BME Matematika Intézet
Analízis Tanszék

Lovas Attila

Az információgeometria alkalmazása kvantummechanikai rendszerekre

PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Andai Attila
egyetemi docens

2017

1. Bevezetés

A kvantum információgeometria egy viszonylag fiatal tudományterület, mely az 1990-es évek elején a kvantummechanikából – ezen belül is a kvantum információelméletből – és a klasszikus információgeometriából fejlődött ki. Tárgyát tekintve – a klasszikus információgeometriához hasonlóan – a (kvantum) valószínűségi eloszlások terét Riemann-sokaság struktúrával ruházza fel és kapcsolatokat keres a modell differenciálgeometriai jellemzői és a megfigyelhető fizikai mennyiségek (kvantum valószínűségi változók) között. A kvantum információgeometria eredményeit többek között a kvantum információelmélet és a kvantum statisztikus fizika használja fel. Eszköztárát tekintve elmondható, hogy erőteljesen épít a funkcionálanalízis és differenciálgeometria eredményeire. A klasszikus valószínűségszámítással szemben lényeges különbség az, hogy a kvantum eseményalgebra – a klasszikus eseményalgebrával ellentétben – egy tipikusan nemdisztributív, csupán ortomoduláris háló struktúrával rendelkezik [12]. Ennek a ténynek számos igen fontos hozadéka van a kvantum információelméletre és kvantum információgeometriára vonatkozólag. Ilyen például a határozatlansági relációk és az összefonódott állapotok létezése, továbbá az, hogy a klasszikus

Fisher-féle információ a kvantumos esetre rendkívül sokféleképpen általánosítható. A kvantum eseményalgebra szokásos modellje egy szeparábilis Hilbert-tér projektorhálója. Gleason tétele kimondja, hogy ha a leíró Hilbert-tér dimenziója kettőnél nagyobb, akkor a projekciók által generált kvantum eseményalgebra állapotaihoz bijektíven egységnyomú pozitív operátorok rendelhetők. A kvantummechanikai állapottér ezáltal a pozitív operátorok kúpjának és az egységnyomú operátorok hipersíkjának metszeteként előálló kompakt konvex sokasággal azonosul. Ezt a sokaságot a Petz-féle osztályozási tétel által jellemzett monoton metrikákkal ellátva különböző kvantum statisztikai sokaságokat kapunk, melyek vizsgálódásaink tárgyát képezik. Az érdeklődő Olvasó figyelmébe további tanulmányozás céljából Amari [6] könyvét és Petz [14] cikkét ajánljuk, melyek a témában alapműnek számítanak.

2. A dolgozat tematikája

Az első fejezetet előkészítő jellegű fejezetnek szánom, melyben a kvantum valószínűségszámítás hálóelméleti vonatkozásaiból kiindulva ismertetem a kvantum információgeometria alapvető objektumát, az állapotteret mint differenciálható sokaságot. Ugyanitt ejtek szót a Fisher-féle információ lehetséges kvantumos általánosításairól és a Petz-féle osztályozási tételről.

Az első fejezetet követő három, jól elkülönülő fejezetben a kvantum információgeometria bizonyos területein elért újabb eredményeimet mutatom be. A második fejezetben határozatlansági relációkat vizsgálok. Rövid történeti áttekintés után saját eredményeim ismertetésére térek rá. Megmutatom, hogy a határozatlansági relációk egy igen tág családja, mely magában foglalja az ún. dinamikai határozatlansági relációkat és ezen belül a Heisenberg-féle határozatlansági-elv Robertson általi általánosítását, lényegében a kvantummechanikai állapottéren értelmezett különböző Riemann-metrikák (és az ezeket indukáló operátormonoton függvények) közötti rendezésre vezethető vissza. Bevezetem az antiszimmetrikus és a szimmetrikus kvantum kovarianciákat és megmutatom, hogy a közönséges – már Schrödinger által is vizsgált – kvantum kovariancia ezen utóbbi kovariancia családba sorolható. Megmutatom, hogy a szimmetrikus kovariancia család tagjaival az antiszimmetrikus család felülről becsülhető és bizonyítom azt is, hogy a számtani középhez és a harmonikus középhez tartozó operátormonoton függvények számtani közepe által indukált monoton metrika szolgáltatja a lehető legélesebb dinamikai határozatlansági relációt.

