# Indukált ábrázolások és a Mackey-féle imprimitivitás-tétel

## Szakdolgozat

Székely Ákos

Témavezető: Dr. Andai Attila

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

2021

# Tartalomjegyzék

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának, hogy közreműködésével betekintést kaphattam az absztrakt harmonikus analízisbe és annak több rokon területébe is. Köszönöm a dolgozatom többszöri alapos átolvasását, az ajánlott irodalmakat, amelyeknek a továbbiakban is nagy hasznát fogom venni és végül, de nem utolsósorban, köszönöm a kérdéseim megválaszolásához tett erőfeszítéseit.

# Bevezetés

Az indukált reprezentáció fogalma F.G. Frobeniustól származik, aki véges csoportok esetén vezette be az alábbi konstrukciót. Legyen $G$ egy véges csoport és $H \subset G$ egy részcsoport. Tegyük fel továbbá, hogy adott a $H$ részcsoportnak egy $\sigma : H \to \mathrm{Aut}(X)$ lineáris reprezentációja valamely $X_{\mathbb{K}}$ véges dimenziós vektortér felett. Tekintsük a következő halmazt.

$$\mathscr{F}^0 := \{f \in \mathscr{F}(G; X) \mid \forall x \in G, \forall \eta \in H : f(x\eta) = \sigma(\eta^{-1})f(x)\}$$

Ezen a lineáris téren

$$L : G \to \mathrm{Aut}\,\mathscr{F}^0; g \mapsto L_g := (f \mapsto L_g(f))$$

a $G$ csoportnak egy lineáris reprezentációja, ahol $x \in G$ esetén $L_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$. Könnyen meggyőződhetük róla, hogy az $L$ leképezés jóldefiniált és valóban egy lineáris reprezentációját létesíti a $G$ csoportnak az $\mathscr{F}^0$ tér felett. Frobenius ezt az $L$ reprezentációt nevezte a $H$ részcsoport $\sigma$ reprezentációja *által indukált reprezentációnak*. Kiderül, hogy hatékonyan elemezhetők $G$ azon lineáris reprezentációi, amelyek valamely $H \subset G$ részcsoport $\sigma$ reprezentációjából indukálódnak, így fontossá válik a következő kérdés. Hogyan jellemezhetők $G$ indukált reprezentációi? Egyik lehetőség az *imprimitivitás-redszerek* bevezetése. A fenti jelöléseknél maradva, legyen $\pi : G \to \mathrm{Aut}(F)$ a $G$ csoportnak egy lineáris reprezentációja az $F$ vektortér felett, valamint legyen $\rho : G \times M \to M$ csoporthatás az $M$ halmaz felett. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy $\bigoplus_{m\in M} F_m$ $(F_m \neq \{0\})$ direktösszeg felbontása az $F$ térnek, melyre $\forall x \in G, \forall m \in M$ esetén $\pi(x)(F_m) \subset F_{\rho(x,m)}$. Egy iyen altér-felbontást a $\pi$ reprezentációhoz tartozó, $\rho$ feletti *imprimitivitás-rendszernek* nevezünk. Kiderül, hogy a $G$ csoport minden indukált reprezentációjához tartozik egy tranzitív csoporthatás feletti nemtriviális imprimitivitás-rendszer, illetve, hogy lényegileg csak ezen reprezentációkhoz tartozik ilyen imprimitivitás-rendszer (*imprimitivitás-tétel*).

A kvantumfizika és a reprezentációelmélet szoros kapcsolata az egyik fő motivációja a fenti konstrukciók és tételek átültetésének lokálisan kompakt topologikus csoportok folytonos, unitér reprezentációinak elméletébe. Ebben a vonatkozásban G.W.Mackey munkássága az egyik legmeghatározóbb, aki az ötvenes években bevezette az *indukált folytonos unitér reprezentációkat* és többek között bizonyított egy, az előbb ismertetett imprimitivitás-tétellel analóg állítást is. Mackey állításai M2 csoportokra vonatkoztak azonban a hatvanas évek elején, Lynn Loomis és Robert J. Blattner munkássága révén, ezen feltevéstől sikerül „megszabadulni”.

Jelen dolgozat célkitűzése ismertetni az indukált folytonos unitér reprezentáció fogalmát és egy önálló bizonyítást adni az imprimitivitás-tétel egzisztencia részére. A dolgozat három fejezetre tagolódik, melyek tartalát az alábbiakban röviden ismertetjük.
Az első fejezet a matematika különböző területeiről (általános topológia, topologikus vektorterek elmélete, normált algebrák elmélete, illetve topologikus integrálelmélet) felhasznált fogalmak és állítások gyűjteményét képezi. A bizonyítás nélkül közölt állítások hivatkozással ellátva szerepelnek. (Ez a dolgozat egészére is vonatkozik.) Az első fejezet egyik legfontosabb önálló eredménye a (1.4.8) állítás, amely kulcsfontosságú a harmadik fejezetben szereplő (3.2.8) lemma bizonyításában.
A második fejezetben topologikus csoportok reprezentációelméletével kapcsolatos alapvető állítások és fogalmak szerepelnek. Az itt bemutatott állítások közül kiemelendő a (2.1.17) állítás, mely a dolgozat későbbi részeiben gyakran felhasználásra kerül folytonossággal kapcsolatos érvelésekben. Kulcsfontosságúak továbbá a (2.2.2) és a (2.2.4) állítások az indukált folytonos unitér reprezentációk bevezetésénél. Ezen állítások bizonyításainak meg nem hivatkozott részei szintén saját észrevételeken alapszanak.
A harmadik fejezet első alfejezetében definiáljuk az indukált folytonos unitér ábrázolásokat. Látható, hogy a Frobenius által megadott kostrukció általánosításának legnehezebb része a megfelelő függvénytér kiválasztása, illetve ennek ellátása egy pre-Hilbert-tér struktúrával. Az itt bemutatott realizációja az indukált reprezentációknak Robert J. Blattnertől származik. A (3.1.4) állítás jellemzést ad az indukált reprezentáció alapterére melyet a későbbiekben felhasználunk az előbb említett (3.2.8) lemma bizonyításában. Az állításban szereplő leképezés és szürjektivitásának bizonyítása [Fol15, 6, No.6.1]-ből származik, a többi tulajdonság, illetve azok igazolása önálló megfontolások alapján történt.
A harmadik fejezet második alfejezetében vezetjük be az imprimitivitás-rendszer fogalmát, illetve itt bizonyítjuk az imprimitivitás-tételt is. Imprimitivitás-rendszerekkel kapcsolatos fontos önálló eredmény a (3.2.3) állítás, melyet az imprimitivitás-tétel bizonyításában felhasználunk. Ez utóbbi tétel bizonyítása a [Ørs79] cikkben leírt gondolatmenetet követi, azonban, főleg a bizonyítás utolsó lépésében, nemtriviális módosításokra volt szükség az indukált reprezentációk általunk használt realizációja és a cikkben használt realizáció eltérése miatt. Itt játszik kulcsfontosságú szerepet a már sokat emlegetett (3.2.8) lemma.

# 1. fejezet

# Alapismeretek, fogalmak

## 1.1. Meglállapodások, jelölések

A következőkben összefoglaljuk a dolgozatban használt jelöléseket és konvenciókat.
- $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}, \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- Ha $X, Y$ halmazok, akkor valahányszor amikor tekintünk egy $f : X \to Y$ függvényt feltesszük, hogy $\operatorname{Dom} f = X$.
- A dolgozatban tekintett vektorterek mind $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ felettiek, valamint a triviális esetek tárgyalásának mellőzése céljából feltesszük, hogy nem nulla dimenziósak. A tekintett pre-Hilbert- illetve Hilbert-terek $\mathbb{C}$ felettiek.
- Vektorterekre, csoportokra, topologikus terekre csak az alaphalmazaik betűivel hivatkozunk. Ha egy $X$ vektortér esetén ki szeretnénk hangsúlyozni, hogy mely test felett tekintjük, akkor az $X_{\mathbb{K}}$ jelölést használjuk.
- A dolgozatban szereplő csoportok egységelemeit, amennyiben ez nem okoz félreértést, 1 jelöli.
- Ha $X$ egy topologikus tér, akkor $\mathscr{T}_X \subset \mathscr{P}(X)$ jelöli a topológiáját, valamint egy $x \in X$ pont esetén $\mathscr{T}_X(x)$ jelöli az $x$ pont környezetszűrőjét. Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér akkor $\mathscr{T}_X$ helyett a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ jelölést használjuk. Amennyiben $(x_i)_{i \in I} \subset X$ egy általánosított sorozat, úgy a $x_i \overset{\mathscr{T}_X}{\to} x$ jelölés azt fejezi ki, hogy az $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergál az $x \in X$ elemhez a $\mathscr{T}_X$ topológia szerint.
- Ha $X$ egy topologikus tér és $A \subset X$ tetszőleges részhalmaz, akkor $\mathscr{T}_X \upharpoonright A$ jelöli az $A$ részhalmazon a $\mathscr{T}_X$ szerinti altértopológiát.
- Ha $X \neq \emptyset$ halmaz és $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ két halmazrendszer $X$ felett, úgy az $\mathscr{A} \preccurlyeq \mathscr{B}$ jelölés azt fejezi ki, hogy a $\mathscr{B}$ halmazrendszer finomabb, mint az $\mathscr{A}$ halmazrendszer, azaz $\forall A \in \mathscr{A} : \exists B \in \mathscr{B} : B \subset A$.

- Egy $X$ vektortér algebrai duálisát $X^*$ jelöli illetve amennyiben $X$ topologikus vektortér, úgy a topologikus duálisát, azaz a folytonos lineáris funkcionáljainak összeségét, $X'$ jelöli.
- Ha $X, Y$ vektorterek, akkor $\mathrm{Lin}(X, Y)$ ($X = Y$ esetén egyszerűen $\mathrm{Lin}(X)$) jelöli az $X \to Y$ lineáris operátorok összességét. Amennyiben $X, Y$ topologikus vektorterek, úgy $\mathscr{L}(X, Y)$ ($X = Y$ esetén egyszerűen $\mathscr{L}(X)$) jelöli az $X \to Y$ folytonos lineáris operátorok összeségét.
- Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $x \in X, r > 0$ esetén $\mathrm{B}_r^{\|\cdot\|}(x) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$ továbbá $\overline{\mathrm{B}}_r^{\|\cdot\|}(x)$ jelöli az $x$ középpontú, $r$ sugarú zárt gömböt.
- Ha $X, Y \neq \emptyset$ halmazok és $f : X \to Y$ függvény, valamint $y \in Y$ tetszőleges, akkor $[f = y] := \overset{-1}{f}(\{y\})$ ($[f \neq y] := \overset{-1}{f}(Y \setminus \{y\})$). Ha $Y = \mathbb{R}$, akkor hasonlóan értelmezzük az $[f > y], [f < y], [f \geq y], [f \leq y]$ halmazokat. Amennyiben $X$ topologikus tér, valamint $Y$ vektortér és $f : X \to Y$ függvény, úgy használjuk a $\operatorname{supp} f := \overline{[f \neq 0]}$ jelölést.
- Ha $X, Y$ két halmaz, akkor $\mathscr{F}(X; Y)$ jelöli az $X \to Y$ függvények összeségét. Amennyiben $Y = \mathbb{R}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$), úgy az $\mathscr{F}_+(X)$ jelölést használjuk. Amennyiben $X, Y$ topologikus terek, úgy $C(X; Y)$ jelöli az $X \to Y$ folytonos függvények összességét.
- Ha $X \neq \emptyset$ halmaz, és $H \subset \mathscr{F}(X; \overline{\mathbb{R}})$ nemüres halmaz, $\bigwedge\limits_{f \in H} f, \bigvee\limits_{f \in H} f \in \mathscr{F}(X; \overline{\mathbb{R}})$ jelölik azokat a függvényeket, melyekre $x \in X$ esetén

$$(\bigwedge_{f \in H} f)(x) := \inf_{f \in H} f(x), (\bigvee_{f \in H} f)(x) := \sup_{f \in H} f(x)$$

teljesül.
- Legyen $(X_i)_{i \in I}$ nem üres halmazok egy rendszere. Ekkor $i \in I$ esetén jelölje $\mathrm{pr}_i$ az $i$ indexhez tartozó projekciót, azaz $\mathrm{pr}_i : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_i; (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$. Ha $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} X_i$ és $i_0 \in I$ tetszőleges, akkor jelölje $\mathrm{in}_{i_0, \mathbf{x}}$ az $i_0$ indexhez tartozó, $\mathbf{x}$ elemre való inklúziót, azaz

$$\mathrm{in}_{i_0, \mathbf{x}} : X_{i_0} \to \prod_{i \in I} X_i; a \mapsto \mathbf{a},$$

ahol $\mathrm{pr}_{i_0}(\mathbf{a}) = a$, illetve $i \in I : i \neq i_0$ esetén $\mathrm{pr}_i(\mathbf{a}) = x_i$.

## 1.2. Általános topológia

Az alábbi állítások megtalálhatók [Já96, Függelék, No.3]-ban.

