáit az alábbi állítás írja le.

3.1. Állítás. *Legyen S_n az n-ed rendű szimmetrikus csoport. Ekkor tetszőleges $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_m$ esetén a $c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m}$ szimbólumra a következő egyenlőségek teljesülnek.*

$$c_{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots\sigma(i_n);\tau(j_1),\tau(j_2),\dots\tau(j_m)} = c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m} \tag{41}$$

$$c_{j_1 \dots j_m; i_1 \dots i_n} = c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m} \tag{42}$$

Bizonyítás.

A $c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m}$ szimbólum (40) definíciójából és a c függvény szimmetrikusságából az állítás triviális módon adódik.

Q.E.D.

Számításaink eredményeképpen a Ricci-tenzor E_{kl} és E_{pq} mátrix egységeken felvett értékére az alábbi formulát fogjuk kapni.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Ric}(E_{kl}, E_{pq}) = &\left(\frac{c_{k;kpp} + c_{kkp;p} - (c_{kk;pp} + c_{kp;kp})}{c_{k;p}} + \frac{c_{k;pp} c_{kk;p}}{2c_{k;p}^2} \right) \delta_{kl}\delta_{pq} + \\ &+ \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{c_{sk;lk} - c_{s;klk} - c_{skk;l} + c_{k;lks}}{c_{k;s}} + \frac{(c_{l;sk} + c_{lk;s} - c_{ls;k})^2}{4c_{k;s}c_{l;s}} - \right. \\ &\left. - \frac{2c_{sk;k} - c_{s;kk}}{c_{s;k}} \frac{2c_{kl;k} - c_{kk;l}}{2c_{k;k}} \right\}_{k,l} \delta_{lp}\delta_{kq} \end{aligned} \tag{43}$$

3.1. Kvantum Fisher-információk

3.2. Állítás. *A metrika Hilbert–Schmidt belső szorzással történő kiszámításához használt,* (15) *formulával definiált G leképezés lokális alakja az alábbi.*

$$G(E_{kl}) = c_{k;l} E_{kl} \tag{44}$$

Bizonyítás.

A (15) formulát felhasználva az alábbi számolással kapható meg.

$$\begin{aligned} G(E_{kl}) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta) \sum_{a,b=1}^{n} \frac{E_{aa} E_{kl} E_{bb}}{(\xi - \lambda_a)(\eta - \lambda_b)} + \frac{\delta_{ak}\delta_{lb} E_{ab}}{(\xi - \lambda_a)(\eta - \lambda_b)} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta) \frac{1}{(\xi - \lambda_k)(\eta - \lambda_l)} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \, E_{kl} = c_{k;l} E_{kl} \end{aligned} \tag{45}$$

Q.E.D.

3.1. Következmény. *A G leképezés inverzét a fentiekből egyszerűen meghatározhatjuk.*

$$G^{-1}(E_{kl}) = (c_{k;l})^{-1} E_{kl} \tag{46}$$

3.3. Állítás. *A G leképezés deriváltjának lokális alakja az alábbi.*

$$dG(E_{ij})(E_{kl}) = c_{ij;l}\delta_{jk} E_{il} + c_{k;lj}\delta_{il} E_{kj} \tag{47}$$

Bizonyítás.

A (18) formulát felhasználva a következő számolás eredményeképpen a kívánt alakot kapjuk.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\, G(E_{ij})(E_{kl}) = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c=1}^{n} \frac{E_{aa}E_{ij}E_{bb}E_{kl}E_{cc}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)} + \frac{E_{aa}E_{kl}E_{bb}E_{ij}E_{cc}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c=1}^{n} \frac{\delta_{ai}\delta_{jb}\delta_{bk}\delta_{lc}E_{ac}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)} + \frac{\delta_{ak}\delta_{lb}\delta_{bi}\delta_{jc}E_{ac}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \frac{E_{il}}{(\xi-\lambda_i)(\xi-\lambda_j)(\eta-\lambda_l)} + \frac{E_{kj}}{(\xi-\lambda_k)(\eta-\lambda_l)(\eta-\lambda_j)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&= c_{ij;l}\delta_{jk}E_{il} + c_{k;lj}\delta_{il}E_{kj}
\end{aligned} \tag{48}$$

Q.E.D.

3.4. Állítás. *A* (15) *formulával definiált G leképezés második deriváltja az alábbi.*

$$d^2\, G(E_{pq})(E_{ij})(E_{kl}) = \{c_{pqj;l}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + c_{ij;lq}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + c_{k;lqj}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}\}_{(pq)(ij)} \tag{49}$$

Bizonyítás.

A mátrixegységek és a D operátor diagonális alakját a (19) formulába beírva a következő számolás után kapjuk az állítást.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2\, G(E_{pq})(E_{ij})(E_{kl}) = \\
&= \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{E_{aa}E_{pq}E_{bb}E_{ij}E_{cc}E_{kl}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{E_{aa}E_{ij}E_{bb}E_{kl}E_{cc}E_{pq}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{E_{aa}E_{kl}E_{bb}E_{pq}E_{cc}E_{ij}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} =
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1} \oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{\delta_{ap}\delta_{qb}\delta_{bi}\delta_{jc}\delta_{ck}\delta_{ld}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1} \oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{\delta_{ai}\delta_{jb}\delta_{bk}\delta_{lc}\delta_{cp}\delta_{qd}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1} \oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c,d=1}^{n} \frac{\delta_{ak}\delta_{lb}\delta_{bp}\delta_{qc}\delta_{ci}\delta_{jd}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\eta-\lambda_d)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \right\}_{(pq),(ij)} =$$

$$= \{c_{pqj;l}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + c_{ij;lq}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + c_{k;lqj}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}\}_{(pq),(ij)} \tag{50}$$

Q.E.D.

3.2. Christoffel-szimbólumok

3.5. Állítás. *A Christoffel-szimbólum* (23) *kifejezésében szereplő* (24) *formulával adott (2,1)-típusú tenzormező alakja a következő.*

$$\Lambda(E_{ij}, E_{kl}) = c_{il;j}\delta_{jk}E_{il} \tag{51}$$

Bizonyítás.

A (24) formulába behelyettesítve az alábbi számolás a kívánt eredményt adja.

$$\begin{aligned}\Lambda(E_{ij}, E_{kl}) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1} \oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c=1}^{n} \frac{E_{aa}E_{ij}E_{bb}E_{kl}E_{cc}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\gamma_1} \oint\limits_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \sum_{a,b,c=1}^{n} \frac{\delta_{ai}\delta_{jb}\delta_{bk}\delta_{lc}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = c_{il;j}\delta_{jk}E_{il}\end{aligned} \tag{52}$$

Q.E.D.

3.6. Állítás. *A $D \mapsto \Lambda(D)$ leképezés deriváltjának a mátrixegységeken való hatását az alábbi formula adja meg.*

$$d\,\Lambda(E_{ij})(E_{kl}, E_{pq}) = c_{ijq;l}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + c_{kq;lj}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + c_{kqj;l}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} \tag{53}$$

Bizonyítás.

A $D \mapsto \Lambda(D)$ leképezés deriváltjának globális alakjára nyert formulába behelyettesítve a következő számolás után nyerjük a kívánt összefüggést.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{kl},E_{pq}) = & \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{E_{aa}E_{ij}E_{bb}E_{kl}E_{cc}E_{pq}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{E_{aa}E_{kl}E_{bb}E_{ij}E_{cc}E_{pq}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{E_{aa}E_{kl}E_{bb}E_{pq}E_{cc}E_{ij}E_{dd}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\\
& = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{\delta_{ai}\delta_{jb}\delta_{bk}\delta_{lc}\delta_{cp}\delta_{qd}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\xi-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{\delta_{ak}\delta_{lb}\delta_{bi}\delta_{jc}\delta_{cp}\delta_{qd}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\eta-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta)\sum_{a,b,c,d=1}^{n}\frac{\delta_{ak}\delta_{lb}\delta_{bp}\delta_{qc}\delta_{ci}\delta_{jd}E_{ad}}{(\xi-\lambda_a)(\eta-\lambda_b)(\xi-\lambda_c)(\xi-\lambda_d)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\\
& = c_{ijq;l}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq}+c_{kq;lj}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq}+c_{kqj;l}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Q.E.D.