A harmadik fejezetben összetett kvantummechanikai rendszereket vizsgálok. Itt mutatom be a dolgozat legfőbb eredményét: a 4×4-es valós állapotokra vonatkozó szeparábilitási valószínűség meghatározását a közönséges Lebesgue-mértékre vonatkozólag. Bizonyítom Milz és Strunz sejtését, mely a 4×4-es sűrűségmátrixokkal leírható kvantummechanikai rendszerekre a szeparábilitási valószínűség redukált állapottól való függetlenségét mondja ki. Eredményeiket általánosítom arra az információgeometriai szempontból releváns esetre is, amikor az állapottér a négyzetgyök függvény által származtatott monoton metrikával van ellátva. Megmutatom továbbá, hogy a $2n \times 2n$-es sűrűségmátrixok alkotta állapottér előáll az $n \times n$-es sűrűségmátrixok alkotta állapottér, az $n \times n$-es önadjungált mátrixokból álló $[-I, I]$ operátor intervallum és az $n \times n$-es mátrixok operátornormára vonatkozó egységgömbjének a direkt szorzataként. Ezt az egyébként messze nem lineáris felbontást használom fel arra, hogy geometriai leírását adjam a 4×4-es szeparábilis állapotoknak. Kiderül, hogy 4×4-es szeparábilis kvantumállapotok pereme egy, a 2×2-es mátrixok egységgömbjén értelmezett függvény grafikonjaként előálló sokaság feletti triviális nyalábként áll elő. Ezek után bevezetek egy kongruencia transzformációkra nézve invariáns távolságfogalmat az állapottéren, amire nézve meghatározom egy tetszőleges összefonódott állapot távolságát a szeparábilis állapotoktól.

A negyedik fejezetet qubit-qubit kvantum csatornák tanulmányozásának szentelem. Ezek a csatornák egy qubit időfejlődését, valamint a minden kvantumos számítási eljárás alapját képező egy qubiten végrehajtható műveleteket írják le. A Choi-féle reprezentációban a qubit-qubit kvantum csatornák $\mathbb{R}^{12}$ egy kompakt, konvex részsokaságaként jelennek meg. Erre a sokaságra mint qubit csatornák terére hivatkozok. Bevezetem a qubit csatorna klasszikus nyomát mint a qubit csatorna klasszikus (diagonális) állapotokra történő megszorítottját. Ennek egy 2×2-es sztochasztikus mátrix feleltethető meg. Ezek után meghatározom egy, a qubit csatornák terén egyenletes eloszlású csatorna klasszikus nyomának az eloszlását. Ezeket az eredményeket felhasználva független véletlen qubit csatorna sorozat qubitekre gyakorolt hatásával a dekoherenciát előidéző zajt modellezem. Ennek a gyakorlati jelentősége abban áll, hogy a kvantumszámítógépekben alkalmazott kvantumkapuk sebessége a dekoherencia idejénél gyorsabb kell, hogy legyen, ezért a dekoherencia sebességének mérése a kvantumszámítógépek megvalósításának szemszögéből nézve kulcsfontosságú. A dekoherencia utáni állapot információ tartalmát a legkevertebb állapotra vonatkozó relatív entrópiával, a dekoherencia előtti állapothoz képesti információ veszteséget pedig a kezdeti állapot dekoherencia utáni állapotra vonatkozó relatív entrópiájával jellemezem. A fejezetet és egyben a dolgozatot a legkevertebb állapothoz tartás konvergencia sebességének meghatározásával zárom.

3. Új tudományos eredmények

Az alábbiakban szereplő (tételekre, egyenletekre és példákra vonatkozó) hivatkozások a doktori értekezésben találhatók meg.

1/a. A Heisenberg-féle határozatlansági-elv Schrödinger-féle precíz megfogalmazását [16] 1934-ben Robertson tetszőlegesen sok fizikai mennyiségre általánosította [15]. Robertson tétele értelmében fizikai mennyiségek tetszőleges $(A_k)_{k=1,\dots,N} \subset \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}^{\mathrm{sa}}$ rendszerére fennáll a

$$\det\left(\left[\mathrm{Cov}_\rho(A_k, A_l)\right]_{k,l=1,\dots N}\right) \geq \det\left(\left[\mathbb{E}_\rho\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}[A_k, A_l]\right)\right]_{k,l=1,\dots,N}\right) \qquad \rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$$

determináns egyenlőtlenség. Ennek legfőbb hiányossága, hogy páratlan számú fizikai mennyiséget véve a jobb oldalon nulla szerepel, tehát semmivel sem kapunk többet, mint klasszikus esetben. A Gibilisco és Isola által megsejtett [8] és Andai által bizonyított *dinamikai határozatlansági relációk* ezt kiküszöbölik, sőt mi több, a jobb oldalon világos geometriai tartalommal bíró mennyiség szerepel.