**1.2.1 Definíció.** *Legyen $X$ topologikus tér. Amennyiben $\forall x \in X : \exists K \in \mathscr{T}_X(x)$ kompakt környezet, úgy az $X$ teret lokálisan kompaktnak mondjuk.*

**1.2.2 Megjegyzés.** *A továbbiakban az „LCH" kifejezés a „lokálisan kompakt Hausdorff" kifejezést rövidíti.*

**1.2.3 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér, $K \subset X$ kompakt halmaz, valamint $U \in \mathscr{T}_X$ olyan, melyre $K \subset U$. Ekkor $\exists V \in \mathscr{T}_X : K \subset V, \overline{V} \subset U$, valamint $\overline{V}$ kompakt halmaz..*

**1.2.4 Állítás. (Uriszon-lemma LCH terekre)** *Legyen $X$ LCH tér, $K \subset X$ kompakt halmaz, valamint $U \in \mathscr{T}_X$ olyan, melyre $K \subset U$. Ekkor $\exists f \in \mathscr{K}_+(X) : 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subset U$, valamint $K \subset [f = 1]$.*

**1.2.5 Állítás. (Egységosztás-tétel LCH terekre)** *Legyen $X$ LCH tér, $K \subset X$ kompakt halmaz, valamint $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{T}_X$ nyílt halmazok olyan véges rendszere, melyre $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$. Ekkor $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{K}_+(X) : \forall k \in \{1, \ldots, n\} : 0 \leq \varphi_k \leq 1,\ \operatorname{supp} \varphi_k \subset U_k$, valamint $K \subset \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k = 1\right]$ és $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$.*

**1.2.6 Állítás. (Tietze kiterjesztési tétel LCH terekre)** *Legyen $X$ LCH tér, $K \subset X$ kompakt halmaz és $U \in \mathscr{T}_X$ olyan, melyre $K \subset U$. Ekkor, ha $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ és $f \in C((K, \mathscr{T}_X \upharpoonright K); [a, b])$, akkor $\exists \tilde{f} \in \mathscr{K}(X; [a, b]) : \operatorname{supp} \tilde{f} \subset U$, valamint $\tilde{f} \upharpoonright K = f$.*

## 1.3. Topologikus vektorterek

**1.3.1 Definíció.** *Legyen $X$ egy topologikus tér.*

(i) *Ha az $X$ halmazon adott egy csoportstruktúra, melynek csoportszorzását illetve invertálását rendre $p : X \times X \to X, i : X \to X$ jelöli, akkor amennyiben ezen leképezések $(\mathscr{T}_X \times \mathscr{T}_X, \mathscr{T}_X)$-illetve $(\mathscr{T}_X, \mathscr{T}_X)$-folytonosak, úgy az $X$ teret topologikus csoportnak nevezzük.*

(ii) *Ha az $X$ halmazon adott egy vektortér struktúra úgy, hogy az alulfekvő csoportstruktúrával $X$ topologikus csoport, valamint a $\mathbb{K} \times X \to X; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ leképezés $(\mathscr{T}_{|\cdot|} \times \mathscr{T}_X, \mathscr{T}_X)$-folytonos, akkor az $X$ teret topologikus vektortérnek nevezzük.*

**1.3.2 Definíció.** *Legyen $X$ vektortér $\mathbb{K}$ felett és $A \subset X$ tetszőleges részhalmaz.*

(i) *Az $A$ részhalmazt kiegyensúlyozottnak mondjuk, ha $\overline{\mathrm{B}}_1(0)A \subset A$.*

(ii) *Az $A$ részhalmazt elnyelőnek mondjuk, amennyiben $\forall x \in X : \exists c > 0$ úgy, hogy $\forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq c \Rightarrow x \in \lambda A$.*

**1.3.3 Definíció. (Lokálisan konvex topologikus vektortér)** *Egy $X$ topologikus vektorteret lokálisan konvexnek nevezünk, ha létezik a $0 \in X$ pontnak konvex halmazokból álló környezetbázisa. Ekkor az $X$ feletti topológiát lokálisan konvex topológiának mondjuk.*

**1.3.4 Állítás.** *Legyen $X$ vektortér továbbá legyen $(X_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex terek illetve $(u_i)_{i\in I} : \forall i \in I : u_i \in \mathrm{Lin}\,(X_i, X)$ lineáris operátorok rendszere. Ekkor létezik $X$ felett legbővebb lokálisan konvex $\mathscr{T}_X$ topológia, melyre $\forall i \in I$ esetén az $u_i$ operátor $(\mathscr{T}_{X_i}, \mathscr{T}_X)$ folytonos. Ekkor a $\mathscr{T}_X$ topológiát az $(X_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiának nevezzük.*

**1.3.5 Megjegyzés.**

(i) *Fontos speciális eset az, amikor $\forall i \in I$ esetén $X_i \subset X$ lineáris altér és $u_i$ az $X_i$ altérnek az $X$ térbe való kanonikus beágyazása. Ekkor azt mondjuk, hogy $(X, \mathscr{T}_X)$ az $(X_i)_{i\in I}$ altér-rendszer induktív limesze.*

(ii) *A következőképpen megadhatjuk az $(X, \mathscr{T}_X)$ térben a $0$ pontnak egy környezetbázisát: legyen $\mathscr{C} := \{A \subset X \mid A$ konvex, kiegyensúlyozott, elnyelő$\}$. Ekkor $\mathscr{B} := \{V \in \mathscr{C} \mid \forall i \in I : \overset{-1}{u_i}(V) \in \mathscr{T}_{X_i}(0)\}$ környezetbázisa a $0$ pontnak az $X$ térben. Speciálisan: ha $\forall i \in I$ esetén $X_i \subset X$ lineáris altér és $u_i$ az $X_i$ térnek az $X$ térbe való kanonikus beágyazása akkor $\mathscr{B} = \{V \in \mathscr{C} \mid \forall i \in I : V \cap X_i \in \mathscr{T}_{X_i}(0)\}$. Ezért ebben az esetben egy $V \subset X$ pontosan akkor környezete a $0$ pontnak ha $\exists W \in \mathscr{C} : (W \subset V) \wedge (\forall i \in I : W \cap X_i \in \mathscr{T}_{X_i}(0))$. A részletek megtalálhatók [Já98, XIV, §3]-ban.*

(iii) *Amennyiben $\sum_{i\in I} u_i(X_i) = X$ úgy a következőképpen is megadhatjuk az $X$ térben a $0$ pontnak egy környezetbázisát: $\forall i \in I$ esetén legyen $\mathfrak{B}_i \subset \mathscr{T}_{X_i}(0)$ kiegyensúlyozott halmazokból álló környezetbázis. Ekkor*

$$\mathfrak{B} := \left\{ \mathrm{co}\left( \bigcup_{i\in I} u_i(V_i) \right) \mid \forall i \in I : V_i \in \mathfrak{B}_i \right\}$$

*környezetbázisa a $0$ pontnak, ugyanis: először megmutatjuk, hogy $\mathfrak{B} \subset \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ a (ii) pontban megadott környezetbázis). Legyen $B \in \mathfrak{B}$, $x \in B$ és $|\lambda| \leq 1$. Ekkor $\forall i \in I : \exists V_i \in \mathfrak{B}_i : B = \mathrm{co}\left( \bigcup_{i\in I} u_i(V_i) \right)$, valamint $\exists n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_n \in \bigcup_{i\in I} u_i(V_i)$ és $\exists c_1, \ldots, c_n \in [0,1] : \sum_{k=1}^{n} c_k = 1, x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$. Ekkor $\lambda x = \sum_{k=1}^{n} c_k(\lambda x_k) \in B$ mivel $\bigcup_{i\in I} u_i(V_i)$ kiegyensúlyozott, így $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda x_k \in \bigcup_{i\in I} u_i(V_i)$, tehát $B$ kiegyensúlyozott. Legyen* *most* $x \in X = \sum_{i\in I} u_i(X_i) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \exists i_1,\dots,i_n \in I : \exists x_{i_1} \in u_{i_1}(X_{i_1}),\dots,x_{i_n} \in u_{i_n}(X_{i_n}) : x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$. *Mivel* $\forall k \in \{1,\dots,n\} : u_{i_k}(V_{i_k}) \subset u_{i_k}(X_{i_k})$ *elnyelő így* $\exists c > 0 : \forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq c \Rightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\} : x_{i_k} \in \lambda u_{i_k}(V_{i_k}) \Rightarrow \lambda^{-1}x_{i_k} \in u_{i_k}(V_{i_k}) \Rightarrow (n\lambda)^{-1}x = \sum_{k=1}^{n} n^{-1}(\lambda^{-1}x_{i_k}) \in B \Rightarrow x \in n\lambda B$ *tehát* $cn$ *megfelelő küszöb így* $B$ *elnyelő és definíciója szerint konvex, tehát* $B \in \mathscr{C}$. *Továbbá* $\forall i \in I : V_i \subset \overset{-1}{u_i}(B) \Rightarrow B \in \mathscr{B}$. *Másodszor ha* $V \in \mathscr{B} \Rightarrow \forall i \in I : \exists V_i \in \mathfrak{B}_i : V_i \subset \overset{-1}{u_i}(V) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} u_i(V_i) \subset V$ *ami konvex így* $\mathfrak{B} \ni B := \operatorname{co}\left(\bigcup_{i\in I} u_i(V_i)\right) \subset V$ *vagyis* $\mathscr{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ *tehát utóbbi is környezetbázisa a* 0 *pontnak. (Ezen állítás [Bou87, II, §4, No.4]-ből származik.)*

**1.3.6 Állítás.** *Legyen* $X$ *vektortér,* $(X_i)_{i\in I}$ *lokálisan konvex terek egy rendszere és* $\forall i \in I$ *esetén legyen* $u_i \in \operatorname{Lin}(X_i, X)$. *Lássuk el az* $X$ *teret az* $(X_i, u_i)_{i\in I}$ *rendszer által induktívan előállított topológiával és legyen* $Y$ *lokálisan konvex tér. Ekkor* $\forall u \in \operatorname{Lin}(X,Y) : u \in \mathscr{L}(X,Y) \Leftrightarrow \forall i \in I : u \circ u_i \in \mathscr{L}(X_i, Y)$.

## 1.4. $\mathscr{K}(X;F)$ terek speciális tulajdonságai

**1.4.1 Jelölés.** *Legyen* $X$ *LCH tér,* $A \subset X$ *tetszőleges részhalmaz,* $F_{\mathbb{K}}$ *Banach-tér.*

$\mathscr{K}(X;F) := \{f \in C(X;F) \mid \operatorname{supp} f \subset X \text{ kompakt}\}$

$\mathscr{K}(X;F;A) := \{f \in \mathscr{K}(X;F) \mid \operatorname{supp} f \subset A\}$

A pontonkénti műveletekkel ellátva $\mathscr{K}(X;F)$ $\mathbb{K}$-vektortér amelyen a $f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x\in X}\|f(x)\|$ leképezés normát definiál és melynek $\forall K \subset X$ kompakt halmaz esetén $\mathscr{K}(X;F;K)$ zárt altere, sőt, ezek a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva Banach-terek. Jelölje $\mathrm{in}_K$ a $\mathscr{K}(X;F;K)$ térnek a $\mathscr{K}(X;F)$ térbe való kanonikus beágyazását és jelölje $\mathscr{T}_{\mathrm{ind}}$ a $(\mathscr{K}(X;F;K), \mathrm{in}_K)_{K\subset X \text{ kompakt}}$ altér-rendszer által előállított induktív topológiát a $\mathscr{K}(X;F)$ téren. Ismert, hogy ezzel a topológiával ellátva $\mathscr{K}(X;F)$ *hordós* lokálisan konvex topologikus vektortér (vagyis olyan lokálisan konvex topologikus vektortér, amelyben bármely kiegyensúlyozott, zárt, konvex, elnyelő halmaz (*hordó*) a 0 pontnak környezete),valamint Hausdorff topologikus tér is (ez utóbbi azért igaz, mert $\mathscr{T}_{\mathrm{ind}} \succcurlyeq \mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}$). Továbbá, az is igaz, hogy $\forall K \subset X$ kompakt halmazra $\mathscr{T}_{\mathrm{ind}} \restriction \mathscr{K}(S;F;K) = \mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}(\mathscr{K}(S;F;K))$. Ezek az állítások megtalálhatók [Já98, XIV, §3]-ban.

A továbbiakban, amennyiben az ettől való eltérést nem hangsúlyozzuk ki, a $\mathscr{K}(X;F)$ tereket a $\mathscr{T}_{\text{ind}}$ topológiával ellátva tekintjük.

**1.4.2 Megjegyzés.** *Az (1.3.5) (iii) állítás szerint a* 0 *pontnak*

$$\mathfrak{B} := \left\{ \operatorname{co}\left( \bigcup_{\substack{K\subset X\\ K kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(X;F;K) \right) \mid \forall K \subset X \text{ kompakt halmazra} : \varepsilon_K > 0 \right\}$$

*egy környezetbázisa a* $\mathscr{K}(X;F)$ *térben.*

Szükségünk lesz a következő, $\mathscr{K}(X;F)$ tereken értelmezett illetve ilyen terekbe képző leképezések folytonosságának jellemzéseire (ld. [Fol15, 6, No.6.3]).

**1.4.3 Állítás.** *Legyen* $X, Y$ *LCH tér és* $F_{\mathbb{K}}$ *Banach-tér. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek.*

(i) *Ha* $\varphi \in \mathscr{K}(X;F)^*$, *akkor* $\varphi \in \mathscr{K}(X;F)' \Leftrightarrow \forall K \subset X$ *kompakt halmazra* $\varphi \circ \mathrm{in}_K \in \mathscr{K}(X;F;K)'$.