3.7. Állítás. *Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság Christoffel-szimbólumaira az alábbi összefüggés érvényes.*

$$
\Gamma(E_{kl},E_{pq}) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{kq}E_{pl}+\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{pl}E_{kq}\right) \tag{55}
$$

Bizonyítás.

A G leképezés deriváltjának és a Λ tenzormezőnek a lokális alakját a Christoffel-szimbólumra nyert (23) kifejezésbe helyettesítve az alábbi rövid számolás után kapjuk a bizonyítandó formulát.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(E_{kl},E_{pq}) &= \frac{1}{2}G^{-1}\left(\{\mathrm{d}\,G(E_{kl})(E_{pq})-\Lambda(E_{kl},E_{pq})\}_{(kl),(pq)}\right)=\\
&= \frac{1}{2}G^{-1}\left(\{c_{p;ql}\delta_{kq}E_{pl}+(c_{kl;q}-c_{kq;l})\delta_{pl}E_{kq}\}_{(kl),(pq)}\right)=\\
&= \frac{1}{2}G^{-1}\left((c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q})\delta_{kq}E_{pl}+(c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l})\delta_{pl}E_{kq}\right)=\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{kq}E_{pl}+\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{pl}E_{kq}\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Q.E.D.

3.3. A Riemann-féle görbületi tenzor

Ebben a pontban arra vállalkozunk, hogy az eddig nyert lokális alakokat felhasználva előállítjuk az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság görbületi tenzorát. A görbületi tenzorra az alábbi kifejezést kapjuk.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}(E_{ij}, E_{kl}, E_{pq}) = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{c_{ij;lq} + c_{iq;jl} - \big(c_{i;jql} + c_{ijq;l}\big)}{c_{i;q}} - \frac{c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{ij;q} + c_{iq;j} - c_{i;jq}}{c_{i;q}}\right)\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \\
&+ \left(\frac{c_{k;lqj} + c_{klj;q} - \big(c_{klq;j} + c_{kqj;l}\big)}{c_{k;j}} - \left(\frac{c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{k;qj} + c_{kj;q} - c_{kq;j}}{c_{k;j}} - \right.\right. \\
&- \left.\left.\frac{c_{p;qj} + c_{pq;j} - c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{l;kj} + c_{kl;j} - c_{k;lj}}{c_{k;j}}\right)\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \\
&+ \left(\frac{c_{pq;lj} + c_{pj;ql} - \big(c_{pql;j} + c_{plj;q}\big)}{c_{p;j}} - \frac{c_{p;ql} + c_{pq;l} - c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;jl} + c_{pj;l} - c_{pl;j}}{c_{p;j}}\right)\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\Bigg]_{(ik)(jl)}
\end{aligned} \tag{57}$$

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság Riemann-tenzorának globális alakjára nyert (32) formulából leolvasható, hogy a Riemann-tenzor

$$\mathfrak{R}(E_{ij}, E_{kl}, E_{pq}) = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B} - \mathcal{C} - \mathcal{D}}{2} \tag{58}$$

alakban írható fel, ahol az kifejezésben szereplő tagok alakja a következő.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= G^{-1}(\mathrm{d}^2\, G(E_{ij})(E_{pq})(E_{kl}) - \mathrm{d}^2\, G(E_{kl})(E_{pq})(E_{ij})) \\
\mathcal{B} &= G^{-1}\left[\mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{kl}, E_{pq}) + \mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{pq}, E_{kl})\right]_{E_{ij},E_{kl}} \\
\mathcal{C} &= G^{-1}\left[\Lambda(E_{ij}, \Gamma(E_{kl}, E_{pq})) + \Lambda(\Gamma(E_{kl}, E_{pq}), E_{ij})\right]_{E_{ij},E_{kl}} \\
\mathcal{D} &= G^{-1}\left[\mathrm{d}\, G(E_{ij})(\Gamma(E_{kl}, E_{pq})) - \mathrm{d}\, G(\Gamma(E_{kl}, E_{pq}))(E_{ij})\right]_{E_{ij},E_{kl}}
\end{aligned} \tag{59}$$

Ahhoz, hogy a $\mathfrak{R}$ Riemann-tenzort megkapjuk az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mennyiségek lokális alakjait külön-külön kiszámítjuk.

3.8. Állítás. *A (58) felbontásban szereplő $\mathcal{A}$ mennyiség lokális alakja a következő.*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = &\frac{c_{ij;lq} - c_{i;jlq}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{k;ljq} - c_{kl;jq}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \\ + &\frac{c_{k;lqj} - c_{klq;j}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \frac{c_{ijq;l} - c_{i;jql}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \\ + &\frac{c_{pqj;l} - c_{pq;jl}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{pq;lj} - c_{pql;j}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\end{aligned} \tag{60}$$

Bizonyítás.

A G leképezés inverzének és második deriváltjának lokális alakjára nyert (46) és (49) formulákba behelyettesítve a következőket kapjuk.

$$\begin{aligned}&\oplus \quad G^{-1}(\mathrm{d}^2\, G(E_{ij})(E_{pq})(E_{kl})) = \left\{\frac{c_{pqj;l}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{ij;lq}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{k;lqj}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}\right\}_{(pq)(ij)} \\ &\ominus \quad G^{-1}(\mathrm{d}^2\, G(E_{kl})(E_{pq})(E_{ij})) = \left\{\frac{c_{pql;j}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj} + \frac{c_{kl;jq}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \frac{c_{i;jql}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il}\right\}_{(pq)(kl)}\end{aligned} \tag{61}$$

Ebből pedig $\mathcal{A}$ kívánt alakja azonnal adódik.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= G^{-1}(\mathrm{d}^2\, G(E_{ij})(E_{pq})(E_{kl}) - \mathrm{d}^2\, G(E_{kl})(E_{pq})(E_{ij})) = \\ &= \frac{c_{ij;lq} - c_{i;jlq}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{k;ljq} - c_{kl;jq}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \\ &+ \frac{c_{k;lqj} - c_{klq;j}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \frac{c_{ijq;l} - c_{i;jql}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \\ &+ \frac{c_{pqj;l} - c_{pq;jl}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{pq;lj} - c_{pql;j}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\end{aligned} \tag{62}$$

Q.E.D.

3.9. Állítás. *A (58) felbontásban szereplő $\mathcal{B}$ mennyiség lokális alakja a következő.*

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = &\frac{c_{ijq;l} - c_{iq;jl}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{kq;lj} - c_{klq;j}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \\ + &\frac{c_{kqj;l} - c_{klj;q}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \frac{c_{ijl;q} - c_{iql;j}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \\ + &\frac{c_{pl;qj} - c_{pjl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{plj;q} - c_{pj;ql}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\end{aligned} \tag{63}$$

Bizonyítás.