Megmutatom, hogy a dinamikai határozatlansági relációk az állapottéren Riemann metrikát defniáló, operátormonoton függvények közötti pontonknéti rendezésre vezethetők vissza (2.2.2. tétel).

1/b. Gibilisco, Hiai és Petz tanulmányozták először a klasszikus kovariancia Schrödinger-által bevezetett kvantum kovarianciától eltérő lehetséges általánosításait statisztikai sokaságok esetére [9].

Definiálom a szimmetrizált kvantum f-kovarianciákat (2.3.1. definíció), melyek a Schrödinger-féle kovariancia általánosításai. Előnyük, hogy a belőlük származó kovariancia mátrixok világos geometriai jelentéssel bírnak. A Brunn–Minkowski determináns egyenlőtlenség felhasználásával az újonnan bevezetett kovariancia családra dinamikai határozatlansági relációkat bizonyítok (2.4.1. tétel), melyek mind élesebbek, mint a Gibilisco által tanulmányozott dinamikai határozatlansági reláció (2.4.1. következmény).

1/c. Megmutatom, hogy tetszőleges fix $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvényhez tartozó szimmetrikus kovarianciából származó kovariancia mátrix determinánsa mindig majorálja az ugyanazon függvénynek megfelelő antiszimmetrikus kovarianciából származó kovarianciamátrix determinánsát. A szóban forgó determinánsok közti hézag pedig az f_{LA} függvényhez tartozó Petz-féle kovariancia mátrix determinánsával becsülhető (2.4.2. tétel).

1/d. Meghatározom azt az f_{opt} függvényt, melyre obszervábilisek tetszőleges $A = (A_k)_{k=1,\ldots,N}$, rendszerére minden $\rho \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ állapotban a

$$\det\left(\mathrm{Cov}^s_{f_{\mathrm{opt}}}(\rho)(A)\right) \geq \det\left(\mathrm{Cov}^{as}_f(\rho)(A)\right) \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$$

egyenlőtlenség teljesül (2.4.3. tétel).

2/a. Az összetett rendszerek állapottere szeparált (vagy klasszikusan korrelált) és összefonódott állapotok diszjunkt uniójaként áll elő. Általános esetben annak eldöntése, hogy egy összetett rendszer valamely állapota összefonódott-e vagy sem, egy NP nehéz probléma. Amennyiben Borel mértéket definiálunk az állapottéren, vizsgálhatjuk a szeparált állapotok térfogatának és az állapottér térfogatának a hányadosát, melyet szeparábilitási valószínűségnek nevezünk. A szeparábilitási valószínűséggel kapcsolatos vizsgálódások a tudományterület életkorához képest igen hosszú, mintegy 20 éves időtávra tekintenek vissza. A kérdést először Zyczkowski, Horodecki, Sanpera és Lewenstein vizsgálta [10]. Slater numerikus úton a rebit-rebit rendszerbeli szeparábilitási valószínűségére $\frac{29}{64}$-et kapott [17]. A szeparábilitási valószínűséggel kapcsolatban a számunkra kulcsfontosságú előrelépést Milz és Strunz sejtése jelentette [11], mely kimondja, hogy a szeparábilitási valószínűség a Hilbert–Schmidt-metrikából származó térfogati forma mellett a redukált állapottól független és egy rögzített redukált állapot feletti szeparábilis állapotok térfogata a szóban forgó redukált állapot Bloch-sugarának egyszerű polinomiális kifejezéseként adódik.

Igazolom Milz és Strunz sejtését a rebit-rebit és qubit-qubit rendszerekre vonatkozólag (3.2.1. tétel és 3.2.1. következmény).

2/b. Bevezetem a $\tilde{\chi}_d$ $d = 1, 2$ szeparábilitási függvényeket, melyek segítségével explicit integrál alakba tudtam írni a Lebesgue-mértékre vonatkozó szeparábilitási valószínűséget a 4×4-es valós és komplex mátrixok alkotta állapottereken (3.2.1. tétel és 3.2.2.

következmény).