(ii) *Legyen* $T \in \mathrm{Lin}(\mathscr{K}(X;F), \mathscr{K}(Y;F))$. *Ha* $\forall K \subset X$ *kompakt halmazhoz* $\exists L \subset Y$ *kompakt halmaz úgy, hogy* $T \circ \mathrm{in}_K : \mathscr{K}(X;F;K) \to \mathscr{K}(Y;F;L)$ *folytonos, akkor* $T$ *folytonos.*

(iii) *Legyen* $B : \mathscr{K}(X;F) \times \mathscr{K}(Y;F) \to \mathscr{K}(X \times Y;F)$ *bilineáris operátor. Ha* $\forall K \subset X, \forall K' \subset Y$ *kompakt halmazhoz* $\exists L \subset X \times Y$ *kompakt halmaz, úgy, hogy*

$$B \circ (\mathrm{in}_K, \mathrm{in}_{K'}) : \mathscr{K}(X;F;K) \times \mathscr{K}(Y;F;K') \to \mathscr{K}(X \times Y;F;L)$$

*folytonos, akkor* $B$ *folytonos.*

(iv) *Legyen* $\Phi : X \to \mathscr{K}(Y;F)$ *egy leképezés. Ha* $\forall K \subset X$ *kompakt halmazhoz* $\exists L \subset Y$ *kompakt halmaz úgy, hogy* $\Phi \upharpoonright K : K \to \mathscr{K}(Y;F;L)$ *folytonos, akkor* $\Phi$ *folytonos.*

**1.4.4 Megjegyzés.** *Legyen* $X$ *és* $Y$ *LCH tér. Ekkor* $\forall f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{K}), \forall g \in \mathscr{K}(Y;\mathbb{K})$ *esetén az* $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{K}; (x,y) \mapsto f(x)g(y)$ *leképezés folytonos, hiszen* $f \otimes g = (f \circ \mathrm{pr}_1)(g \circ \mathrm{pr}_2)$, *valamint látható, hogy* $\operatorname{supp} f \otimes g = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$ *így* $f \otimes g \in \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K})$. *Így definiálhatjuk a*

$$\mathscr{K}(X;\mathbb{K}) \otimes \mathscr{K}(Y;\mathbb{K}) := \operatorname{span}\{ f \otimes g \in \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K}) \mid f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{K}), g \in \mathscr{K}(Y;\mathbb{K}) \}$$

*halmazt, mely lineáris altere a* $\mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K})$ *térnek. Látható továbbá, hogy a* $\otimes : \mathscr{K}(X;\mathbb{K}) \times \mathscr{K}(Y;\mathbb{K}) \to \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K}); (f,g) \mapsto f \otimes g$ *leképezés bilineáris, sőt, az is igaz, hogy a* $(\mathscr{K}(X;\mathbb{K}) \otimes \mathscr{K}(Y;\mathbb{K}), \otimes)$ *pár rendelkezik a tenzorszorzattól megkövetelt univerzális tulajdonsággal (ld. [Tre67, III]), tehát „jogos” a* $\otimes$ *jelölés.*

**1.4.5 Következmény.** *A* $\otimes : \mathscr{K}(X;\mathbb{K}) \times \mathscr{K}(Y;\mathbb{K}) \to \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K}); (f,g) \mapsto f \otimes g$ *leképezés folytonos.*

*Bizonyítás.* Legyen $K \subset X$ és $K' \subset Y$ kompakt halmaz. Ekkor a fentiek alapján $\otimes(\mathscr{K}(X;\mathbb{K};K) \times \mathscr{K}(Y;\mathbb{K};K')) \subset \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{K};K \times K')$. Mivel $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{K}), g \in \mathscr{K}(Y;\mathbb{K})$ esetén $\|f \otimes g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ így alkalmazható (1.4.3) (iii). pontja ami mutatja $\otimes$ folytonosságát. ■

**1.4.6 Következmény.** *Legyen $X$ LCH tér, $F_\mathbb{K}$ Banach-tér, $\varphi \in C(X;\mathbb{K})$ illetve $\psi : X \to X$ homeomorfizmus. Ekkor $f \in \mathscr{K}(X;F)$ esetén a $f \mapsto \varphi f, f \mapsto f \circ \psi$ leképezések folytonos lineáris operátorai a $\mathscr{K}(X;F)$ térnek.*

*Bizonyítás.* A linearitás mindkét esetben világos. Legyen $K \subset X$ kompakt halmaz és $f \in \mathscr{K}(X;F;K)$ tetszőleges. Ekkor $\operatorname{supp} \varphi f \subset \operatorname{supp} f \subset K$ illetve $\operatorname{supp} f \circ \psi = \psi^{-1}(\operatorname{supp} f) \subset \psi^{-1}(K)$, valamint $\|f\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_K$ és $\|f \circ \psi\|_\infty = \|f\|_\infty$ így (1.4.3) (ii). pontjából következik mindkét leképezés folytonossága. ■

A következő állítás bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

**1.4.7 Lemma.** *Legyen $X$ topologikus tér, $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ tetszőleges rendszer, melyre $\cup\mathscr{S} = X$. Ha $A \subset X$ olyan, melyre $\forall S \in \mathscr{S}$ esetén $A \cap S$ sűrű az $(S, \mathscr{T}_X \restriction S)$ altérben, akkor $A$ sűrű az $X$ térben.*

*Bizonyítás.* Legyen $x \in X, V \in \mathscr{T}_X(x)$ tetszőleges. Ekkor $\exists S \in \mathscr{S} : x \in S$ illetve a feltevés szerint $\exists y \in A \cap S$ pont, melyre $y \in S \cap V$. Ekkor persze $y \in V$ is teljesül amiből következik az állítás. ■

**1.4.8 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér és $F_\mathbb{K}$ Banach-tér. Legyen $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}(X;F)$ olyan lineáris altér, melyre teljesülnek a következők:*

(i) $\mathscr{K}(X;\mathbb{K})\mathscr{A} := \{\varphi f \mid \varphi \in \mathscr{K}(X;\mathbb{K}), f \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{A}$;

(ii) $\forall x \in X$ *esetén* $\overline{\mathscr{A}(x)} := \overline{\{f(x) \mid f \in \mathscr{A}\}} = F$.

*Ekkor $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{K}(X;F)$, vagyis $\mathscr{A}$ sűrű a $\mathscr{K}(X;F)$ térben.*

*Bizonyítás.* Mivel $\mathscr{K}(X;F) = \cup\{\mathscr{K}(X;F;U) \mid U \in \mathscr{T}_X, \overline{U}\ kompakt\}$ ezért a lemma alapján elég látni, hogy $\forall U \in \mathscr{T}_X$ esetén, melyre $\overline{U}$ kompakt, $\mathscr{A} \cap \mathscr{K}(X;F;U)$ sűrű a $\mathscr{K}(X;F;U)$ altérben, amelyen a $\mathscr{T}_{\text{ind}} \restriction \mathscr{K}(X;F;U)$ altértopológia megegyezik a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}$ topológiával, mivel ez a bővebb $\mathscr{K}(X;F;\overline{U})$ altér esetén is fennáll. Ehhez legyen $U \in \mathscr{T}_X : \overline{U}$ kompakt, $g \in \mathscr{K}(X;F;U)$ illetve $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $x \in \operatorname{supp} g$ akkor (ii) alapján $\exists f_x \in \mathscr{A}$ melyre $\|f_x(x) - g(x)\| < \varepsilon$ továbbá legyen $U_x :=$

$U \cap [\|f_x - g\| < \varepsilon] \in \mathscr{T}_{\mathrm{ind}}$. Ekkor $\operatorname{supp} g \subset \bigcup_{x \in \operatorname{supp} g} U_x$ így $\operatorname{supp} g$ kompaktsága miatt $\exists x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{supp} g : \operatorname{supp} g \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Válasszunk a $\operatorname{supp} g$ kompakt halmazhoz egy, az $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ lefedésnek alárendelt folytonos egységosztást: $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{K}(X; [0,1]) :$ $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{x_k}$, valamint $\operatorname{supp} g \subset \left[\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 1\right]$ és $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$. Legyen $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k f_{x_k}$, ami a (ii) pont és $\mathscr{A}$ altér mivolta miatt eleme az $\mathscr{A}$ halmaznak. Továbbá $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \subset U$ miatt $f \in \mathscr{K}(X; F; U)$. Ekkor $x \in \operatorname{supp} g$ esetén

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_{x_k}(x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) g(x) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) (f_{x_k}(x) - g(x)) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \|f_{x_k}(x) - g(x)\| \leq \sum_{k : x \in \operatorname{supp} \varphi_k} \varphi_k(x) \|f_{x_k}(x) - g(x)\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépés abból következik, hogy ha $x \in \operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{x_k}$, akkor $\|f_{x_k}(x) - g(x)\| < \varepsilon$, illetve $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$. Másrészt, $x \notin \operatorname{supp} g$ esetén

$$\|f(x) - g(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_{x_k}(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \|f_{x_k}(x)\| = \sum_{k : x \in \operatorname{supp} \varphi_k} \varphi_k(x) \|f_{x_k}(x)\| < \varepsilon,$$

ahol az utolsó lépés, mint az előző esetben,

$$x \in \operatorname{supp} \varphi_k \subset U_{x_k} \Rightarrow \|f_{x_k}(x) - g(x)\| = \|f_{x_k}(x)\| < \varepsilon,$$

illetve $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$ fennállásából következik. Így tehát $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ ami mutatja, hogy $\mathscr{A} \cap \mathscr{K}(X; F; U)$ sűrű a $\mathscr{K}(X; F; U)$ altérben. ■

## 1.5. Normált algebrák

**1.5.1 Definíció.** *Legyen $A$ algebra $\mathbb{K}$-felett.*

(i) *Ha adott egy $^* : A \to A$ konjugált-lineáris, anti-multiplikatív ($\forall a, b \in A$ esetén $(ab)^* = b^* a^*$), idempotens ($^{**} = id_A$) leképezés, akkor ezzel ellátva az $A$ algebrát, a kapott* *struktúrát *-algebrának nevezzük, valamint a $^*$ leképezést involúciónak hívjuk.*

(ii) *Amennyiben adott egy $\|\cdot\|$ norma az $A$ vektortéren melyre teljesül, hogy $\forall a, b \in A : \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ akkor $A$-t ezzel a normával ellátva normált algebrának nevezzük. Továbbá, ha az $A$-n adott egy involúció is amely erre a normára nézve izometria akkor normált *-algebráról beszélünk. Ezenfelül, ha a $\|\cdot\|$ normával az $A$ tér teljes, akkor az előbbi struktúrákat Banach-algebrának, illetve Banach *-algebrának nevezzük.*

(iii) *Ha $A$ normált *-algebra és teljesül, hogy $\forall x \in A : \|x^*x\| = \|x\|^2$ akkor $A$-t pre-$C^*$-algebrának nevezzük. Továbbá, ha az $A$ tér teljes, akkor $C^*$-algebrának nevezzük.*

**1.5.2 Megjegyzés.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. Legyen*

$$C_0(X; \mathbb{C}) := \{f \in C(X; \mathbb{C}) \mid \forall \varepsilon > 0 : \exists K \subset X \text{ kompakt} : \forall t \in X \setminus K : |f(t)| < \varepsilon\}.$$

*Ismert, hogy $\mathscr{K}(X; \mathbb{C}), C_0(X; \mathbb{C})$ a pontonkénti műveletekkel (az involúció a függvények pontonkénti konjugálása) illetve a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva kommutatív pre-$C^*$- illetve $C^*$-algebra, valamint, hogy utóbbi az előzőnek bizonyos értelembeli teljessé tétele, amit itt nem részletezünk. Az $(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_{op})$ Banach-tér az operátorok kompozíciójával mint szorzással, illetve adjungálásával mint involúcióval ellátva szintén $C^*$-algebra.*

**1.5.3 Definíció.** *Legyen $A$ *-algebra és $a \in A$. Ha $a^* = a$, akkor $a$-t önadjungáltnak, ha $a^* = a^{-1}$, akkor $a$-t unitérnek, valamint, ha $aa^* = a^*a$, akkor $a$-t normálisnak mondjuk. Ha $\exists n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_n \in A$, melyekre $a = \sum_{k=1}^{n} x_k^* x_k$, akkor az $a$ elemet pozitívnak mondjuk.*

**1.5.4 Megjegyzés.** *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi ismert tényre (ld. [Já98, XVI, §7]): az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ $C^*$-algebra pozitív elemei éppen a pozitív operátorok, vagyis, az olyan $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátorok, melyekre $\forall x \in \mathscr{H} : \langle u(x), x\rangle \geq 0$.*

**1.5.5 Definíció.** *Legyen $A$ és $B$ normált *-algebra. Egy $\Phi : A \to B$ leképezést *-homomorfizmusnak nevezünk, ha olyan folytonos algebra-homomorfizmus, amely megtartja az involúciót, azaz, $\forall a \in A : \Phi(a^*) = \Phi(a)^*$.*

Igaz a következő, $C^*$-algebrák közötti *-homomorfizmusokról szóló nevezetes tétel (ld. [Já98, XVI, §6]).

**1.5.6 Tétel.** *Legyen $A$ és $B$ $C^*$-algebra. Ha $\Phi : A \to B$ injektív *-homomorfizmus, akkor izometria.*

**1.5.7 Definíció.** *Legyen A Banach *-algebra és $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. Ekkor egy* $\Phi : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ **-homomorfizmust az A algebra $\mathscr{H}$ feletti *-ábrázolásának nevezünk. Amennyiben* $\forall x \in \mathscr{H} : \forall a \in A : \varphi(a)(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *teljesül úgy a* $\Phi$ *ábrázolást nemelfajultnak mondjuk. Ha* $\Psi : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H}')$ *szintén *-ábrázolása az A algebrának a* $\mathscr{H}'$ *Hilbert-tér felett, akkor amennyiben* $\exists W \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ *unitér operátor, melyre* $\forall a \in A : W \circ \Phi(a) = \Psi(a) \circ W$ *úgy a* $\Phi, \Psi$ *ábrázolásokat unitér ekvivalenseknek mondjuk és ezt a következőképpen jelöljük:* $\Phi \simeq \Psi$.