A G leképezés inverzének (46) formulával adott lokális alakját, valamint a Λ tenzormező (51) lokális alakját felhasználva kapjuk, a következőket.

$$
\begin{aligned}
\oplus \quad G^{-1}(\mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{kl}, E_{pq})) &= \frac{c_{ijq;l}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{kq;lj}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \frac{c_{kqj;l}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} \\
\ominus \quad G^{-1}(\mathrm{d}\,\Lambda(E_{kl})(E_{ij}, E_{pq})) &= \frac{c_{klq;j}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \frac{c_{iq;jl}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{iql;j}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} \\
\oplus \quad G^{-1}(\mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{pq}, E_{kl})) &= \frac{c_{ijl;q}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \frac{c_{pl;qj}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{plj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj} \\
\ominus \quad G^{-1}(\mathrm{d}\,\Lambda(E_{kl})(E_{pq}, E_{ij})) &= \frac{c_{klj;q}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \frac{c_{pj;ql}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj} + \frac{c_{pjl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}
\end{aligned} \tag{64}
$$

A kapott kifejezéseket a $\mathcal{B}$ mennyiséget definiáló formulába beírva kapjuk a kívánt alakot.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= G^{-1}\left[\mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{kl}, E_{pq}) + \mathrm{d}\,\Lambda(E_{ij})(E_{pq}, E_{kl})\right]_{E_{ij}, E_{kl}} = \\
&= \frac{c_{ijq;l} - c_{iq;jl}}{c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{kq;lj} - c_{klq;j}}{c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq} + \\
&+ \frac{c_{kqj;l} - c_{klj;q}}{c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \frac{c_{ijl;q} - c_{iql;j}}{c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \\
&+ \frac{c_{pl;qj} - c_{pjl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{plj;q} - c_{pj;ql}}{c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}
\end{aligned} \tag{65}
$$

Q.E.D.

3.10. Állítás. *A* (58) *felbontásban szereplő* $\mathcal{C}$ *mennyiség lokális alakja a következő.*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} = {}& \frac{c_{iq;j}(c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l})}{2c_{k;q}c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} - \frac{c_{kq;l}(c_{i;jq} + c_{ij;q} - c_{iq;j})}{2c_{i;q}c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{lp}E_{kq} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{c_{kj;q}}{c_{k;q}}\frac{c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l}}{c_{k;j}} - \frac{c_{kj;l}}{c_{p;j}}\frac{c_{p;qj} + c_{pq;j} - c_{pj;q}}{c_{k;j}}\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{c_{il;j}}{c_{p;l}}\frac{c_{p;ql} + c_{pq;l} - c_{pl;q}}{c_{i;l}} - \frac{c_{il;q}}{c_{i;q}}\frac{c_{i;jq} + c_{ij;q} - c_{i;qj}}{c_{i;l}}\right)\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} - \\
&- \frac{c_{pl;j}(c_{p;qj} + c_{pq;j} - c_{pj;q})}{2c_{p;l}c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl} + \frac{c_{pj;l}(c_{p;ql} + c_{pq;l} - c_{pl;q})}{2c_{p;l}c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}
\end{aligned} \tag{66}
$$

Bizonyítás.

A (46), (51) és (55) formulákból kiindulva az számolással kapjuk a fenti formulát.

$$
\begin{aligned}
\oplus \quad G^{-1}(\Lambda(E_{ij}, \Gamma(E_{kl}, E_{pq}))) &= \frac{c_{ij;l}(c_{p;ql} + c_{pq;l} - c_{pl;q})}{2c_{p;l}c_{i;l}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il} + \\
&+ \frac{c_{iq;j}(c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l})}{2c_{k;q}c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq} \\
\ominus \quad G^{-1}(\Lambda(E_{kl}, \Gamma(E_{ij}, E_{pq}))) &= \frac{c_{kj;l}(c_{p;qj} + c_{pq;j} - c_{pj;q})}{2c_{p;j}c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} + \\
&+ \frac{c_{kq;l}(c_{i;jq} + c_{ij;q} - c_{iq;j})}{2c_{i;q}c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{jp}E_{kq}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\oplus \quad G^{-1}(\Lambda(\Gamma(E_{kl},E_{pq}),E_{ij})) &= \frac{c_{pj;l}(c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q})}{2c_{p;l}c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}+ \\
&+\frac{c_{kj;q}(c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l})}{2c_{k;q}c_{k;j}}\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj} \\
\ominus \quad G^{-1}(\Lambda(\Gamma(E_{ij},E_{pq}),E_{ij})) &= \frac{c_{pl;j}(c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q})}{2c_{p;j}c_{p;l}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+ \\
&+\frac{c_{il;q}(c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{i;jq})}{2c_{i;q}c_{i;q}}\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il}
\end{aligned} \tag{67}$$

(68)

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= G^{-1}\left[\Lambda(E_{ij},\Gamma(E_{kl},E_{pq}))+\Lambda(\Gamma(E_{kl},E_{pq}),E_{ij})\right]_{E_{ij},E_{kl}} = \\
&= \frac{c_{iq;j}(c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l})}{2c_{k;q}c_{i;q}}\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq}-\frac{c_{kq;l}(c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j})}{2c_{i;q}c_{k;q}}\delta_{li}\delta_{lp}E_{kq}+ \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{kj;q}}{c_{k;q}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;j}}-\frac{c_{kj;l}}{c_{p;j}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{k;j}}\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}+ \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{il;j}}{c_{p;l}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{i;l}}-\frac{c_{il;q}}{c_{i;q}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{i;qj}}{c_{i;l}}\right)\delta_{jp}\delta_{qk}E_{il}- \\
&-\frac{c_{pl;j}(c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q})}{2c_{p;l}c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+\frac{c_{pj;l}(c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q})}{2c_{p;l}c_{p;j}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}
\end{aligned} \tag{69}$$

Q.E.D.

3.11. Állítás. *A* (58) *felbontásban szereplő $\mathcal{D}$ mennyiség lokális alakja a következő.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \frac{c_{ij;q}-c_{i;jq}}{2c_{i;q}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{kj}\delta_{lp}E_{iq}+\frac{c_{k;lq}-c_{kl;q}}{2c_{k;q}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}+ \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{k;qj}-c_{kq;j}}{c_{k;j}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}+\frac{c_{k;lj}-c_{kl;j}}{c_{k;j}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\right)\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}+ \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{ij;l}-c_{i;jl}}{c_{i;l}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}+\frac{c_{iq;l}-c_{i;ql}}{c_{i;l}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\right)\delta_{pj}\delta_{kq}E_{il}+ \\
&+\frac{c_{pj;l}-c_{p;jl}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+\frac{c_{p;lj}-c_{pl;j}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}
\end{aligned} \tag{70}$$

Bizonyítás.

A G leképezés inverzének valamint deriváltjának lokális alakjára nyert (46) és (47) formulákat, továbbá a Christoffel-szimbólumok lokális alakját (55) felhasználva a következőket kapjuk.

$$\oplus \quad G^{-1}(\mathrm{d}\,G(E_{ij})(\Gamma(E_{kl},E_{pq}))) = \frac{c_{ij;l}}{2c_{i;l}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{jp}E_{il}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{c_{p;lj}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}+\\
&+\frac{c_{ij;q}}{2c_{i;q}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{kj}\delta_{lp}E_{iq}+\\
&+\frac{c_{k;qj}}{2c_{k;j}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{pl}\delta_{iq}E_{kj}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ominus\quad G^{-1}(\mathrm{d}\,G(E_{kl})(\Gamma(E_{ij},E_{pq}))) = &\frac{c_{kl;j}}{2c_{k;j}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{lp}E_{kj}+ \qquad (71)\\
&+\frac{c_{p;jl}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+\\
&+\frac{c_{kl;q}}{2c_{k;q}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{il}\delta_{jp}E_{kq}+\\
&+\frac{c_{i;ql}}{2c_{i;l}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{pj}\delta_{kq}E_{il} \qquad (72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oplus\quad G^{-1}(\Gamma(E_{ij},E_{pq}))(\mathrm{d}\,G(E_{kl})) = &\frac{c_{pj;l}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+\\
&+\frac{c_{k;lj}}{2c_{k;j}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{pl}E_{kj}+\\
&+\frac{c_{iq;l}}{2c_{i;l}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{pj}\delta_{kq}E_{il}+\\
&+\frac{c_{k;lq}}{2c_{k;q}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}
\end{aligned}
$$