2/c. A valós 2×2-es mátrixok egy speciális, félcsoport tulajdonságot tükröző paraméterezését felhasználva a $\tilde{\chi}_1$ szeparábilitási függvényt meghatározom (3.2.1. lemma). A kapott eredményt felhasználva meghatározom a rebit-rebit rendszerben a szeparábilitási valószínűséget (3.2.2. tétel), mely egybeesik a Slater által jósolt értékkel.

3/a. Megmutatom, hogy Milz és Strunz szeparábilitási valószínűség redukált állapottól való függetlenségére vonatkozó sejtése a geometriai középből származó monoton metrikával ellátott 4×4-es sűrűségmátrixok alkotta kvantum statisztikai sokaságon is igaz (3.2.3. tétel és 3.2.3. következmény).

3/b. Igazolom a $\tilde{\chi}_1$ és $\tilde{\eta}_1$ szeparábilitási függvények egyenlőségét (3.2.2. lemma) és kiszámítom a valós esetre vonatkozó szeparábilitási valószínűséget a geometriai középből származó monoton metrikára vonatkozólag (3.2.3. következmény és 3.2.4. tétel).

4/a. Igazolom, hogy a $2n$-dimenziós Hilberttérrel leírt kvantummechanikai rendszer állapottere

diffeomorf egy $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$ kvantummechanikai állapottér, az $n \times n$-es önadjungált mátrixok alkotta $[-I, I]$ operátor intervallum ($\overline{\mathcal{E}_{2^k,\mathbb{K}}}$) és az $n \times n$-es mátrixok operátor norma egységgömbjének a direkt szorzatával (3.3.1. definíció és 3.3.1. tétel).

4/b. Megmutatom, hogy egy n darab kvantum bitből (rebit, ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ és qubit, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) álló összetett kvantummechanikai rendszer állapotterének belseje a

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathcal{E}_{2^k,\mathbb{K}} \times \mathrm{B}_1 \left(\mathbb{K}^{2^k \times 2^k} \right) \right)$$

szorzat sokasággal diffeomorf (3.3.1. következmény).

4/c. Kiszámítom egy tetszőleges $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ operátor monoton függvénnyel indexelt metrikából származó térfogati forma $\Pi_{n,\mathbb{K}} = \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times \mathrm{B}_1 \left(\mathbb{K}^{n \times n} \right)$ sokaságra való visszahúzottját (3.3.2. tétel). A Hilbert–Schmidt-metrika, valamint a geometriai középhez tartozó metrika esetén a visszahúzott térfogati forma a redukált állapot és a $\mathcal{E}_{2^k,\mathbb{K}}$ komponens determinánsainak egyszerű függvénye (3.3.2. következmény).

5/a. Megmutatom, hogy a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapottér pozitív

parciális transzponálási feltételt teljesítő (PPT) állapotai által alkotott sokaság a

$$\Pi_{n,\mathbb{K}}^{\mathrm{PPT}} = \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times \left\{ (Z,X) \in \mathcal{E}_{n,\mathbb{K}} \times \mathrm{B}_1\left(\mathbb{K}^{n\times n}\right) \middle| 1 > \left\| \Sigma\left(\sqrt{\tfrac{I-Z}{I+Z}}\right)^{-1} X \Sigma\left(\sqrt{\tfrac{I-Z}{I+Z}}\right) \right\| \right\}$$

sokasággal diffeomorf, ahol $\Sigma\left(\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}}\right)$ diagonális mátrix, mely főátlójában az $\sqrt{\frac{I-Z}{I+Z}} > 0$ mátrix sajátértékeit tartalmazza csökkenő sorrendben (3.3.3. tétel). Ennek egyik fontos következménye, hogy Milz és Strunz sejtése a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapottereken sokkal erősebb formában igaz (3.3.3. következmény).