**1.5.8 Megjegyzés.** *Legyen A Banach *-algebra,* $\mathscr{H}$ *Hilbert-tér és* $\Phi : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ **-homomorfizmus. Ekkor a nemelfajultsággal ekvivalens feltétel a* $\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$ *lineáris altér sűrűsége ugyanis, ha* $x \in \mathscr{H}$ *olyan, melyre* $\forall a \in A$ *esetén* $\varphi(a)(x) = 0$, *akkor persze* $\forall y \in \mathscr{H} : \langle \varphi(a)(x), y \rangle = 0$, *amiből* $y \in (\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H})^{\perp}$ *következik. Fordítva, ha* $y \in (\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H})^{\perp}$, *akkor* $\forall a \in A, \forall x \in \mathscr{H} : \langle \varphi(a)(x), y \rangle = 0 \Rightarrow \forall a \in A, \forall x \in \mathscr{H} : \langle x, \varphi(a^*)(y) \rangle = 0$ *amiből adódik, hogy* $\forall a \in A : \varphi(a)(y) = 0$. *Így* $(\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H})^{\perp} = \{y \in \mathscr{H} \mid \forall a \in A : \varphi(a)(y) = 0\}$. *Ha* $\varphi$ *definíció szerint nemelfajult, akkor kapjuk, hogy* $(\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H})^{\perp} = \{0\}$ *amiből* $\operatorname{span}\varphi(A)\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$ *sűrűsége adódik illetve ha ez a halmaz sűrű, akkor kapjuk, hogy* $\{y \in \mathscr{H} \mid \forall a \in A : \varphi(a)(y) = 0\} = \{0\}$ *ami éppen a nemelfajultság definíciója.*

## 1.6. Topologikus integrálelmélet elemei

**1.6.1 Definíció.** *Legyen X LCH tér. Ekkor* $\mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ *elemeit Radon-mértéknek nevezünk. Ha* $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ *és* $\operatorname{Ran}(\mu \restriction \mathscr{K}(X;\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}$ $(\operatorname{Ran}(\mu \restriction \mathscr{K}_+(X)) \subset \mathbb{R}_+)$, *akkor* $\mu$*-t valósnak (pozitívnak) mondjuk.*

**1.6.2 Megjegyzés.** *Legyen X LCH tér. A függvények pontonkénti konjugálása folytonos, konjugált-lineáris operátora a* $\mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ *térnek (a folytonosság ugyanúgy látható, mint (1.4.3) (ii)-ben). Így jóldefiniált a*

$$\mathscr{K}(X;\mathbb{C})' \to \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'; \mu \mapsto \overline{\mu} := (f \mapsto \overline{\mu(\overline{f})})$$

*leképezés, amelyről könnyen látható, hogy konjugált-lineáris és idempotens, vagyis* $\forall \mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})' : \overline{\overline{\mu}} = \mu$. *Igaz továbbá, hogy* $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ *esetén* $\mu$ *valós* $\Leftrightarrow \mu = \overline{\mu}$, *ugyanis ha* $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{R})$, *akkor* $\overline{f} = f$ *így* $\overline{\mu}(f) = \overline{\mu(f)}$ *és* $\overline{\mu(f)} = \mu(f) \Leftrightarrow \mu(f) \in \mathbb{R}$. *Ezen leképezés segítségével láthatjuk, hogy* $\forall \mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ *felírható két valós Radon-mérték komplex együtthatós lineáris kombinációjaként*

$$\operatorname{Re}\mu := \frac{\mu + \overline{\mu}}{2},\ \operatorname{Im}\mu := \frac{\mu - \overline{\mu}}{2i},\ \mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu.$$

Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték. Ekkor $V := \cup\{U \in \mathscr{T}_X \mid \mu \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};U) = 0\}$ olyan nyílt halmaz, melyre $\mu \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};V) = 0$, ugyanis ha $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C};V)$ akkor a $V$ definíciójában szereplő $U$ nyílt halmazok lefedik $f$ tartóját, melynek kompaktsága miatt $\exists U_1,\ldots,U_n$ véges sok köztük, melyek szintén lefedik. Válasszunk a $\operatorname{supp} f$ kompakt halmazhoz egy, az $U_1,\ldots,U_n$ lefedésnek alárendelt folytonos egységosztást: $\exists \psi_1,\ldots,\psi_n : \forall k \in \{1,\ldots,n\} : \psi_k \in \mathscr{K}_+(X)$, $\operatorname{supp}\psi_k \subset U_k$, valamint $\operatorname{supp} f \subset \left[\sum_{k=1}^n \psi_k = 1\right]$. Ekkor $\mu(f) = \mu\left(f\sum_{k=1}^n \psi_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(f\psi_k)$ és $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ : $\operatorname{supp} f\psi_k \subset U_k$ ezért $\mu(f\psi_k) = 0$ és így $\mu(f) = 0$. Ezek szerint értelmes a következő definíció:

**1.6.3 Definíció. (Radon-mérték tartója)** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték. Ha $V \in \mathscr{T}_X$ az a, fentiek szerint létező, legbővebb nyílt halmaz, melyre $\mu \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};V) = 0$ akkor a $\operatorname{supp}\mu := X \setminus V$ zárt halmazt nevezzük a $\mu$ mérték tartójának.*

Definíció szerint, ha $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, akkor $\operatorname{supp} f \subset V$ így $\mu(f) = 0$, valamint $\mu = 0 \Leftrightarrow \operatorname{supp}\mu = \emptyset$.

Később szükségünk lesz az alábbi, élesebb állításra (ld. [Bou04, III, §2, No.3, Prop.8]):

**1.6.4 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték. Ha $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\operatorname{supp}\mu \subset [f = 0]$, akkor $\mu(f) = 0$. Következésképpen, ha az $f, g \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ függvényekre $\operatorname{supp}\mu \subset [f = g]$ fennáll akkor $\mu(f) = \mu(g)$.*

**1.6.5 Definíció.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték, valamint $\varphi \in C(X;\mathbb{K})$ ill. $\psi : X \to X$ homeomorfizmus. Ekkor a korábban látottak alapján a $\varphi\cdot\mu := f \mapsto \mu(\varphi f)$, valamint $\psi(\mu) := f \mapsto \mu(f\circ\psi)$ ($f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$) leképezések Radon-mértékek, továbbá amennyiben $\varphi$ valós (pozitív), úgy ha $\mu$ valós (pozitív), akkor $\varphi\cdot\mu, \psi(\mu)$ valós (pozitív).*

Továbbá az is igaz, hogy a $C(X;\mathbb{C}) \times \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'; (\varphi,\mu) \mapsto \varphi\cdot\mu$ leképezéssel $\mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ $C(X;\mathbb{C})$-modulus, valamint ha $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})', f \in C(X;\mathbb{C})$, akkor $\overline{f\cdot\mu} = \overline{f}\cdot\overline{\mu}$ mivel $\varphi \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ esetén $\overline{f\cdot\mu}(\varphi) = \overline{\mu(\overline{\overline{f}\varphi})} = \overline{f}\cdot\overline{\mu}(\varphi)$.

**1.6.6 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték, valamint $\varphi \in C(X;\mathbb{K})$. Ekkor $\operatorname{supp}\varphi\cdot\mu = \overline{\operatorname{supp}\mu \cap [\varphi \neq 0]}$ (ld. [Bou04, III, §2, No.3, Prop.10]).*

**1.6.7 Jelölés.** *Legyen $\mathcal{M}_c(X) := \{\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})' \mid \operatorname{supp}\mu$ kompakt$\}$, ahol $X$ tetszőleges LCH tér.*

**1.6.8 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér. Ekkor $\mathcal{M}_c(X) \subset \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ lineáris altér, $C(X;\mathbb{C})$-részmodulus és zárt a Radon-mértékek fent bevezetett konjugálására.*

*Bizonyítás.* Legyenek $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(X), a, b \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek és $V_1, V_2 \in \mathscr{T}_X$ azok a legbővebb nyílt halmazok, melyekre $\mu_i \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};V_i) = 0, (i = 1,2)$. Ekkor $(a\mu_1 + b\mu_2) \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};V_1 \cap V_2) = 0$ így $\operatorname{supp}(a\mu_1 + b\mu_2) \subset X \setminus V_1 \cup X \setminus V_2$, ami kompakt halmaz tehát $a\mu_1 + b\mu_2 \in \mathcal{M}_c(X)$. Ha $\mu \in \mathcal{M}_c(X), f \in C(X;\mathbb{C})$, akkor (1.6.6) alapján $\operatorname{supp} f \cdot \mu \subset \operatorname{supp} \mu$ ezért $f \cdot \mu \in \mathcal{M}_c(X)$ teljesül, illetve mivel $\forall U \in \mathscr{T}_X$ esetén $\overline{\mu} \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};U) = 0 \Leftrightarrow \mu \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{C};U) = 0$ így $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\overline{\mu}$ fennáll amiből $\overline{\mu} \in \mathcal{M}_c(X)$ adódik. ■

A későbbiekben felhasználjuk a következő nevezetes tételt (ld. [Bou04, III, §4, No.1, Thm.1-2]).

**1.6.9 Tétel. (Radon-mértékek tenzorszorzata és az elemi Fubini-tétel)** *Legyen $X$ és $Y$ LCH tér, valamint $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ és $\lambda \in \mathscr{K}(Y;\mathbb{C})'$. Ekkor $\exists!\ \mu \otimes \lambda \in \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{C})'$ melyre $\forall f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C}), g \in \mathscr{K}(Y;\mathbb{C})$ esetén $(\mu \otimes \lambda)(f \otimes g) = \mu(f)\lambda(g)$. Továbbá $\forall f \in \mathscr{K}(X \times Y;\mathbb{C})$ esetén $(\mu \otimes \lambda)(f) = \mu(x \mapsto \lambda(f \circ \mathrm{in}_{2,x})) = \lambda(y \mapsto \mu(f \circ \mathrm{in}_{1,y}))$.*

Az alábbiakban ismertetünk egy eljárást melynek segítségével pozitív Radon-mértékek értelmezési tartományait „kibővíthetjük” majd az újonnan definiált tereken bizonyos speciális operátorokat, úgynevezett integrálokat adhatunk meg. Továbbá megnézzük a szóbanforgó terek egy fontos karakterizációját, mely a gyakorlatban jól használható annak eldöntésére, hogy adott függvények hozzátartoznak-e ezekhez a terekhez vagy sem. A felépítés során leginkább [Já21, Függelék]-t követjük, valamint a konkrétan meg nem hivatkozott állítások is megtalálhatók ebben.

Legyen $X$ LCH tér. Ekkor $\mathscr{K}(X;\mathbb{R})$ lineáris függvényháló $\mathbb{R}$ felett melynek pozitív elemeinek összességét $\mathscr{K}_+(X)$ jelöli. Legyen

$$\overline{\mathscr{K}_+(X)} := \left\{ f \in \mathscr{F}_+(X) \mid f = \bigvee_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}_+(X) \\ \varphi \leq f}} \varphi \right\}$$

Belátható, hogy $\overline{\mathscr{K}_+(X)}$ elemei éppen az $X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ alulról félig folytonos függvények, valamint, hogy ez a halmaz tartalmazza $\mathscr{K}_+(X)$-t és rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

(i) $\forall f, g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha f, f + g, f \wedge g, f \vee g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}$

(ii) $\forall H \subset \overline{\mathscr{K}_+(X)} \Rightarrow \sum_{f \in H} f, \bigvee_{f \in H} f \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}$

Legyen most a $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték rögzített és $f \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}$ esetén legyen

$$\mu_0^*(f) := \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}_+(X) \\ \varphi \leq f}} \mu(\varphi)$$

Az így kapott $\mu_0^* : \overline{\mathscr{K}_+(X)} \to \overline{\mathbb{R}}_+; f \mapsto \mu_0^*(f)$ leképezés láthatóan kiterjesztése $\mu$-nek, valamint $\mu_0^*$ monoton, pozitív homogén, additív illetve teljesülnek a következők:

(i) ha $H \subset \overline{\mathscr{K}_+(X)}$ felfele irányított, akkor $\mu_0^*\left(\bigvee_{f \in H} f\right) = \bigvee_{f \in H} \mu_0^*(f)$;

(ii) ha $H \subset \overline{\mathscr{K}_+(X)}$ tetszőleges, akkor $\mu_0^*\left(\sum_{f \in H} f\right) = \sum_{f \in H} \mu_0^*(f)$.

Most $\mu_0^*$-t tovább terjesztjük a bővebb $\mathscr{F}_+(X)$ térre: tetszőleges $f \in \mathscr{F}_+(X)$ esetén (az $\inf \emptyset = +\infty$ megállapodással), legyen

$$\mu^*(f) := \inf_{\substack{g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)} \\ f \leq g}} \mu_0^*(g).$$

Ekkor a $\mu^* : \mathscr{F}_+(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+; f \mapsto \mu^*(f)$ leképezés kiterjesztése a $\mu_0^*$ leképezésnek, valamint monoton, pozitív homogén, szubadditív és monoton $\sigma$-folytonos, azaz $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}_+(X) : \forall n \in \mathbb{N} : f_n \leq f_{n+1}$ esetén $\mu^*\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n\right) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(f_n)$ (egy ilyen leképezést $X$ feletti *felső integrálnak* nevezzük).

**1.6.10 Állítás. (Hölder egyenlőtlenség)** *Ha $\alpha, \beta \in [0,1] : \alpha + \beta = 1$, akkor (a $0 \cdot \infty := 0$ konvencióval)*

$$f, g \in \mathscr{F}_+(X) \Rightarrow \mu^*(f^\alpha g^\beta) \leq \mu^*(f)^\alpha \mu^*(g)^\beta$$

Ezen állítás felhasználásával belátható, hogy $p \geq 1$ esetén a

$$\mu_p^* : \mathscr{F}_+(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+; f \mapsto (\mu^*(f^p))^{\frac{1}{p}}$$

leképezés szintén felső integrál $X$ felett. Legyen most $F$ normált tér és $p \geq 1$ esetén definiáljuk a következő halmazt:

$$\mathscr{F}_F^p(X; \mu^*) := \{f \in \mathscr{F}(X; F) \mid \|f\|_{\mu^*, p} := \mu_p^*(\|f\|) < \infty\}.$$

Ekkor igaz a következő állítás.