(73)

$$
\begin{aligned}
\ominus\quad G^{-1}(\Gamma(E_{kl},E_{pq}))(\mathrm{d}\,G(E_{ij})) = &\frac{c_{pl;j}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}+\\
&+\frac{c_{i;jl}}{2c_{i;l}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{pj}E_{il}+\\
&+\frac{c_{kq;j}}{2c_{k;j}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{pl}\delta_{iq}E_{kj}+\\
&+\frac{c_{i;jq}}{2c_{i;q}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{pl}\delta_{jk}E_{iq}
\end{aligned}
$$

A kapott kifejezéseket a $\mathcal{D}$ definíciójába beírva kapjuk az alábbiakat.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} = &G^{-1}\left[\mathrm{d}\,G(E_{ij})(\Gamma(E_{kl},E_{pq})) - \mathrm{d}\,G(\Gamma(E_{kl},E_{pq}))(E_{ij})\right]_{E_{ij},E_{kl}} =\\
= &\frac{c_{ij;q}-c_{i;jq}}{2c_{i;q}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}}\delta_{kj}\delta_{lp}E_{iq} + \frac{c_{k;lq}-c_{kl;q}}{2c_{k;q}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}+\\
+ &\frac{1}{2}\left(\frac{c_{k;qj}-c_{kq;j}}{c_{k;j}}\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{c_{k;q}} + \frac{c_{k;lj}-c_{kl;j}}{c_{k;j}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\right)\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}+\\
+ &\frac{1}{2}\left(\frac{c_{ij;l}-c_{i;jl}}{c_{i;l}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}} + \frac{c_{iq;l}-c_{i;ql}}{c_{i;l}}\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{c_{i;q}}\right)\delta_{pj}\delta_{kq}E_{il}+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{c_{pj;l}-c_{p;jl}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{c_{p;j}}\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}+\frac{c_{p;lj}-c_{pl;j}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{c_{p;l}}\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj} \tag{74}$$

Q.E.D.

Szedjük össze az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ mennyiségekre az imént nyert lokális alakokat és írjuk be a Riemann-tenzor (58) felbontásába. Némi számolás után megkapjuk az alfejezet elején prezentált alakját a Riemann görbületnek.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}(E_{ij},E_{kl},E_{pq})=\frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}-\mathcal{C}-\mathcal{D}}{2}=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{ij;lq}+c_{iq;jl}-(c_{i;jql}+c_{ijq;l})}{c_{i;q}}-\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{ij;q}+c_{iq;j}-c_{i;jq}}{c_{i;q}}\right)\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq}-\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{c_{kl;jq}+c_{kq;lj}-(c_{k;ljq}+c_{klq;j})}{c_{k;q}}-\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{2c_{i;q}}\frac{c_{kl;q}+c_{kq;l}-c_{k;lq}}{c_{k;q}}\right)\delta_{pj}\delta_{li}E_{kq}+\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{k;lqj}+c_{klj;q}-(c_{klq;j}+c_{kqj;l})}{c_{k;j}}-\left(\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{k;jq}+c_{kj;q}-c_{kq;j}}{c_{k;j}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{l;kj}+c_{kl;j}-c_{k;lj}}{c_{k;j}}\right)\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}-\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{c_{i;jql}+c_{ijl;q}-(c_{ijq;l}+c_{iql;j})}{c_{k;j}}-\left(\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{2c_{i;q}}\frac{c_{i;lq}+c_{il;q}-c_{iq;l}}{c_{i;l}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{l;ij}+c_{li;j}-c_{jl;i}}{c_{i;l}}\right)\right)\delta_{pj}\delta_{kq}E_{il}+\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{pq;lj}+c_{pj;ql}-(c_{pql;j}+c_{plj;q})}{c_{p;j}}-\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;jl}+c_{pj;l}-c_{pl;j}}{c_{p;j}}\right)\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}-\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{c_{pq;lj}+c_{pl;qj}-(c_{pqj;l}+c_{pjl;q})}{c_{p;l}}-\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;lj}+c_{pl;j}-c_{pj;l}}{c_{p;l}}\right)\delta_{qi}\delta_{jk}E_{pl}=\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_{ij;lq}+c_{iq;jl}-(c_{i;jql}+c_{ijq;l})}{c_{i;q}}-\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{ij;q}+c_{iq;j}-c_{i;jq}}{c_{i;q}}\right)\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq}+\right.\\
&+\left(\frac{c_{k;lqj}+c_{klj;q}-(c_{klq;j}+c_{kqj;l})}{c_{k;j}}-\left(\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{k;qj}+c_{kj;q}-c_{kq;j}}{c_{k;j}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{l;kj}+c_{kl;j}-c_{k;lj}}{c_{k;j}}\right)\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}+\\
&\left.+\left(\frac{c_{pq;lj}+c_{pj;ql}-(c_{pql;j}+c_{plj;q})}{c_{p;j}}-\frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;jl}+c_{pj;l}-c_{pl;j}}{c_{p;j}}\right)\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\right]_{(ik)(jl)}
\end{aligned} \tag{75}$$

Mint ahogyan egy kirakós játék elemei összeállnak úgy áll össze a Riemann-tenzor is a fentebb kiszámolt építőkövekből. A számításaink ezen fázisában egy pillanatra gyönyörködhetünk a Riemann-tenzor szimmetriáiban, melyek a nyert lokális alakról is azon nyomban leolvashatók.

3.4. A Ricci-féle görbületi tenzor

A Riemann-féle görbületi tenzorra nyert (75) formulát a Ricci-tenzort definiáló (39) formulába beírva némi számolás után kapjuk a fejezet elején célként megjelölt (43) alakját az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság Ricci-tenzorának.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq}) = \mathrm{Tr}(E_{ij}\mapsto \mathfrak{R}(E_{ij},E_{kl},E_{pq})) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg(\Bigg(\frac{c_{ij;lq}+c_{iq;jl}-(c_{i;jql}+c_{ijq;l})}{c_{i;q}} - \\
&- \frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{ij;q}+c_{iq;j}-c_{i;jq}}{c_{i;q}}\Bigg)\delta_{jk}\delta_{lp}\delta_{jq} - \\
&- \left(\frac{c_{kl;jq}+c_{kq;lj}-(c_{k;ljq}+c_{klq;j})}{c_{k;q}} - \frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{2c_{i;q}}\frac{c_{kl;q}+c_{kq;l}-c_{k;lq}}{c_{k;q}}\right)\delta_{pj}\delta_{li}\delta_{ki}\delta_{qj} + \\
&+ \Bigg(\frac{c_{k;lqj}+c_{klj;q}-(c_{klq;j}+c_{kqj;l})}{c_{k;j}} - \Bigg(\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{k;qj}+c_{kj;q}-c_{kq;j}}{c_{k;j}} - \\
&- \frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{l;kj}+c_{kl;j}-c_{k;lj}}{c_{k;j}}\Bigg)\Bigg)\delta_{lp}\delta_{qi}\delta_{ki} - \\
&- \Bigg(\frac{c_{i;jql}+c_{ijl;q}-(c_{ijq;l}+c_{iql;j})}{c_{k;j}} - \Bigg(\frac{c_{i;jq}+c_{ij;q}-c_{iq;j}}{2c_{i;q}}\frac{c_{i;lq}+c_{il;q}-c_{iq;l}}{c_{i;l}} - \\
&- \frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{l;ij}+c_{li;j}-c_{jl;i}}{c_{i;l}}\Bigg)\Bigg)\delta_{pj}\delta_{kq}\delta_{lj} + \\
&+ \left(\frac{c_{pq;lj}+c_{pj;ql}-(c_{pql;j}+c_{plj;q})}{c_{p;j}} - \frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;jl}+c_{pj;l}-c_{pl;j}}{c_{p;j}}\right)\delta_{qk}\delta_{li}\delta_{pi} - \\
&- \Bigg(\frac{c_{pq;lj}+c_{pl;qj}-(c_{pqj;l}+c_{pjl;q})}{c_{p;l}} - \\
&- \frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{p;lj}+c_{pl;j}-c_{pj;l}}{c_{p;l}}\Bigg)\delta_{qi}\delta_{jk}\delta_{pi}\delta_{lj}\Bigg) = \\
&= \left(\frac{c_{k;kpp}+c_{kkp;p}-(c_{kk;pp}+c_{kp;kp})}{c_{k;p}} + \frac{c_{k;pp}c_{kk;p}}{2c_{k;p}^2}\right)\delta_{kl}\delta_{pq} + \\
&+ \sum_{s=1}^{n}\Bigg\{\frac{c_{sk;lk}-c_{s;klk}-c_{skk;l}+c_{k;lks}}{c_{k;s}} + \frac{(c_{l;sk}+c_{lk;s}-c_{ls;k})^2}{4c_{k;s}c_{l;s}} - \\
&- \frac{2c_{sk;k}-c_{s;kk}}{c_{s;k}}\frac{2c_{kl;k}-c_{kk;l}}{2c_{k;k}}\Bigg\}_{k,l}\delta_{lp}\delta_{kq}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