5/b. Bizonyítom, hogy a PPT állapotok által alkotott $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}^{\mathrm{PPT}} \subset \mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ részsokaság diffeomorf egy $\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} \times Fl_{n,\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^+$-nyalábbal, melynek bázis sokasága az

$$r : \Delta_{n-1,\geq} \times \partial\mathrm{B}_1\left(\mathbb{K}^{n\times n}\right) \to [0,1]$$

szeparábilitási függvény nyílt epigráfja. Itt $Fl_{n,\mathbb{K}} = \mathcal{U}(\mathbb{K}^n)/\mathcal{U}(\mathbb{K})^n$ az ún. zászló sokaság (flag manifold) (3.3.4. tétel). Ennek felhasználásával explicit integrál alakban megadom a PPT állapotok geometriai valószínűségét a $\mathcal{D}_{2n,\mathbb{K}}$ állapottéren a Hilbert–Schmidt-metrikából és a $g_{f_{GM}}$ monoton metrikából származó térfogati formára egyaránt (3.3.5. tétel).

5/c. Egy összefonódott állapot szeparábilitásának mértékét az állapot szeparábilis állapotoktól mért távolságával jellemezhetjük. Attól függően, hogy milyen távolság fogalommal dolgozunk, különböző összefonódottságot mérő mennyiségeket (angolul *entanglement measures*) kapunk.

A pozitív mátrixokon a Thompson-metrika kongruencia invariáns távolságot határoz meg. Ennek a segítségével definiálom az összefonódott kvantumállapotok Thompson-féle összefonódási mértékét (3.3.3. definíció). Meghatározom egy $\rho = \phi(D, Z, X)$ alakú állapot Thompson-féle összefonódási mértékét, ami a D redukált állapottól függetlennek bizonyult (3.3.6. tétel).

6/a. A kvantum csatornák a kvantum információ feldolgozásban és továbbításban kulcsszerepet játszanak, hiszen minden qubiteken végezhető műveletnek kvantum csatornak feleltehető meg.

A Choi reprezentáció révén az általános (egységőrző) qubit csatornák tere az $\mathbb{R}^{12}$ ($\mathbb{R}^9$) vektortér egy kompakt konvex részsokaságával azonosítható, ez pedig lehetővé teszi a qubit csatornák információgeometriai tanulmányozását.

Definiálom egy tetszőleges kvantumcsatorna klasz-

szikus nyomát (4.1.2. definíció) és meghatározom egy egyenletes eloszlású általános qubit csatorna klasszikus nyomának eloszlását, továbbá az általános qubit csatornák terének a térfogatát a Lebesgue-mértékre vonatkozóan (4.2.1. tétel).

6/b. Az egységőrző kvantum csatornák a duplán sztochasztikus mátrixok kvantumos megfelelői. A Birkhoff–von Neumann-tétel szerint az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok az $n \times n$-es permutációmátrixok konvex kombinációiként állnak elő, ami egy sokdimenziós politóp, és amit Birkhoff-politópként tartanak számon. Az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok alkotta Birkhoff-politóp térfogata csupán $n = 1, 2, \ldots, 10$ esetén ismert, általános n-re eddig csak közelítő formulát publikáltak [13].

Meghatározom egyenletes eloszlású unitális qubit csatorna klasszikus nyomának eloszlását és az unitális qubit csatornák terének térfogatát a Lebesgue-mértékre vonatkozóan (4.2.2. tétel).

7/a. A véletlen qubit csatornák vizsgálata több szempontból is érdekes feladat. Egy kvantum algoritmus lényegében kvantum csatornák egy sorozata, ahol az egyes lépések hibái a végeredményben jelennek meg. Az egyes lépéseket terhelő hibákat véletlen kvantum csatornák segítségével modellezhetjük, ezen keresztül pedig az eredmény hibája kontrollálható. Ugyancsak véletlen kvantum csatornák segítségével modellezhető a kvantum regisztereket terhelő külső zaj is, mely végső soron dekoherenciához és a regiszterben tárolt információ elvesztéséhez vezet. Véletlen kvantum csatornák spektrális jellemzőinek vizsgálatával Bruzda, Cappellini, Sommers és Zyczkowski [7] foglalkozott. Igazolták a lineáris algebrából ismert Perron–Frobenius-tétel kvantumos általánosítását és numerikusan vizsgálták speciális kvantum csatornák iteráltjainak hatását véletlen állapotokon.

Igazolom, hogy tetszőleges qubit véletlen, egyenletes eloszlású qubit csatorna általi képe gömbszimmetrikus eloszlású, a kapott eloszlás pedig csak a kiinduló qubit Bloch-sugarától függ (4.3.1. lemma). Megmutatom, hogy tetszőleges qubit véletlen, egyenletes eloszlású unitális qubit csatorna általi képének Bloch-sugara az eredeti Bloch-sugár $\sqrt{Y}$ szorosa, ahol Y egy $\beta\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ eloszlású valószínűségi változó (4.3.1. tétel és 4.3.1. következnény).