**1.6.11 Állítás.** *Ha $p \geq 1$ és $F$ normált-tér, akkor $\mathscr{F}_F^p(X,\mu^*) \subset \mathscr{F}(X;F)$ lineáris altér amelyen a $\|\cdot\|_{\mu^*,p} : \mathscr{F}_F^p(X;\mu^*) \to \mathbb{R}; f \mapsto \|f\|_{\mu^*,p}$ leképezés félnormát definiál. Amennyiben az $F$ tér teljes, úgy ez a félnormált tér is teljes.*

Ha most $F$ Banach-tér és $f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F$, akkor $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k z_k$ alkalmas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{K}(X;\mathbb{R}), z_1, \ldots, z_n \in F$ választással. Így $\mu_p^*$ tulajdonságai alapján

$$\|f\|_{\mu^*,p} = \mu_p^*(\|f\|) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_p^*(|\varphi_k|)\,\|z_k\| = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(|\varphi_k|^p)^{\frac{1}{p}}\,\|z_k\| = \sum_{k=1}^{n} \mu(|\varphi_k|^p)^{\frac{1}{p}}\,\|z_k\| < \infty$$

amiből $\mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F \subset \mathscr{F}_F^p(X;\mu^*)$ adódik. Így definiálhatjuk az

$$\mathscr{L}_F^p(X;\mu^*) := \overline{\mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F} \subset \mathscr{F}_F^p(X;\mu^*)$$

(ahol a lezárás a $\|\cdot\|_{\mu^*,p}$ félnorma szerint értendő) teret, amelyről az eddigiek alapján könnyen látható, hogy a $\|\cdot\|_{\mu^*,p}$ félnormával ellátva szintén teljes félnormált tér és ezáltal az $\mathrm{L}_F^p(X;\mu^*) := \mathscr{L}_F^p(X;\mu^*)/\operatorname{Ker}\|\cdot\|_{\mu^*,p}$ faktortér a faktornormával ellátva Banach-tér. A továbbiakban $^\bullet : \mathscr{L}_F^p(X;\mu^*) \to \mathrm{L}_F^p(X;\mu^*)$ jelöli a természetes faktorleképezést, illetve $f^\bullet$ az $f \in \mathscr{L}_F^p(X;\mu^*)$ elem ezen leképezés általi képét.
Az alábbiakban utalunk arra, hogy $p = 1$ esetén az $\mathscr{L}_F^1(X;\mu^*)$ tereken megadhatók bizonyos kitüntetett folytonos lineáris operátorok: belátható, hogy egyértelműen létezik olyan $I_\mu : \mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F \to F$ lineáris operátor, melyre $\forall f \in \mathscr{K}(X;\mathbb{R}), z \in F$ : $I_\mu(f \otimes z) = \mu(f)z$, valamint, hogy $g \in \mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F$ esetén $\|I_\mu(g)\| \leq \|g\|_{\mu^*,1}$. Így mivel $\mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F \subset \mathscr{L}_F^1(X;\mu^*)$ sűrű lineáris altér, az ismert kiterjesztési tétel alapján egyértelműen létezik olyan $\widetilde{I_\mu} \in \mathscr{L}(\mathscr{L}_F^1(X;\mu^*), F)$ operátor, melyre $\widetilde{I_\mu} \upharpoonright \mathscr{K}(X;\mathbb{R}) \otimes F = I_\mu$.

**1.6.12 Definíció.** *Ha $F$ Banach-tér, akkor azt az, előbbiek szerint egyértelműen létező, $\mathscr{L}_F^1(X;\mu^*) \to F$ folytonos lineáris operátort, mely az $I_\mu$ operátornak kiterjesztése $\mu^*$-integrálnak nevezzük és a továbbiakban a $\int d\mu$ jelölést használjuk rá.*

Igaz a következő, $\mathscr{L}_F^p(X;\mu^*)$ terek kapcsolatáról szóló állítás.

**1.6.13 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér, $F, G$ Banach-terek, valamint $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték. Ha $u \in \mathscr{L}(F,G)$ $\mathbb{R}$-lineáris operátor, valamint $p \geq 1$, akkor $\forall f \in \mathscr{L}_F^p(X;\mu^*)$ esetén $u \circ f \in \mathscr{L}_G^p(X;\mu^*)$ és $\|u \circ f\|_{\mu^*,p} \leq \|u\|_{op} \|f\|_{\mu^*,p}$, valamint $p = 1$ esetén $\int u \circ f d\mu = u\left(\int f d\mu\right)$.*

Az alábbiakban röviden szót ejtünk az $\mathscr{L}^p_F(X;\mu^*)$ terek *mérhetőséggel* való karakterizációjáról. Legyen $X$ LCH tér, $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték és tekintsük a következő leképezést: $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+; A \mapsto \mu^*(A) := \mu^*(\chi_A)$ (Az értelmezési tartományok különbözősége miatt nem okoz félreértést, hogy ezt a leképezést ugyanúgy jelöljük, mint a $\mu^*$ felső integrált). Erről a $\mu^*$ felső integrál négy tulajdonsága alapján belátható, hogy Carathéodory-féle külső mérték az $X$ halmazon. Jelölje $\mathcal{M}(X;\mu^*) \subset \mathscr{P}(X)$ a $\mu^*$ külső mérték szerint Carathéodory-mérhető halmazok összességét , valamint definiáljuk a $\mathcal{R}(X;\mu^*) := \{A \in \mathcal{M}(X;\mu^*) \mid \mu^*(A) < \infty\}$ halmazt, melynek elemeit $\mu^*$-*integrálható* halmazoknak nevezünk. Ismert (ld. [HR79, III, §11, (11.29)]), hogy $\mathcal{M}(X;\mu^*)$ $\sigma$-algebra amelyen $\mu^*$ pozitív $\sigma$-additív halmazfüggvény (mérték), valamint $\mathcal{R}(X;\mu^*)$ $\delta$-gyűrű. Igazak továbbá az alábbi tulajdonságok (ld. [HR79, III, §11, (11.30), (11.32)]):

**1.6.14 Állítás.** *A fenti jelöléseket használva $\mathscr{B}(X) \subset \mathcal{M}(X;\mu^*)$ (ahol $\mathscr{B}(X)$ jelöli $X$ Borel részhalmazainak összességét), valamint $\forall K \subset X$ kompakt halmazra $\mu^*(K) < \infty$. Továbbá $\forall A \subset X : \mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subset U \in \mathscr{T}_X\}$, valamint $\forall B \in \mathcal{R}(X;\mu^*)$ : $\mu^*(B) = \sup\{\mu^*(K) \mid K \subset B,\ K \text{ kompakt}\}$. Előbbi tulajdonságot szóban úgy fejezzük ki, hogy a $\mu^*$ külső mérték kívülről nyílt-reguláris, utóbbit pedig úgy, hogy a $\mu^*$-integrálható halmazokon belülről kompkat reguláris.*

**1.6.15 Definíció.** *Legyen $X$ LCH tér, $T$ topologikus tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték. Ekkor egy $f \in \mathscr{F}(X;T)$ függvényt $\mu^*$-mérhető lépcsősfüggvénynek nevezünk, ha $\emptyset \neq \operatorname{Ran} f \subset T$ véges halmaz és $\forall y \in Ranf$ : $\overset{-1}{f}(\{y\}) \in \mathcal{M}(X;\mu^*)$. Egy $f \in \mathscr{F}(X;T)$ függvényt $\mu^*$-mérhetőnek nevezünk, ha $\forall K \in \mathcal{R}(X;\mu^*) : \exists(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}(X;T)$ $\mu^*$-mérhető lépcsősfüggvények olyan sorozata, melyre $\mu^*$ m.m. $x \in K$ esetén $\varphi_n(x) \to f(x)$.*

Igaz a következő mérhetőségi kritérium (ld. [Bou04, IV, §5, No.5, Thm.4]).

**1.6.16 Tétel.** *Legyen $X$ LCH tér, $(M,d)$ metrikus tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték. Ekkor egy $f \in \mathscr{F}(X;M)$ függvény pontosan akkor $\mu^*$-mérhető, ha teljesülnek az alábbi feltételek*

(i) $\forall y \in M : \forall r > 0$ *esetén* $\overset{-1}{f}(\overline{\mathrm{B}}_r(y)) \in \mathcal{M}(X;\mu^*)$;

(ii) $\forall K \in \mathcal{R}(X;\mu^*) : \exists N \subset X : \mu^*(N) = 0$ *és amelyre* $f(K \setminus N) \subset M$ *szeparábilis.*

**1.6.17 Megjegyzés.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték. Az eddigiekből következik, hogy ha $(M,d)$ metrikus tér, akkor $\forall f \in C(X;M)$ függvény $\mu^*$-mérhető, ugyanis $y \in F, r > 0$ esetén $\overline{\mathrm{B}}_r(y)$ Borel halmaz így $\overset{-1}{f}(\overline{\mathrm{B}}_r(y)) \in \mathscr{B}(X) \subset$*

*$\mathcal{M}(X;\mu^*)$. Továbbá ha $B \in \mathcal{R}(X;\mu^*)$, akkor belátható, hogy $\mu^*$ belülről való kompakt regularitása miatt $\exists (K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ kompakt halmazok sorozata, illetve $\exists N \subset X$ : $\mu^*(N) = 0$, melyekre $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \cup N$. Így $f$ folytonossága miatt $\forall n \in \mathbb{N} : f(K_n) \subset M$ kompakt, tehát szeparábilis és mivel megszámlálható sok szeparábilis halmaz uniója szeparábilis így kapjuk, hogy $f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n\right) \subset M$ szeparábilis.*

A következő tétel a mérhetőség és az integrálhatóság kapcsolatáról szól (ld. [Bou04, IV, §5, No.6, Thm.5]).

**1.6.18 Tétel.** *Legyen $X$ LCH tér, $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték, $F$ Banach-tér, valamint $p \geq 1$. Ekkor $f \in \mathscr{F}(X;F)$ esetén $f \in \mathscr{L}^p_F(X;\mu^*)$ pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathscr{F}^p_F(X;\mu^*)$ és $f$ $\mu^*$-mérhető.*

**1.6.19 Megjegyzés.** *Legyen $X$ LCH tér és $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték, $F$ Banach-tér, valamint $p \geq 1$. Az eddigiek alapján könnyen beláthatjuk, hogy $\mathscr{K}(X;F) \subset \mathscr{L}^p_F(X;\mu^*)$ ugyanis, ha $f \in \mathscr{K}(X;F)$, akkor $\forall x \in X : \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty \chi_{\operatorname{supp} f}$ így $\mu^*_p$ monotonitását és pozitív homogenitását kihasználva $\|f\|_{\mu^*,p} \leq \|f\|_\infty \mu^*(\operatorname{supp} f)^{\frac{1}{p}} < \infty$ adódik, mivel, ahogy a fenti tétel állítja, minden kompakt halmaz eleme az $\mathcal{R}(X;\mu^*)$ halmaznak. Így $f \in \mathscr{F}^p_F(X;\mu^*)$. A folytonos függvények $\mu^*$-mérhetőségét láttuk korábban.*

**1.6.20 Megjegyzés.**

(i) *Legyen $X$ LCH tér, $F$ Banach-tér, $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték, $p \geq 1$. Ekkor $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_{\mu^*,p}} \upharpoonright \mathscr{K}(X;F) \preccurlyeq \mathscr{T}_{ind}$ teljesül a következők miatt. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\mathrm{B}^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}_\varepsilon(0) \cap \mathscr{K}(X;F) \subset \mathscr{K}(X;F)$ konvex, kiegyensúlyozott, elnyelő halmaz (mert $\mathrm{B}^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}_\varepsilon(0)$ félnorma szerinti gömb). Legyen $K \subset X$ kompakt és legyen $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{\|\chi_K\|_{\mu^*,p}}$ (amenyiben $\|\chi_K\|_{\mu^*,p} \neq 0$, ellenkező esetben legyen pl. $\varepsilon' := 1$). Ha $f \in \mathscr{K}(X;F;K) \cap \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon'}(0)$, akkor mivel $\|f\| \leq \|f\|_\infty \chi_K$ így*

$$\|f\|_{\mu^*,p} \leq \|f\|_\infty \|\chi_K\|_{\mu^*,p} < \varepsilon' \|\chi_K\|_{\mu^*,p} = \varepsilon$$

*tehát $f \in \mathscr{K}(X;F;K) \cap \mathrm{B}^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}_\varepsilon(0)$ amiből következik, hogy $\mathscr{K}(X;F;K) \cap \mathrm{B}^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}_\varepsilon(0)$ környezete a 0 pontnak a $\mathscr{K}(X;F;K)$ térben. Így tehát (1.3.5) (ii) szerint $\mathrm{B}^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}_\varepsilon(0) \in \mathscr{T}_{ind}(0)$ vagyis $(\mathscr{T}_{\|\cdot\|_{\mu^*,p}} \upharpoonright \mathscr{K}(X;F))(0) \preccurlyeq \mathscr{T}_{ind}(0)$ (a 0-beli környezetszűrő finomabb) így a topológiák linearitása miatt $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_{\mu^*,p}} \upharpoonright \mathscr{K}(X;F) \preccurlyeq \mathscr{T}_{ind}$ is fennáll.*

(ii) *Az előző megjegyzésből következik, hogy $p = 1$ esetén a*

$$\int d\mu \restriction \mathscr{K}(X;F) : \mathscr{K}(X;F) \to F$$

*leképezés $(\mathscr{T}_{\text{ind}}, \mathscr{T}_F)$-folytonos lineáris operátor amiből, (1.3.6) alapján, adódik, hogy $\forall K \subset X$ kompakt halmazhoz $\exists C_K > 0$ szám, melyre*

$$f \in \mathscr{K}(X;F;K) \Rightarrow \left\| \int f d\mu \right\| \leq C_K \|f\|_\infty .$$

**1.6.21 Megjegyzés.** *Ha $X$ LCH tér, $m : \mathscr{F}_+(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ felső integrál $X$ felett, valamint $\psi : X \to X$ homeomorfizmus, akkor közvetlenül ellenőrizhető, hogy a $\psi(m) : \mathscr{F}_+(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+; f \mapsto m(f \circ \psi)$ leképezés szintén felső integrál $X$ felett. Korábban láttuk, hogy ha $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ Radon-mérték, akkor a hasonlóan értelmezett $\psi(\mu)$ szintén Radon-mérték amely pozitív, ha $\mu$ pozitív. Igaz a következő állítás, mely a fenti kétlépcsős kiterjesztés ezen eljárásokkal való felcserélhetőségét fejezi ki.*

**1.6.22 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér, $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték, valamint $\psi : X \to X$ homeomorfizmus. Ekkor $\psi(\mu)^* = \psi(\mu^*)$.*

*Bizonyítás.* Először azt igazoljuk, hogy $\psi(\mu)^* = \psi(\mu^*)$ a $\overline{\mathscr{K}_+(X)}$ halmazon. Ehhez megjegyezzük, hogy ha $f \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}, \varphi \in \mathscr{K}_+(X)$, akkor $f \circ \psi \in \overline{\mathscr{K}_+(X)}$ és $\varphi \leq f \Leftrightarrow \varphi \circ \psi \leq f \circ \psi$. Emiatt

$$\psi(\mu^*)(f) = \mu^*(f \circ \psi) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}_+(X) \\ \varphi \leq f \circ \psi}} \mu(\varphi) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}_+(X) \\ \varphi \leq f}} \mu(\varphi \circ \psi) = \psi(\mu)^*(f).$$

Ha most $f \in \mathscr{F}_+(X)$ tetszőlges akkor $\forall g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)} : f \leq g \Leftrightarrow f \circ \psi \leq g \circ \psi$ és emiatt

$$\psi(\mu^*)(f) = \mu^*(f \circ \psi) = \inf_{\substack{g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)} \\ f \circ \psi \leq g}} \mu^*(g) = \inf_{\substack{g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)} \\ f \leq g}} \mu^*(g \circ \psi) = \inf_{\substack{g \in \overline{\mathscr{K}_+(X)} \\ f \leq g}} \psi(\mu)^*(g) = \psi(\mu)^*(f).$$

Tehát $\psi(\mu)^* = \psi(\mu^*)$. ■

A harmonikus analízis alaptételéhez szükségünk lesz még a gyenge vektorintegrál fogalmára és ennek néhány tulajdonságára (ld. [Fol15, Appendix, No.4]).