A Ricci-tenzor konkrét alakjának vizsgálatát egyszerűsítendő vezessük be a következő jelöléseket.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{kp} &:= \frac{c_{k;kpp}+c_{kkp;p}-(c_{kk;pp}+c_{kp;kp})}{c_{k;p}}+\frac{c_{k;pp}c_{kk;p}}{2c_{k;p}^2}\\ \mathcal{S}_{kls} &:= \left\{\frac{c_{sk;lk}-c_{s;klk}-c_{skk;l}+c_{k;lks}}{c_{k;s}}+\frac{(c_{l;sk}+c_{lk;s}-c_{ls;k})^2}{4c_{k;s}c_{l;s}}-\right.\\ &\left.-\frac{2c_{sk;k}-c_{s;kk}}{c_{s;k}}\frac{2c_{kl;k}-c_{kk;l}}{2c_{k;k}}\right\}_{k,l}\end{aligned} \tag{77}$$

Ezzekkel a jelölésekkel a Ricci-tenzor

$$\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq})=\mathcal{R}_{kp}\delta_{kl}\delta_{pq}+\sum_{s=1}^{n}\mathcal{S}_{kls}\delta_{lp}\delta_{kq} \tag{78}$$

alakban írható fel.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen értéket vesz fel a Ricci-tenzor az $\mathcal{M}_{n,sa}$ teret térképező, 2.1 definíció előtt bevezetett H_{kl} $(1\le k<l\le n)$ és F_{kl} $(1\le k\le l\le n)$ mátrixokon. Emlékeztetünk, hogy a F_{kl} és H_{kl} mátrixok definíciója

$$\begin{aligned}F_{kl}&=E_{kl}+E_{lk}\\ H_{kl}&=-i(E_{kl}-E_{lk}),\end{aligned}$$

ahol E_{kl} és E_{pq} a szokásos mátrix egységek.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Ric}(F_{kl},F_{pq})&=\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq})+\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{qp})+\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{pq})+\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{qp})\\ \mathfrak{Ric}(H_{kl},H_{pq})&=-\left(\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq})-\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{qp})-\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{pq})+\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{qp})\right)\\ \mathfrak{Ric}(F_{kl},H_{pq})&=-i\left(\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq})-\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{qp})+\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{pq})-\mathfrak{Ric}(E_{lk},E_{qp})\right)\end{aligned} \tag{79}$$

Figyelembe véve a (78) formulát a következőt kapjuk.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Ric}(F_{kl},F_{pq})&=4\mathcal{R}_{kp}\delta_{kl}\delta_{pq}+2(1+\delta_{kl})\sum_{s=1}^{n}\mathcal{S}_{kls}\delta_{kp}\delta_{lq}\\ \mathfrak{Ric}(H_{kl},H_{pq})&=2\sum_{s=1}^{n}\mathcal{S}_{kls}\delta_{kp}\delta_{lq}\\ \mathfrak{Ric}(F_{kl},H_{pq})&=0\end{aligned} \tag{80}$$

3.1. Megjegyzés. *Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon adott g metrikára a következő érvényes.*

$$\begin{aligned}g(F_{kl},F_{pq})&=2(1+\delta_{kl})c_{k;l}\delta_{kp}\delta_{lq}\\ g(H_{kl},H_{pq})&=2c_{k;l}\delta_{kp}\delta_{lq}\\ g(F_{kl},H_{pq})&=0\end{aligned} \tag{81}$$

A Ricci-tenzor (77) összetevőit Wolfram *Mathematica* segítségével számítottuk ki. A következőket kaptuk.

$$\mathcal{R}_{kk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)^2}\right)^2 + \frac{\partial_{11}^2 c(\lambda_k,\lambda_k) - 2\partial_{12}^2 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)}$$

$$\mathcal{R}_{kp} = \frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_p)\partial_2 c(\lambda_k,\lambda_p)}{2c(\lambda_k,\lambda_p)^2} + \frac{\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_p)}{c(\lambda_k,\lambda_p)} - \frac{\partial_2 c(\lambda_k,\lambda_p)}{c(\lambda_k,\lambda_p)}}{\lambda_k - \lambda_p} - \frac{\partial_{12}^2 c(\lambda_k,\lambda_p)}{c(\lambda_k,\lambda_p)} \tag{82}$$

$$\mathcal{S}_{kkk} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)^2}\right)^2 - \frac{\partial_{11}^2 c(\lambda_k,\lambda_k) - 2\partial_{12}^2 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)}$$

$$\mathcal{S}_{kks} = \frac{1}{2c(\lambda_k,\lambda_s)^2}\left[\frac{c(\lambda_k,\lambda_k) - c(\lambda_k,\lambda_s)}{\lambda_k - \lambda_s} - (\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k) - \partial_1 c(\lambda_k,\lambda_s))\right]^2 +$$
$$+ 2\cdot\frac{\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)} - \frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_s)}{c(\lambda_k,\lambda_s)}}{\lambda_k - \lambda_s} + \frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k)}{c(\lambda_k,\lambda_k)}\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_s)}{c(\lambda_k,\lambda_s)} - \frac{\partial_{11}^2 c(\lambda_k,\lambda_s)}{c(\lambda_k,\lambda_s)}$$

$$\mathcal{S}_{klk} = \mathcal{S}_{lkk} = \frac{\partial_2 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)^2}{4c\left(\lambda_l,\lambda_l\right)c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)} + \frac{\partial_1 c\left(\lambda_l,\lambda_l\right)\partial_2 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)}{2c\left(\lambda_l,\lambda_l\right)^2} + \frac{\partial_1 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)^2}{4c\left(\lambda_k,\lambda_k\right)c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)} -$$
$$- \frac{\partial_{22}^2 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)}{2c\left(\lambda_l,\lambda_l\right)} + \frac{\partial_1 c\left(\lambda_k,\lambda_k\right)\partial_1 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)}{2c\left(\lambda_k,\lambda_k\right)^2} - \frac{\partial_{11}^2 c\left(\lambda_k,\lambda_l\right)}{2c\left(\lambda_k,\lambda_k\right)} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_k,\lambda_k)} - \frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_l,\lambda_l)} + \frac{\partial_1 c(\lambda_l,\lambda_l)c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_l,\lambda_l)^2} - \frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_k)c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_k,\lambda_k)^2}}{\lambda_l - \lambda_k}$$