7/b. Meghatározom a legkevertebb qubit kvantum állapot egyenletes eloszlású véletlen qubit csatorna általi képének eloszlását. Azt kaptam, hogy a véletlen klasszikus csatornákkal ellentétben a véletlen qubit

csatornák a legkevertebb állapotot egy tipikus $r > 0$ sugárra képezik le (4.3.2. tétel).

7/c. A qubitet terhelő külső zajt független egyenletes eloszlású qubit csatorna sorozattal modelleztem. Az információ veszteség mérésére bevezetem a qubit maradék információját és a kezdeti állapothoz képesti információ veszteséget (4.4.2. definíció), továbbá megmutatom, hogy a maradék információ az alkalmazott qubit csatornák számával exponenciálisan csökken. Az iterált logaritmus tételt felhasznála meghatározom a csökkenési rátát is.

Hivatkozások

Saját dolgozatok

[1] Andai A., Lovas A.: On Robertson-type uncertainty principles. In Václav Kratochvíl: *Information Geometry and its Applications IV* (konferenciaanyag). Liblice, Czech Republic, 2016. June, 28–29. p.
URL: http://igaia.utia.cz/data/proceedings.pdf.

[2] Lovas A., Andai A.: Refinement of Robertson-type uncertainty principles with geometric interpretation. *International Journal of Quantum Information*, 14. évf. (2016) 02. sz., 1650013. p.

[3] Lovas A., Andai A.: Volume of the space of qubit channels and some new results about the distribution of the quantum dobrushin coefficient. *arXiv preprint arXiv:1607.01215*, 2016.

[4] Lovas A., Andai A.: Volume of the space of qubit channels and the distribution of some scalar quantities on it. In Václav Kratochvíl: *Information Geometry and its Applications IV* (konferenciaanyag). Liblice, Czech Republic, 2016. June, 48–49. p. URL: http://igaia.utia.cz/data/proceedings.pdf.

[5] Lovas A., Andai A.: Invariance of separability probability over reduced states in 4×4 bipartite systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017.

Egyéb dolgozatok

[6] S. Amari: *Differential-geometrical methods in statistics.* Lecture Notes in Statistics sorozat, 28. köt. New York, 1985, Springer-Verlag, v+290. p. ISBN 3-540-96056-2.

[7] W. Bruzda, V. Cappellini, H. J. Sommers, K. Życzkowski: Random quantum operations. *Physics Letters A*, 373. évf. (2009) 3. sz., 320–324. p.

[8] P. Gibilisco, T. Isola: Uncertainty principle and quantum Fisher information. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 59. évf. (2007) 1. sz., 147–159. p. ISSN 0020-3157. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10463-006-0103-3.

[9] P. Gibilisco, F. Hiai, D. Petz: Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 55. évf. (2009) 1. sz., 439–443. p. ISSN 0018-9448. URL: http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2008.2008142.

[10] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein: Volume of the set of separable states. *Phys. Rev. A*, 58. évf. (1998. Aug), 883–892. p. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.883.

[11] S. Milz, W. T. Strunz: Volumes of conditioned bipartite state spaces. *J. Phys. A*, 48. évf. (2015) 3. sz., 035306, 16. p. ISSN 1751-8113. URL: http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/48/3/035306.

[12] János Neumann: A kvantummechanika matematikai alapjai Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[13] I. Pak: Four questions on birkhoff polytope. *Annals of Combinatorics*, 4. évf. (2000) 1. sz., 83–90. p.

[14] D. Petz: Geometry of canonical correlation on the state space of a quantum system. *J. Math. Phys.*, 35(2):780–795, 1994.

[15] H. P. Robertson: An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation. *Phys. Rev.*, 46. évf. (1934. Nov), 794–801. p. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.46.794.

[16] E. Schrödinger: About Heisenberg uncertainty relation (original annotation by A. Angelow and M.-C. Batoni). *Bulgar. J. Phys.*, 26. évf. (1999) 5-6. sz., 193–203 (2000). p. ISSN 1310-0157. Translation of Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect. **1**9 (1930), 296–303.

[17] P. B. Slater: A concise formula for generalized two-qubit Hilbert–Schmidt separability probabilities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46. évf. (2013) 44. sz., 445302. p.