**1.6.23 Definíció.** *Legyen $X$ LCH tér, $F$ topologikus vektortér amely felett $F'$ szétválaszt, valamint $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték. Ekkor egy $\varphi \in \mathscr{F}(X;F)$ függvényt $\mu$ szerint gyengén integrálhatónak nevezünk, ha $\forall f \in F'$ esetén $f \circ \varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(X;\mu^*)$ teljesül. Ekkor, ha $\exists y \in F$ amelyre $\forall f \in F' : f(y) = \int f \circ \varphi d\mu$ (az $F$ térre tett megkötés miatt $y$ szükségképpen egyértelmű), akkor ezt az $y$ elemet $\varphi$ $\mu$ szerinti gyenge integráljának nevezzük és a $\int^{\mathrm{w}} \varphi d\mu$ jelölést használjuk rá a továbbiakban.*

**1.6.24 Állítás.** *Legyen $X$ LCH tér, $F, G$ topologikus vektorterek amelyek felett a duálisaik szétválasztanak, $\mu \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})'$ pozitív Radon-mérték, valamint $\varphi \in \mathscr{F}(X;F)$ $\mu$ szerint gyengén integrálható függvény amelyre $\exists \int^{\mathrm{w}} \varphi d\mu \in F$. Ekkor $u \in \mathscr{L}(F,G)$ esetén $u \circ \varphi$ szintén $\mu$ szerint gyengén integrálható, valamint $\exists \int^{\mathrm{w}} u \circ \varphi d\mu \in G$ amelyre $\int^{\mathrm{w}} u \circ \varphi d\mu = u\left(\int^{\mathrm{w}} \varphi d\mu\right)$ teljesül.*

# 2. fejezet

# Topologikus csoportok és elemi reprezentációelmélet

## 2.1. Csoporthatások, topologikus csoportok ábrázolásai

A későbbiekben hivatkozás nélkül használjuk topologikus csoportok alábbi alapvető tulajdonságait (ld. [Fol15, 2, No.2.1]).

**2.1.1 Állítás.** *Legyen $G$ topologikus csoport.*

(i) *Ha $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}_G(1)$ környezetbázisa az egységelemnek, akkor $\forall U \in \mathscr{B} : \exists V \in \mathscr{B}$ amelyre $VV \subset U$ teljesül.*

(ii) *Létezik $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}_G(1)$ szimmetrikus halmazokból álló környezetbázisa az egységelemnek (azaz olyan, melyre $\forall V \in \mathscr{B} : V = V^{-1}$). Amennyiben $G$ LCH csoport, úgy ezen környezetek kompaktnak is választhatók.*

(iii) *Ha $A, B \subset G$ kompakt halmazok akkor $AB \subset G$ is kompakt halmaz.*

**2.1.2 Megjegyzés.** *Legyen $G$ topologikus csoport, $H \subset G$ tetszőleges részcsoport. Jelölje $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ a $H$ szerinti bal mellékosztályok halmazát, valamint $q : G \to G/H; g \mapsto gH$ a természetes faktorleképezést. Lássuk el a $G/H$ halmazt a $q$ leképezés által meghatározott $\mathscr{T}_{G/H}$ finális topológiával, azaz, azzal a legbővebb topológiával, melyre nézve $q$ folytonos. Ekkor $q$ nyílt leképezés, ugyanis $U \in \mathscr{T}_G$ esetén $\mathscr{T}_G \ni UH = \overset{-1}{q}(q(U))$ így $q(U) \in \mathscr{T}_{G/H}$, mivel $\mathscr{T}_{G/H}$ a legbővebb topológia, melyre nézve $q$ folytonos. Erre a faktortérre igazak az alábbi állítások (ld. [Fol15, 2, No.2.1, Prop. 2.2]).*

**2.1.3 Állítás.** *Legyen $G$ topologikus csoport, $H \subset G$ tetszőleges részcsoport. Ekkor igazak az alábbiak.*

(i) *Ha $H$ zárt, akkor $G/H$ Hausdorff tér.*

(ii) *Ha $G$ lokálisan kompakt csoport, akkor $G/H$ lokálisan kompakt tér.*

**2.1.4 Definíció. (Folytonos csoporthatás)** *Legyen $G$ topologikus csoport, $S$ topologikus tér. Ekkor egy $\rho : G \times S \to S$ leképezés folytonos csoporthatás, ha $(\mathscr{T}_G \times \mathscr{T}_S, \mathscr{T}_S)$-folytonos és ($g \in G : \rho_g := \rho(g, \cdot)$ jelölést használva) $\rho_1 = id_S$ illetve $\forall s \in S : \forall g, h \in G : \rho_{gh}(s) = \rho_g(\rho_h(s))$. A $\rho$ hatást tranzitívnak mondjuk, ha $\forall s, t \in S : \exists g \in G : \rho_g(s) = t$.*

**2.1.5 Megjegyzés.**

(i) *Mivel $\forall g \in G : \rho_g : S \to S$ folytonos és $\rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \rho_{gg^{-1}} = \rho_1 = id_S$ (hasonlóan $\rho_{g^{-1}} \circ \rho_g = id_S$) így $(\rho_g)^{-1} = \rho_{g^{-1}}$ és emiatt $\rho_g$ homeomorfizmus.*

(ii) *Egy $G$ topologikus csoportnak természetes módon definiálhatjuk két folytonos hatását önmagán bal és jobb eltolások révén:*
*$L : G \times G \to G; (g, x) \mapsto gx$ illetve $R : G \times G \to G; (g, x) \mapsto xg^{-1}$ ($g, h, x \in G : R_{gh}(x) = x(gh)^{-1} = (xh^{-1})g^{-1} = R_g(xh^{-1}) = R_g(R_h(x))$; a többi tulajdonság láthatóan teljesül mindkét leképezésre).*

**2.1.6 Megjegyzés.** *A továbbiakban fontosak lesznek a következő speciális csoporthatások: legyen $G$ topologikus csoport, $H \subset G$ tetszőleges részcsoport. Ekkor a $H$ szerinti bal mellékosztályok terén természetes módon értelmezhető a $G$ csoportnak egy hatása: $\rho : G \times G/H \to G/H; (x, yH) \mapsto (xy)H$. Ellenőrizhető, hogy ez a leképezés jóldefiniált (nem függ a mellékosztálybeli reprezentáns választásától), valamint látható, hogy $\forall y, x_1, x_2 \in G$ esetén*

$$\rho_{x_1x_2}(yH) = ((x_1x_2)y)H = (x_1(x_2y))H = \rho_{x_1}(\rho_{x_1}(yH))$$

*és $\rho_1 = id_{G/H}$. Most belátjuk, hogy ez a leképezés folytonos: jelölje $q : G \to G/H$ a természetes faktorleképezést illetve $p : G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ a csoportszorzást. Definiáljuk a $\psi : G \times G \to G \times G/H : (x, y) \mapsto (x, q(y))$ leképezést melyről látható, hogy folytonos szürjekció. Továbbá $\psi$ nyílt leképezés is: elég látni, hogy a szorzattopológia egy bázisának elemeit nyíltakba képezi viszont ez teljesül, mivel $U, V \in \mathscr{T}_G$ esetén $\psi(U \times V) = U \times q(V)$ ami nyílt a szorzattérben, mivel $q$ nyílt leképezés. Ezenfelül, $x, y \in G$ esetén*

$$\rho(\psi(x, y)) = \rho(x, yH) = (xy)H = q(xy) = q(p(x, y))$$

*így $\rho \circ \psi = q \circ p$ és utóbbi folytonos. Így ha $U \in \mathscr{T}_{G/H} : (\overset{-1}{\rho \circ \psi})(U) = \overset{-1}{\psi}(\overset{-1}{\rho}(U))$ nyílt így mivel $\psi$ szürjektív és nyílt: $\overset{-1}{\rho}(U) = \psi(\overset{-1}{\psi}(\overset{-1}{\rho}(U)))$ nyílt tehát $\rho$ folytonos. Ezenfelül $\rho$ tranzitív hatás, ugyanis tetszőleges $x, y \in G$ elemekre: $\rho_{yx^{-1}}(xH) = (yx^{-1}x)H = yH$.*

**2.1.7 Definíció. (Csoporthatásra invariáns Radon-mérték)** *Legyen $G$ topologikus csoport, $S$ LCH tér és $\rho : G \times S \to S$ folytonos csoporthatás. Ekkor egy $\mu \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})'$ : $\mu \neq 0$ $\rho$-invariáns, ha $\forall g \in G : \rho_g(\mu) = \mu$. Speciálisan, ha $G$ LCH csoport és $\mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ $L(R)$-invariáns akkor a $\mu$ mértéket bal(jobb)-invariánsnak mondjuk.*

Igaz a következő nevezetes állítás (ld. [Fol15, 2, No.2.2]).

**2.1.8 Állítás.** *Legyen $G$ LCH csoport. Ekkor $\exists \mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})' : \mu \neq 0$ pozitív, bal-invariáns Radon-mérték, továbbá ha $\mu' \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})' : \mu' \neq 0$ is pozitív, bal-invariáns Radon-mérték, akkor $\exists c > 0 : \mu' = c\mu$. Egy ilyen $\mu$ mértéket bal oldali Haar-mértéknek nevezünk (felfedezője, Haar Alfréd után). (Hasonlóan igaz nem nulla, pozitív, jobb-invariáns Radon mértékek létezése is a $G$ csoport felett; ekkor jobb oldali Haar-mértékekről beszélünk.)*

A továbbiakban, valahányszor tekintünk egy $G$ LCH csoportot azon adottnak tekintünk egy $\mu_G$ bal oldali Haar-mértéket. Az egységesség kedvéért mind az $\mathscr{L}^1_F(G;\mu^*_G)$ ($F$ Banach-tér) terek feletti integrálokat, mind $\mu_G$-t $\int d\mu_G$-vel fogjuk jelölni. Ha ki szeretnénk hangsúlyozni a „változót ami szerint integrálunk” akkor az $\int f(x)d\mu_G(x)$ írásmódot alkalmazzuk.

**2.1.9 Jelölés.** *Legyen $X$ halmaz és $\mathrm{Perm}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ bijekció}\}$. Ekkor $(\mathrm{Perm}(X); \circ)$ csoport.*

**2.1.10 Definíció. (Topologikus csoportok ábrázolása)** *Legyen $G$ topologikus csoport, $X$ halmaz. Ekkor egy $\pi : G \to \mathrm{Perm}(X)$ csoport-homomorfizmust a $G$ csoport $X$ feletti ábrázolásának nevezünk. Amennyiben $X$ vektortér (illetve $X$ topologikus tér) és $\forall g \in G : \pi(g) \in \mathrm{Aut}(X)$ (illetve $\pi(g) : X \to X$ homeomorfizmus) úgy $\pi$ a $G$ csoportnak $X$ feletti lineáris (topologikus) ábrázolása. Ha $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és $\pi$ olyan lineáris ábrázolása a $G$ csoportnak $X$ felett, amelyre $\forall g \in G : \pi(g)$ izometria, akkor a $\pi$ ábrázolást unitérnek mondjuk. Továbbá, ha $X$ topologikus tér és a $G \times X \to X; (g, x) \mapsto \pi(g)x$ leképezés $(\mathscr{T}_G \times \mathscr{T}_X; \mathscr{T}_X)$-folytonos, akkor a $\pi$ ábrázolást folytonosnak mondjuk.*

**2.1.11 Megjegyzés.**

(i) *Amennyiben $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbert-tér abban az esetben is értelmes a fenti definíció; ekkor pre-Hilbert-tér feletti unitér ábrázolásról beszélünk.*

(ii) *Legyen $G$ topologikus csoport, $X$ topologikus tér és $\rho : G \times X \to X$ folytonos csoporthatás. Ekkor a $\pi : G \to \mathrm{Perm}(X); g \mapsto \rho_g$ leképezésről $\rho$ tulajdonságai alapján látható,* *hogy folytonos topologikus ábrázolása a $G$ csoportnak $X$ felett. Fordítva, ha adott egy $\pi : G \to \mathrm{Perm}(X)$ folytonos topologikus ábrázolás akkor $\rho : G \times X \to X; (g,x) \mapsto \pi(g)x$ folytonos csoporthatás, ugyanis mivel $\pi$ homomorfizmus, így $\rho_1 = \pi(1) = id_X$, valamint $\forall g,h \in G : \forall x \in X : \rho_{gh}(x) = \pi(gh)x = \pi(g)(\pi(h)x) = \rho_g(\rho_h(x))$. A hatás folytonossága megegyezik az ábrázolás folytonosságával.*

**2.1.12 Definíció. (Folytonos unitér ábrázolások unitér ekvivalenciája)** *Legyen $G$ topologikus csoport továbbá legyenek $\pi_i : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_{\pi_i})$ $(i = 1,2)$ folytonos unitér ábrázolásai a $G$ csoportnak. Ekkor amennyiben létezik olyan $W : \mathscr{H}_{\pi_1} \to \mathscr{H}_{\pi_2}$ unitér leképezés, melyre $\forall g \in G : W \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ W$ úgy a $\pi_1, \pi_2$ ábrázolásokat unitér ekvivalenseknek mondjuk és ezt a következőképpen jelöljük: $\pi_1 \simeq \pi_2$.*

**2.1.13 Állítás. (Pre-Hilbert-tér feletti unitér ábrázolás folytonosságának jellemzése)** *Legyen $G$ topologikus csoport és $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ unitér ábrázolása a $G$ csoportnak a $\mathscr{H}_\pi$ pre-Hilbert-tér felett. Ekkor a következők ekvivalensek.*

(i) *A $\pi$ ábrázolás folytonos a fenti definíció szerint.*

(ii) *A $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ leképezés folytonos amennyiben a $\mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ teret a $\mathscr{T}_{\mathrm{so}}$ erős operátortopológiával látjuk el.*

(iii) *A $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ leképezés folytonos amennyiben a $\mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ teret a $\mathscr{T}_{\mathrm{wo}}$ gyenge operátortopológiával látjuk el.*

*Bizonyítás.* $(i) \Rightarrow (ii)$ : Legyen $(g_i)_{i\in I} \subset G$ általánosított sorozat, melyre $g_i \to g \in G$. Ekkor tetszőleges $u \in \mathscr{H}_\pi$ esetén a $\pi$ ábrázolás folytonossága miatt $\pi(g_i)u \to \pi(g)u$ vagyis a $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ leképezés $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\mathrm{so}})$-folytonos.