$$\mathcal{S}_{kls} = \frac{\frac{c(\lambda_k,\lambda_l)-c(\lambda_l,\lambda_s)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)} + \frac{c(\lambda_k,\lambda_l)^2-c(\lambda_l,\lambda_s)^2}{4c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)}}{(\lambda_k-\lambda_s)^2} + \frac{\frac{c(\lambda_k,\lambda_l)-c(\lambda_k,\lambda_s)}{2c(\lambda_l,\lambda_s)} + \frac{c(\lambda_k,\lambda_l)^2-c(\lambda_k,\lambda_s)^2}{4c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)}}{(\lambda_l-\lambda_s)^2} +$$
$$+ \frac{1}{(\lambda_k-\lambda_l)^2}\left(1 + \frac{c(\lambda_k,\lambda_k) - c(\lambda_l,\lambda_l) - c(\lambda_l,\lambda_s)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)} + \right.$$
$$+ \frac{c(\lambda_l,\lambda_l) - c(\lambda_k,\lambda_s) - c(\lambda_k,\lambda_k)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)} + \frac{(c(\lambda_k,\lambda_k) - c(\lambda_l,\lambda_l) - c(\lambda_k,\lambda_l))^2}{4c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)} -$$
$$\left. - \frac{c(\lambda_k,\lambda_k)c(\lambda_l,\lambda_l)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(\lambda_k-\lambda_l)(\lambda_k-\lambda_s)}\left(\frac{1}{2} - \frac{2c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_k,\lambda_k)} + \frac{c(\lambda_k,\lambda_k) + 3c(\lambda_l,\lambda_s)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)} + \frac{3c(\lambda_k,\lambda_l)}{2c(\lambda_l,\lambda_s)} + \right.$$
$$\left. + \frac{c(\lambda_k,\lambda_l)^2 - c(\lambda_k,\lambda_k)c(\lambda_k,\lambda_l)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)}\right) - \frac{1}{(\lambda_l-\lambda_s)(\lambda_k-\lambda_l)}\left(\frac{1}{2} - \frac{2c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_l,\lambda_l)} + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{c(\lambda_l,\lambda_l)+3c(\lambda_k,\lambda_s)}{2c(\lambda_l,\lambda_s)}+\frac{3c(\lambda_k,\lambda_l)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)}+\frac{c(\lambda_l,\lambda_l)^2-c(\lambda_k,\lambda_l)c(\lambda_l,\lambda_l)}{2c(\lambda_k,\lambda_s)c(\lambda_l,\lambda_s)}\Bigg)+\\
&+\frac{2}{(\lambda_l-\lambda_s)(\lambda_k-\lambda_s)}-\frac{\partial_2 c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_l,\lambda_l)(\lambda_l-\lambda_s)}-\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_l)}{c(\lambda_k,\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_s)}+\\
&+\frac{c(\lambda_k,\lambda_l)\partial_1 c(\lambda_l,\lambda_s)}{c(\lambda_l,\lambda_l)c(\lambda_l,\lambda_s)(\lambda_k-\lambda_l)}-\frac{c(\lambda_k,\lambda_l)\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_s)}{c(\lambda_k,\lambda_k)c(\lambda_k,\lambda_s)(\lambda_k-\lambda_l)}-\\
&-\frac{\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_l)\partial_1 c(\lambda_k,\lambda_s)}{2c(\lambda_k,\lambda_k)c(\lambda_k,\lambda_s)}-\frac{\partial_2 c(\lambda_k,\lambda_l)\partial_1 c(\lambda_l,\lambda_s)}{2c(\lambda_l,\lambda_l)c(\lambda_l,\lambda_s)}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

4. Speciális esetek

4.1. A komponensek lokális viselkedése

A Ricci-tenzor összetevőire nyert (82) és (83) kifejezések túlságosan összetettek ahhoz, hogy belőlük információgeometria jelentést szűrjünk ki. Ha a c_f Cenzov–Morozova-függvény (11) definícióját alkalmazzuk, akkor a

$$\mathcal{R}_{kk} = -\frac{3(1+8f''(1))}{8\lambda_k^2} \qquad \mathcal{S}_{kkk} = \frac{3(1+8f''(1))}{8\lambda_k^2} \tag{84}$$

egyszerűbb formulákat nyerünk. Az f függvény behelyettesítése a többi esetben nem okoz lényeges egyszerűsödést. Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathcal{R}$ és $\mathcal{S}$ függvények (λ_k, λ_k) és $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$ pontok körüli lokális viselkedését.

4.1. Lemma. *Az $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény $x_0 = 1$ pont körüli negyedrendű közelítése:*

$$f(x) = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 - \frac{f''(1)}{4}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4 + \mathcal{O}\left((x-1)^5\right) \tag{85}$$

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények első és második deriválja a (8) és (9) egyenleteknek eleget tesz. Az (9) egyenlőség differenciálásával kapjuk a következőt.

$$f'''\left(\frac{1}{x}\right) = -3x^4 f''(x) - x^5 f'''(x) \tag{86}$$

A kapott egyenletbe $x_0 = 1$-et helyettesítve az $f'''(1) = -\frac{3}{2}f''(1)$ egyenlőséghez jutunk. A kapottakat az f függvény $x_0 = 1$ körüli negyedrendű Taylor-polinomába írva kapjuk az f függvény negyedrendű közelítését.

Q.E.D.

4.1. Állítás. *Az $\mathcal{R}$ és $\mathcal{S}$ függvények másodrendben közelíthetők az alábbi formulák segítségével.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{kp} = & -\frac{3\left(8f''(1)+1\right)}{8\lambda_k^2} + \frac{3\left(8f''(1)+1\right)}{8\lambda_k^3}\left(\lambda_p-\lambda_k\right) - \\
& -\frac{80f^{(4)}(1) - 288f''(1)^2 - 120f''(1) + 27}{96\lambda_k^4}\left(\lambda_p-\lambda_k\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\lambda_p-\lambda_k\right)^3\right) \\
\\
\mathcal{S}_{kks} = & \frac{3\left(8f''(1)+1\right)}{8\lambda_k^2} + \frac{2f''(1)-1}{8\lambda_k^3}\left(\lambda_s-\lambda_k\right) + \\
& +\frac{20f^{(4)}(1) - 81f''(1)^2 - 108f''(1)}{24\lambda_k^4}\left(\lambda_s-\lambda_k\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\lambda_s-\lambda_k\right)^3\right) \\
\\
\mathcal{S}_{klk} = & \frac{3\left(8f''(1)+1\right)}{8\lambda_k^2} - \frac{3\left(8f''(1)+1\right)}{8\lambda_k^3}\left(\lambda_l-\lambda_k\right) + \\
& +\frac{80f^{(4)}(1) - 432f''(1)^2 - 138f''(1) + 27}{96\lambda_k^4}\left(\lambda_l-\lambda_k\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\lambda_l-\lambda_k\right)^3\right)
\end{aligned} \tag{87}$$

Bizonyítás.

A (82) és (83) kifejezésekbe a c_f Cenzov–Morozova-függvény (11) definícióját beírva és az $f \in \mathcal{F}_{\text{op}}$ függvényre a 4.1 lemmában leírt közelítést alkalmazva hosszadalmas számolás után kapjuk a fenti formulákat.

Q.E.D.

4.2. Einstein-sokaságok esete

Matematikai szempontból érdekes kérdés, hogy megadható-e olyan kvantum Fisher információ az állapottéren, melyre teljesül, hogy a Ricci-tenzor a metrikus tenzor számszorosa. Ebben a pontban ezt a kérdést járjuk körül.

4.1. Definíció. *Egy (M, g) szemi-Riemann sokaságot* Einstein-sokaságnak *nevezünk, ha megadható olyan $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ függvény, hogy az M sokaság $\mathfrak{Ric}$ szimbólummal jelölt Ricci-tenzorára a*

$$\mathfrak{Ric} = \lambda \cdot g \tag{88}$$

egyenlőség teljesül.