$(ii) \Rightarrow (i)$ : Legyen $(g,u) \in G \times \mathscr{H}_\pi$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\mathrm{so}})$ folytonosságot kihasználva válasszunk egy olyan $V \in \mathscr{T}_G(g)$ környezetet, melyre $\forall h \in V$ : $\|\pi(g)u - \pi(h)u\|_\pi < \varepsilon$. Ekkor $\forall (h,v) \in V \times \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|_\pi}(u) \in \mathscr{T}_{G\times\mathscr{H}_\pi}((g,u))$ esetén

$$\|\pi(h)v - \pi(g)u\|_\pi \leq \|\pi(h)v - \pi(h)u\|_\pi + \|\pi(h)u - \pi(g)u\|_\pi < \|v-u\|_\pi + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Ez mutatja a $\pi$ ábrázolás folytonosságát.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ : Ismert, hogy az $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$ téren $\mathscr{T}_{\mathrm{wo}} \preccurlyeq \mathscr{T}_{\mathrm{so}}$; most megmutatjuk, hogy $\mathscr{T}_{\mathrm{so}} \upharpoonright \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi) \preccurlyeq \mathscr{T}_{\mathrm{wo}} \upharpoonright \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ fennáll, amiből adódik az ekvivalencia. Ehhez elég látni, hogy tetszőleges $(u_i)_{i\in I} \subset \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ általánosított sorozatra ha $u_i \xrightarrow{\mathscr{T}_{\mathrm{wo}}} u \in \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$, akkor $u_i \xrightarrow{\mathscr{T}_{\mathrm{so}}} u$ viszont ez teljesül, ugyanis: $\forall a \in \mathscr{H}_\pi$ esetén

$$\|u_i(a) - u(a)\|_\pi^2 = \|u_i(a)\|_\pi^2 + \|u(a)\|_\pi^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle u_i(a), u(a)\rangle_\pi = 2\,\|a\|_\pi^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle u_i(a), u(a)\rangle_\pi$$

és $u_i \xrightarrow{\mathscr{T}_{\mathrm{wo}}} u$ miatt $\langle u_i(a), u(a)\rangle_\pi \to \|u(a)\|_\pi^2$ így a fenti mennyiség jobb oldala általánosított numerikus zérussorozat és így $u_i \xrightarrow{\mathscr{T}_{\mathrm{so}}} u$ adódik. ■

**2.1.14 Megjegyzés.** *Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a dolgozat további részeiben tekintett pre-Hilbert-terek teljes burkaiknak altereik.*

**2.1.15 Állítás. (Pre-Hilbert-tér feletti folytonos unitér ábrázolás kiterjszetése a teljes burokra)** *Legyen $G$ topologikus csoport és $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ folytonos unitér ábrázolása a $G$ csoportnak a $\mathscr{H}_\pi$ pre-Hilbert-tér felett. Jelölje $\widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ a $\mathscr{H}_\pi$ pre-Hilbert-tér teljes burkát. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\widetilde{\pi} : G \to \mathrm{U}(\widetilde{\mathscr{H}_\pi})$ folytonos unitér ábrázolás, melyre $\forall g \in G : \widetilde{\pi}(g) \restriction \mathscr{H}_\pi = \pi(g)$. Ezt a $\widetilde{\pi}$ folytonos unitér ábrázolást nevezzük a $\pi$ ábrázolás $\mathscr{H}_\pi$ teljes burkára való kiterjesztésének.*

*Bizonyítás.* Legyen $g \in G$ tetszőleges: a $\pi(g) : \mathscr{H}_\pi \to \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ leképezés normált tér sűrű alterén értelmezett, Banach-térbe képező korlátos lineáris operátor így az ismert kiterjesztési tétel alapján $\exists! \widetilde{\pi}(g) \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathscr{H}_\pi}) : \widetilde{\pi}(g) \restriction \mathscr{H}_\pi = \pi(g)$ illetve $\|\widetilde{\pi}(g)\| = \|\pi(g)\|$. Belátjuk, hogy $\widetilde{\pi}(g) \in \mathrm{U}(\widetilde{\mathscr{H}_\pi})$: legyen $x \in \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ tetszőleges és válasszunk egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_\pi$ sorozatot melyre $x_n \to x$. Ekkor

$$\|\widetilde{\pi}(g)x\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \widetilde{\pi}(g)x_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \|\pi(g)x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|,$$

tehát $\widetilde{\pi}(g)$ izometria. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_\pi$ sorozat Cauchy a $\mathscr{H}_\pi$ térben, valamint $\pi(g)^{-1}$ izometria $\Rightarrow$ $(\pi(g)^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ is Cauchy-sorozat így $\widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ teljessége maitt $\exists! y \in \widetilde{\mathscr{H}_\pi} : \pi(g)^{-1}x_n \to y$. Ekkor $x_n = \widetilde{\pi}(g)\pi(g)^{-1}x_n \to \widetilde{\pi}(g)y$ teljesül $\widetilde{\pi}(g)$ folytonossága miatt így $x = \widetilde{\pi}(g)y \in \operatorname{Ran}\widetilde{\pi}(g)$. Mivel $x \in \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ tetszőleges volt így kapjuk, hogy $\widetilde{\pi}(g)$ szürjektív amiből $\widetilde{\pi}(g) \in \mathrm{U}(\widetilde{\mathscr{H}_\pi})$ adódik. Így tehát a $\widetilde{\pi} : G \to \mathrm{U}(\widetilde{\mathscr{H}_\pi}); g \mapsto \widetilde{\pi}(g)$ leképezés jóldefiniált. Ha $g, h \in G$, akkor

$$\widetilde{\pi}(gh) \restriction \mathscr{H}_\pi = \pi(gh) = \pi(g) \circ \pi(h) = \widetilde{\pi}(g) \restriction \mathscr{H}_\pi \circ \widetilde{\pi}(h) \restriction \mathscr{H}_\pi = (\widetilde{\pi}(g) \circ \widetilde{\pi}(h)) \restriction \mathscr{H}_\pi$$

és mivel ezek folytonos függvények, valamint $\mathscr{H}_\pi \subset \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ sűrű lineáris altér így $\widetilde{\pi}(gh) = \widetilde{\pi}(g) \circ \widetilde{\pi}(h)$ vagyis $\widetilde{\pi}$ csoport-homomorfizmus. Végül belátjuk, hogy a $\widetilde{\pi}$ ábrázolás folytonos. Legyen $h \in \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ rögzített. Legyen $g \in G$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges valamint válasszunk egy $u \in \mathscr{H}_\pi : \|h - u\| < \varepsilon$ elemet. Mivel a $\pi$ ábrázolás folytonos így $\exists V \in \mathscr{T}_G(g) : \forall g' \in V : \|\pi(g')u - \pi(g)u\| < \varepsilon$. Ekkor $g' \in V$ esetén

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\pi}(g')h - \widetilde{\pi}(g)h\| &\le \|\widetilde{\pi}(g')h - \widetilde{\pi}(g')u\| + \|\widetilde{\pi}(g')u - \widetilde{\pi}(g)u\| + \|\widetilde{\pi}(g)u - \widetilde{\pi}(g)h\| \le \\ &\le \|h - u\| + \|\pi(g')u - \pi(g)u\| + \|h - u\| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a $g' \mapsto \widetilde{\pi}(g')h$ leképezés folytonos a $g \in G$ pontban és mivel ezt a pontot tetszőlegesen választottuk így folytonos. Tehát eddig azt láttuk be, hogy a $G \times \widetilde{\mathscr{H}_\pi} \to \widetilde{\mathscr{H}_\pi}; (g,u) \mapsto \widetilde{\pi}(g)u$ leképezés szeparáltan folytonos. Legyen most $(g,u) \in G \times \widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A $g' \mapsto \widetilde{\pi}(g')u$ $g$ pontbeli folytonosságát kihasználva válasszunk egy $V \in \mathscr{T}_G(g)$ környezetet, melyre $\forall g' \in V : \|\widetilde{\pi}(g')u - \widetilde{\pi}(g)u\| < \varepsilon$. Ha $(g',u') \in V \times \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|}(u) \in \mathscr{T}_{G\times\widetilde{\mathscr{H}_\pi}}((g,u))$, akkor

$$\|\widetilde{\pi}(g')u' - \widetilde{\pi}(g)u\| \leq \|\widetilde{\pi}(g')u' - \widetilde{\pi}(g')u\| + \|\widetilde{\pi}(g')u - \widetilde{\pi}(g)u\| < \|u-u'\| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

ami mutatja $\widetilde{\pi}$ együttes folytonosságát így $\widetilde{\pi}$ folytonos unitér ábrázolása a $G$ csoportnak a $\widetilde{\mathscr{H}_\pi}$ Hilbert tér felett ami láthatóan kiterjesztése az eredeti $\pi$ ábrázolásnak a fenti értelemben. Az egyértelműség adódik abból, hogy az ábrázolóoperátorok értékei elő vannak írva egy sűrű lineáris altéren, nevezetesen $\mathscr{H}_\pi$-n. ■

A [Já98, XVII, 3§]-ből kölcsönözzük (a teljesség kedvéért bizonyításával együtt), a továbbiakban többször használt, igen hasznos állítást.

**2.1.16 Állítás. (Paraméteres függvények folytonossága)** *Legyenek $T, T'$ topologikus terek, $F$ normált tér és $f : T \times T' \to F$ folytonos függvény. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 : \forall t_0 \in T : \forall K \subset T'$ kompakt halmazhoz $\exists U \in \mathscr{T}_T(t_0) : \sup\limits_{(t,s)\in U\times K} \|f(t_0,s) - f(t,s)\| < \varepsilon$*

*Bizonyítás.* Tetszőleges $k \in K$ esetén az f függvény $(t_0,k)$ pontbeli folytonosságát kihasználva $\exists U_k \in \mathscr{T}_T(t_0) : \exists V_k \in \mathscr{T}_{T'}(k) : f(U_k \times V_k) \subset \mathrm{B}_\varepsilon(f(t_0,k))$. Ekkor mivel $K \subset \bigcup\limits_{k\in K} V_k$ és $K$ kompakt így $\exists n \in \mathbb{N} : \exists k_1,\ldots,k_n \in K : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{k_i}$. Legyen $U := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{k_i} \in \mathscr{T}_T(t_0)$ és $t \in U$ tetszőleges: $s \in K \Rightarrow \exists i \in \{1,\ldots,n\} : s \in V_{k_i} \Rightarrow (t,s) \in U \times V_{k_i} \subset U_{k_i} \times V_{k_i}$ amiből

$$\|f(t_0,s) - f(t,s)\| \leq \|f(t_0,s) - f(t_0,k_i)\| + \|f(t_0,k_i) - f(t,s)\| < 2\varepsilon$$

adódik. Mivel $s \in K, t \in U$ tetszőlegesek voltak így $\sup\limits_{(t,s)\in U\times K} \|f(t_0,s) - f(t,s)\| \leq 2\varepsilon$ áll. ■

**2.1.17 Állítás. (Csoporthatások által indukált ábrázolások)** *Legyen $G$ LCH csoport, $S$ LCH tér illetve $\rho : G \times S \to S$ folytonos csoporthatás, valamint legyen $F$ Banach-tér. Ekkor teljesülnek a következő állítások.*

(i) *Az $L : G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{F}(S;F)); g \mapsto L_g := (f \mapsto f \circ \rho_{g^{-1}})$ leképezés lineáris ábrázolása a $G$ csoportnak.*

(ii) *Az (i)-ben definiált lineáris ábrázolásnak $\mathscr{K}(S;F)$ invariáns altere és így az $L : G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{K}(S;F)); g \mapsto L_g$ leképezés folytonos lineáris és topologikus ábrázolása a $G$*

*csoportnak a $\mathscr{K}(S;F)$ tér felett, amelyet tekinthetünk akár a $\mathscr{T}_{\mathrm{ind}}$, akár a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}$ topológiával.*

(iii) *Ha $\mu \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})'$ pozitív, $\rho$-invariáns Radon-mérték, akkor $\forall p \geq 1$ esetén $\mathscr{L}^p_F(S;\mu^*)$ invariáns altere az (i)-ben definiált lineáris ábrázolásnak és az $L : G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{L}^p_F(S;\mu^*))$; $g \mapsto L_g$ leképezés folytonos lineáris és topologikus ábrázolása a $G$ csoportnak.*

*Bizonyítás.* (i) Mivel $\forall g \in G : \rho_g$ bijekció így könnyen ellenőrizhető, hogy $L_g \in \mathrm{Aut}(\mathscr{F}(S;F))$. Ha $g, h \in G, f \in \mathscr{F}(S;F)$, akkor

$$L_{gh}(f) = f \circ \rho_{(gh)^{-1}} = f \circ \rho_{h^{-1}} \circ \rho_{g^{-1}} = (f \circ \rho_{h^{-1}}) \circ \rho_{g^{-1}} = L_g(L_h(f)) = (L_g \circ L_h)(f)$$

vagyis $L_{gh} = L_g \circ L_h$ tehát $g \mapsto L_g \in \mathrm{Aut}(\mathscr{F}(S;F))$ csoport-homomorfizmus.