4.1. Tétel. *Ha az (M, g) Einstein-sokaság dimenziója legalább három, akkor a sokaság skalár görbülete ($\mathcal{S}cal$) konstans, valamint a sokaság Ricci-tenzora ($\mathfrak{Ric}$) és metrikus tenzora között a*

$$\mathfrak{Ric} = \frac{\mathcal{S}cal}{Dim(M)} \cdot g \tag{89}$$

egyenlőség áll fenn.

Bizonyítás. A bizonyítás a [26] jegyzet 62. oldalán található meg.

Q.E.D.

4.2. Tétel. *Ha az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaság metrikája egy f szimmetrikus, normált operátormonoton függvényből származik, akkor $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ nem lehet Einstein-sokaság.*

Bizonyítás.

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \lambda_k = \frac{1}{n}$ pontját *legkevertebb állapotnak* hívjuk. Ebben a pontban a Ricci-tenzor komponenseire az előző fejezetben nyert (80) kifejezések a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Ric}(F_{kl}, F_{pq}) &= \frac{3n^2(1 + 8f''(1))}{2} \left(-\delta_{kl}\delta_{pq} + n \cdot \frac{1 + \delta_{kl}}{2} \delta_{kp}\delta_{lq} \right) \\
\mathfrak{Ric}(H_{kl}, H_{pq}) &= \frac{3n^3(1 + 8f''(1))}{4} \delta_{kp}\delta_{lq} \\
\mathfrak{Ric}(F_{kl}, H_{pq}) &= 0
\end{aligned} \tag{90}$$

alakot öltik, a metrika pedig

$$\begin{aligned}
g(F_{kl}, F_{pq}) &= 2n(1 + \delta_{kl})\delta_{kp}\delta_{lq} \\
g(H_{kl}, H_{pq}) &= 2n\delta_{kp}\delta_{lq} \\
g(F_{kl}, H_{pq}) &= 0
\end{aligned} \tag{91}$$

alakban írható fel.

Ha a metrikus tenzor a Ricci-tenzorral arányos lenne, akkor a

$$\begin{aligned}
\frac{3n^2(1 + 8f''(1))}{2} &= 0 \\
\frac{3n^3(1 + 8f''(1))}{4} &= 2n
\end{aligned} \tag{92}$$

egyenlőségeknek kellene teljesülni, ami az $n = 0$ degenerált esettől eltekintve ellentmondásra vezet.

Q.E.D.

4.3. Szimulációk az $\mathcal{M}_{2,sa}$ téren

A 2×2-es önadjungált mátrixok $\mathcal{M}_{2,sa}$-vel jelölt tere a legegyszerűbb nemtriviális eset, amely kvantum-információelméleti jelentéssel is bír. Mint ahogyan azt korábban is tettük, most is feltesszük, hogy a sokaság tekintett pontját reprezentáló mátrix diagonális.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

A korbábbi gyakorlatunkkal ellentétben a $T_D\mathcal{M}_{2,sa}$ érintőtér koordinátázására használjuk a $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\frac{1}{2}F_{11}, \frac{1}{2}F_{22}, \frac{1}{2}F_{12}, \frac{1}{2}H_{12})$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x^4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Az $\mathcal{M}_{2,sa}$ sokaság D állapotbeli Ricci-tenzora

$$\mathfrak{Ric} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{112} & \mathcal{R}_{12} & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_{12} & \mathcal{S}_{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} \end{pmatrix} \tag{93}$$

alakban írható fel.

Három nevezetes metrikára: a legkisebb, a legnagyobb és az ún. Kubo–Mori-metrikára ábrázoljuk a Ricci-tenzor komponenseit a $[0,1]^2$-on. A fent felsorolt metrikákhoz asszociált operátormonoton függvények rendre a következők.

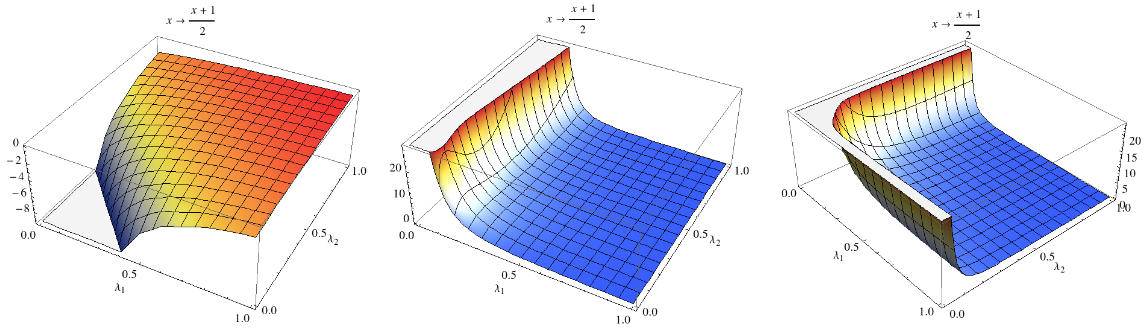
$$f_{min} = \frac{1+x}{2} \quad f_{max} = \frac{2x}{x+1} \quad f_{KM} = \frac{x-1}{\log x}$$

A minimális metrika mellett a tenzorkomponensek alakja a következő.

$$\mathcal{R}_{12} = -\frac{3}{2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2}$$

$$\mathcal{S}_{112} = \frac{9\lambda_1^4 + 48\lambda_2\lambda_1^3 - 10\lambda_2^2\lambda_1^2 + \lambda_2^4}{32\lambda_1^4\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2} \tag{94}$$

$$\frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} = \frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + 3\left(\lambda_1+\lambda_2\right) + 3\right) - 8}{4\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^3}$$



(a) $\mathcal{R}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$ (b) $\mathcal{S}_{112}(\lambda_1, \lambda_2)$ (c) $\frac{\mathcal{S}_{121}(\lambda_1,\lambda_2)+\mathcal{S}_{122}(\lambda_1,\lambda_2)}{2}$

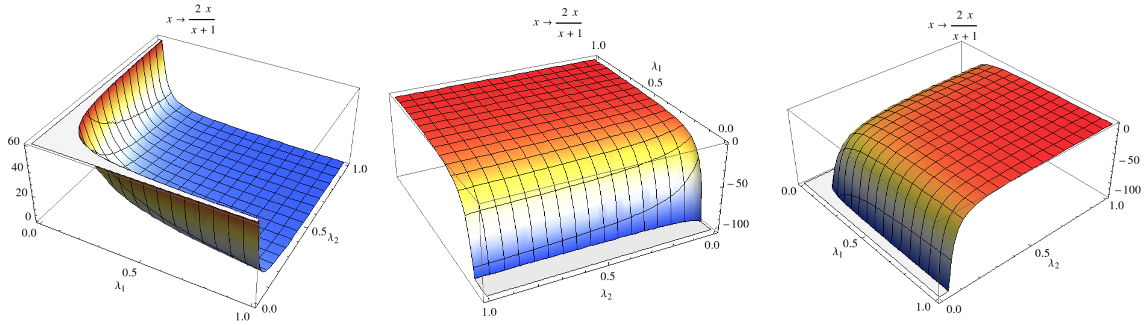
1. ábra. Legkisebb metrika

A maximális metrikára a következőket kapjuk.

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^2} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$\mathcal{S}_{112} = -\frac{\lambda_1^2 + 5\lambda_2\lambda_1 + 3\lambda_2^2}{2\lambda_1^2\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^2} \tag{95}$$

$$\frac{\mathcal{S}_{121} + \mathcal{S}_{212}}{2} = \frac{1}{16}\left(\frac{6 - \frac{5}{\lambda_2}}{\lambda_1} + \frac{6\lambda_2 - 2}{\lambda_2^2} - \frac{8}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{2}{\lambda_1^2}\right)$$



(a) $\mathcal{R}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$ (b) $\mathcal{S}_{112}(\lambda_1, \lambda_2)$ (c) $\frac{\mathcal{S}_{121}(\lambda_1,\lambda_2)+\mathcal{S}_{122}(\lambda_1,\lambda_2)}{2}$

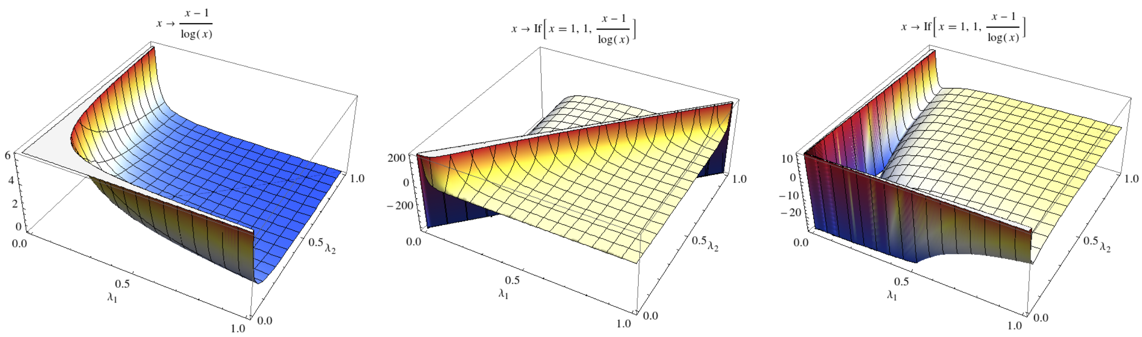
2. ábra. Maximális metrika

A Kubo–Mori-metrika esetére pedig az alábbiak adódnak.

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{\lambda_2\lambda_1\left(3\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+4\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+2\right)}{2\lambda_1\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2\lambda_2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}+ \\ + \frac{\lambda_1^2\left(-\left(\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+1\right)\right)+\lambda_2^2\left(\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)-1\right)}{2\lambda_1\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2\lambda_2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}$$

$$\mathcal{S}_{112} = \frac{\lambda_1^2\left(-11\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+\left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)-2\right)^2-2\left(5\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)+3\right)\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)}{2\lambda_1^2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}+ \\ + \frac{4\lambda_2\lambda_1\left(2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+\left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)+4\right)\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)-2\right)}{2\lambda_1^2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}+ \\ + \frac{2\lambda_2^2\left(2-5\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)}{2\lambda_1^2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2\log^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \tag{96}$$

A $\frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2}$ formula meglehetősen összetett, explicit alakja a (83) képletekből határozható meg.



(a) $\mathcal{R}_{12}(\lambda_1,\lambda_2)$ (b) $\mathcal{S}_{112}(\lambda_1,\lambda_2)$ (c) $\frac{\mathcal{S}_{121}(\lambda_1,\lambda_2)+\mathcal{S}_{122}(\lambda_1,\lambda_2)}{2}$

3. ábra. Kubo–Mori-metrika

5. Kitekintés

Innentől fogva, hogy meghatároztuk az $\mathcal{M}_{n,sa}$ Riemann sokaság Ricci-tenzorát, több kérdést is megvizsgálhatunk. Az első szembetűnő jelenség az, hogy a Ricci-tenzor az $F_{kk} : k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bázis elemeken nem diagonális. Az $\mathcal{R}_{kp}$ elemek alkotta rész leválasztása után egy diagonális mátrix marad vissza, amely szerkezetét tekintve a metrikus tenzor (81) kifejezésére hasonlít. Vizsgálható például, hogy ez a diagonális komponens milyen határozatlansági relációkat származtat az operátormonoton függvény választásától függően. Az $\mathcal{R}_{kp}$ elemek alkotta $n \times n$-es sarok minor egy szimmetrikus mátrix. A metrika pozititása miatt az érintőtér $F_{kk} : k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bázisvektorai helyett bevezethetünk olyan bázisvektorokat, hogy a Ricci-tenzor és az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság metrikus tenzora egyszerre diagonális legyen.

Tanulmányozni kívánjuk az $\mathcal{M}_{n,sa} \times \mathbb{R}$ sokaságon az állapotok időfejlődését is, ahol az időfejlődést az időfüggő Schrödinger-egyenlet írja le.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék ezúttal köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának a BME TTK Analízis Tanszék egyetemi docensének, hogy közreműködésével megismerkedhettem a kvantum információgeometria alapvető módszereivel. Segítséget nyújtott a szakirodalom beszerzésében, igényeimnek megfelelően, folyamatosan ellátott tanácsokkal, útmutatásokkal, lektorálta a dolgozatomat (szakmai és irodalmi szempontból egyaránt). Kérdéseimre mindig örömmel és érthetően válaszolt, és mindig rendelkezésre állt, amikor szükségem volt a segítségére.

Szeretném megköszönni szüleimnek a tanulmányaim végzéséhez nyújtott anyagi és morális támogatást. Külön szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, aki születésemtől fogva példamutatásával a matematika szeretetére nevelt. Nem utolsó sorban pedig páromnak szeretném megköszönni, hogy a dolgozat megírásához szükséges nyugodt légkört a számomra megteremtette.

Hivatkozások

[1] Andai Attila, Információgeometria a kvantummechanikában, doktori értekezés, 2003.

[2] Attila Andai. Uncertainty principle with quantum Fisher information. arXiv:math-ph/0707.1147v1, 2007.

[3] A. Lovas, A. Andai., Geometry behind Robertson type uncertinty principles., arXiv:1311.5069.

[4] D. Petz and Cs. Sudár, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *J. Math. Phys.*, **37**, 2662-2663, 1996.

[5] D. Petz. Geometry of canonical correlation on the state space of quantum system. *J. Math. Phys.* **35**, 780-795 (1994).

[6] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer.

[7] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

[8] E. Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, *Bulgar. J. Phys.* **26**, 193-203, 2000, Translation of *Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect.* **19**, 296-303, 1930.

[9] F. Hiai, D. Petz and G. Toth. Curvature in the geometry of canonical correlation. *Studia Scientiarium Mathematicarum Hungarica* **32**, 235-249 (1996).

[10] H. Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, *Internat. J. Math.* **16**, 629-645, 2005.

[11] Kennard, E. H., Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, *Zeitschrift für Physik* **44**, 326-352, 1927.

[12] K. Yanagi, S. Furuichi and K. Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation. *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4401-4404, 2005.

[13] Kristóf János, Analízis Elemei II., Eötvös Kiadó, 1998.

[14] Kubo, F. and Ando, T., Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246(3)**, 205-224, 1979/80.

[15] Lovas Attila, Gömbök feletti komplex vektornyalábok homotópia- és kohomológia-elméletének összehasonlítása, BSc. szakdolgozat, 2011.

[16] Lovas Attila, Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából, TDK dolgozat, 2012.

[17] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle. arXiv:math-ph/0706.0791v1, 2007.

[18] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. Uncertainty principle and quantum Fisher information II. arXiv:math-ph/0701062v3, 2007.

[19] P.W. Michor, D. Petz, és A. Andai, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(2):199-212, 2000.

[20] R. Bhatia. *Matrix analysis*, volume 169 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[21] Robertson, H. P., An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation, *Phys. Rev.* **46**, 794-801, 1934.

[22] Robertson, H. P., The uncertainty principle, *Phys. Rev.* **34**, 163-164, 1929.

[23] S. Luo and Q. Zhang, Correction to „On skew information". *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4432, 2005.

[24] S. Luo and Q. Zhang, On skew information, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50**, 1778-1782, 2004.

[25] S. Luo and Z. Zhang, An informational characterization of Schrödinger's uncertainty relations. *J. Statist. Phys.* **114**, 1557-1576, 2004.

[26] Szenthe János, *A Riemann geometria elemei*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.

[27] Szenthe János, *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[28] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198, 1927.

[29] W. J. Firey, Some application of mean of convex bodies, *Pacific J. Math.* **14**, 53-60, 1964.