(ii) Mivel $\forall g \in G : \rho_g$ homeomorfizmus, így $f \in \mathscr{K}(S;F)$ esetén $L_g(f) \in \mathscr{K}(S;F)$ tehát a fentiek alapján $g \mapsto L_g \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K}(S;F))$ homomorfizmus ezáltal $L$ lineáris ábrázolása a $G$ csoportnak a $\mathscr{K}(S;F)$ tér felett. Ha $g \in G, f \in \mathscr{K}(S;F)$ akkor

$$\|L_g(f)\|_\infty = \sup_{s\in S} \|L_g(f)(s)\| = \sup_{s\in S} \|f(\rho_{g^{-1}}(s))\| = \sup_{s\in S} \|f(s)\| = \|f\|_\infty$$

mivel $\rho_{g^{-1}}$ bijekció, tehát $L_g$ izometria. Most belátjuk L folytonosságát abban az esetben, amikor a $\mathscr{K}(S;F)$ teret a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}$ topológiával látjuk el.

Legyen $f \in \mathscr{K}(S;F)$ rögzített. Belátjuk, hogy $g \mapsto L_g(f)$ folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon > 0$ és $g \in G$ tetszőleges és rögzítsünk egy $V \in \mathscr{T}_G(g)$ kompakt környezetet. Ekkor mivel a $G \times S \to F : (g,s) \mapsto f \circ \rho(g^{-1}, s)$ leképezés folytonos, így a $g$ ponthoz, $\varepsilon$ számhoz és a $K := \rho(V \times \operatorname{supp} f) \subset S$ kompakt halmazhoz a paraméteres függvények folytonosságáról szóló tételből adódik $U \in \mathscr{T}_G(g) : U \subset V$ környezet, melyre

$$\sup_{(h,s)\in U\times K} \|f(\rho_{g^{-1}}(s)) - f(\rho_{h^{-1}}(s))\| = \sup_{(h,s)\in U\times K} \|L_g(f)(s) - L_h(f)(s)\| < \varepsilon.$$

Mivel $\forall h \in V : \operatorname{supp} L_h(f) = \rho_h(\operatorname{supp} f) \subset \rho(V \times \operatorname{supp} f) = K$ ezért az előbbiek alapján $\forall h \in U : \|L_g(f) - L_h(f)\|_\infty < \varepsilon$ tehát a $g \mapsto L_g(f)$ leképezés folytonos a $g$ pontban és így $g$ tetszőleges választása miatt egész az $G$ téren is. Eddig beláttuk, hogy $\forall h \in G : \forall f \in \mathscr{K}(S;F) : g \mapsto L_g(f)$ illetve $L_h$ folytonos leképezések, vagyis $L$ *szeparáltan folytonos*. Legyen most $g_0 \in G, f_0 \in \mathscr{K}(S;F)$ és $\varepsilon > 0$ rögzített. Válasszunk a $g \mapsto L_g(f)$ leképezés $g_0$ pontbeli folytonosságát kihasználva, az $\varepsilon$ számhoz egy $V \in \mathscr{T}_G(g_0)$ környezetet. Ekkor $\forall g \in V : \forall f \in \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_\varepsilon(f_0)$ esetén

$$\|L_g(f) - L_{g_0}(f_0)\|_\infty \leq \|L_g(f) - L_{g_0}(f)\|_\infty + \|L_{g_0}(f) - L_{g_0}(f_0)\|_\infty \leq \varepsilon + \|f - f_0\|_\infty \leq 2\varepsilon,$$

amiből következik $L$ folytonossága.

Tekintsük most a $\mathscr{K}(S;F)$ teret a $\mathscr{T}_{\text{ind}}$ topológiával ellátva. Legyen $g \in G$ rögzített és $K \subset S$ tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor $\forall f \in \mathscr{K}(S;F;K) : \operatorname{supp} L_g(f) = \rho_g(\operatorname{supp} f) \subset \rho_g(K)$ tehát $L_g(\mathscr{K}(S;F;K)) \subset \mathscr{K}(S;F;\rho_g(K))$. Láttuk, hogy $L_g$ $\|\cdot\|_\infty$-ra nézve izometria, ezért $L_g \circ \mathrm{in}_K : \mathscr{K}(S;F;K) \to \mathscr{K}(S;F;\rho_g(K))$ folytonos lineáris operátor, így az (1.4.3) (ii) szerint $L_g$ $(\mathscr{T}_{\text{ind}}, \mathscr{T}_{\text{ind}})$-folytonos. Legyen most $f \in \mathscr{K}(S;F)$, $g \in G$ rögzített továbbá rögzítsünk egy $V \in \mathscr{T}_G(g)$ kompakt környezetet. Ekkor $\forall h \in V$ : $\operatorname{supp} L_h(f) = \rho_h(\operatorname{supp} f) \subset \rho(V \times \operatorname{supp} f)$ vagyis $L.(f)(V) \subset \mathscr{K}(S;F;\rho(V \times \operatorname{supp} f))$. Mivel $L.(f)$ $g$ pontbeli folytonossága ekvivalens $L.(f) \restriction V$ $g$ pontbeli folytonosságával és mivel $\mathscr{T}_{\text{ind}} \restriction \mathscr{K}(S;F;\rho(V \times \operatorname{supp} f)) = \mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}(\mathscr{K}(S;F;\rho(V \times \operatorname{supp} f)))$ ezért az előbbiekből következik, hogy $L.(f)$ folytonos a $g$ pontban és így az egész $G$ téren is, $g \in G$ tetszőleges megválasztása folytán. Eddig tehát azt láttuk be, hogy $L$ szeparáltan folytonos. Most belátjuk az együttes folytonosságot. Legyen ehhez $x_0 \in G, f_0 \in \mathscr{K}(S;F)$, valamint $V \in \mathscr{T}_{\text{ind}}(0)$ tetszőleges. Válasszunk egy olyan $V' \in \mathfrak{B}$ elemet, melyre $V' + V' \subset V$ teljesül és legyen $V' = \operatorname{co}\left(\bigcup_{\substack{K \subset S \\ K\, kompakt}} \mathrm{B}_{\varepsilon_K}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \cap \mathscr{K}(S;F;K)\right)$ a $V'$ környezet egy felírása, alkalmas $\varepsilon_K > 0$ pozitív számokkal, $\forall K \subset S$ kompakt halmaz esetén. Kihasználva $x \mapsto L_x(f_0)$ imént látott folytonosságát az $x_0$ pontban kapunk egy $U \in \mathscr{T}_G(x_0)$ kompakt környezetet ($G$ lokális kompaktsága miatt választhatjuk ilyennek ezt a környezetet) melyre $\forall x \in U : L_x(f_0) \in L_{x_0}(f_0) + V'$. Most tetszőleges $K \subset S$ kompakt halmazra legyen $\delta_K := \varepsilon_{\rho(U \times K)}$ és definiáljuk a $W = \operatorname{co}\left(\bigcup_{\substack{K \subset S \\ K\, kompakt}} \mathrm{B}_{\delta_K}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \cap \mathscr{K}(S;F;K)\right) \in \mathfrak{B}$ környezetet. A $\delta_K$ számok megválasztása folytán teljesül, hogy $\forall K \subset S$ kompakt halmazra, $\forall h \in \mathrm{B}_{\delta_K}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \cap \mathscr{K}(S;F;K)), \forall x \in U$ esetén $L_x(h) \in \mathrm{B}_{\varepsilon_{\rho(U \times K)}}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \cap \mathscr{K}(S;F;\rho(U \times K)))$, mivel $L_x$ izometria és $\operatorname{supp} L_x(h) = \rho_x(\operatorname{supp} h) \subset \rho(U \times K)$. Ezáltal, az $L_x$ leképezések linearitása miatt $\forall x \in U : L_x(W) \subset V'$ teljesül. Legyen most $x \in U, h \in W$ tetszőleges. Ekkor $L_x(f_0 + h) = L_x(f_0) + L_x(h) \in L_{x_0}(f_0) + V' + V' \subset L_{x_0}(f_0) + V$ tehát $U \times W$ megfelelő környezet. Így $L$ együttesen is folytonos.

(iii) Legyen $g \in G$ rögzített. Ha $f \in \mathscr{L}_F^p(S;\mu^*)$ akkor mivel (1.6.22) szerint $\mu^* = \rho_{g^{-1}}(\mu)^* = \rho_{g^{-1}}(\mu^*)$ így $\mu^*(\|L_g(f)\|^p) = \mu^*(\|f\|^p \circ \rho_{g^{-1}}) = \mu^*(\|f\|^p) < +\infty \Rightarrow f \in \mathscr{F}_F^p(S;\mu^*)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\varphi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) \otimes F$ olyan függvény, melyre $\|f - \varphi\|_{\mu^*,p} < \varepsilon$ teljesül és melyet írjunk fel a $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \otimes z_k$ alakban, alkalmas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})$ függvényekkel és $z_1, \ldots, z_n \in F$ vektorokkal. Ekkor mivel $L_g(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} L_g(\psi_k \otimes z_k) =$

$\sum_{k=1}^{n} L_g(\psi_k) \otimes z_k \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) \otimes F$ és

$$\mu^*(\|L_g(f) - L_g(\varphi)\|^p)^{\frac{1}{p}} = \mu^*(\|f-\varphi\|^p \circ \rho_{g^{-1}})^{\frac{1}{p}} = \mu^*(\|f-\varphi\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|f-\varphi\|_{\mu^*,p} < \varepsilon$$

így $L_g(f) \in \mathscr{L}_F^p(S;\mu^*)$ továbbá $L_g$ izometria. Most belátjuk, hogy rögzített $f \in \mathscr{L}_F^p(S;\mu^*)$ esetén a $g \mapsto L_g(f)$ leképezés $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\|\cdot\|_{\mu^*,p}})$-folytonos (mivel $\forall g \in G : L_g$ izometria és $g \mapsto L_g$ homomorfizmus ezért ismét elég az $1 \in G$ pontbeli folytonosságot látni). Legyen ehhez $\varepsilon > 0$ rögzített és $\varphi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) \otimes F$ olyan, melyre $\|f-\varphi\|_{\mu^*,p} < \varepsilon$. Mivel $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_{\mu^*,p}} \restriction \mathscr{K}(S;F) \preccurlyeq \mathscr{T}_{\text{ind}}$ így $\exists U \in \mathscr{T}_{\text{ind}}(\varphi) : U \subset \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}(\varphi) \cap \mathscr{K}(S;F)$. A (ii). pont alapján választhatunk olyan $V \in \mathscr{T}_G(1)$ környezetet, melyre $\forall g \in V : L_g(\varphi) \in U$. Ekkor $g \in V$ esetén:

$$\begin{aligned}\|L_g(f) - f\|_{\mu^*,p} &\leq \|L_g(f) - L_g(\varphi)\|_{\mu^*,p} + \|L_g(\varphi) - \varphi\|_{\mu^*,p} + \|\varphi - f\|_{\mu^*,p} \\ &< \|f-\varphi\|_{\mu^*,p} + \varepsilon + \|f-\varphi\|_{\mu^*,p} < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Ez mutatja, hogy a $g \mapsto L_g(f)$ leképezés az $1 \in G$ pontban folytonos így egész $G$-n is. Eddig tehát azt láttuk be, hogy $L$ szeparáltan folytonos. Az együttes folytonosság belátása hasonlóan megy, mint (ii) esetén: legyenek $g_0 \in G : f_0 \in \mathscr{L}_F^p(S;\mu^*)$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesek. Válasszunk a $g \mapsto L_g(f)$ leképezés $g_0$ pontbeli folytonosságát kihasználva, az $\varepsilon > 0$ számhoz egy $V \in \mathscr{T}_G(g_0)$ környezetet. Ekkor $\forall g \in V : \forall f \in \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|_{\mu^*,p}}(f_0)$ esetén

$$\|L_g(f) - L_{g_0}(f_0)\|_{\mu^*,p} \leq \|L_g(f) - L_{g_0}(f)\|_{\mu^*,p} + \|L_{g_0}(f) - L_{g_0}(f_0)\|_{\mu^*,p} < 2\varepsilon$$

tehát $L$ folytonos. ■

**2.1.18 Megjegyzés.** *Ha egy $G$ LCH csoportnak a fent megadott $L, R$ önmagán való hatásait tekintjük, akkor az ezek által, az előző tétel szerint meghatározott ábrázolásokat szintén ezen betűkkel jelöljük.*

**2.1.19 Következmény.** *Legyen $G$ LCH csoport, $S$ LCH tér, $\rho : G \times S \to S$ folytonos csoporthatás, illetve $F$ Banach-tér. Ha $\mu \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})'$ pozitív, $\rho$-invariáns Radon-mérték, akkor az $\int d\mu : \mathscr{L}_F^1(S;\mu^*) \to F$ operátor is $\rho$-invariáns, azaz $\forall g \in G$ $\forall f \in \mathscr{L}_F^1(S;\mu^*)$ esetén $\int L_g(f) d\mu = \int f d\mu$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\varphi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}), z \in F, g \in G$ tetszőleges. Ekkor (1.6.13) alapján

$$\int L_g(\varphi \otimes z) d\mu = \int L_g(\varphi) \otimes z d\mu = \left(\int L_g(\varphi) d\mu\right) z = (\mu(L_g(\varphi)))z = (\mu(\varphi))z = \int \varphi \otimes z d\mu$$

Mivel (2.1.17) (iii) alapján $L_g \in \mathscr{L}(\mathscr{L}^1_F(S;\mu^*))$ így azt kaptuk, hogy a $\int d\mu \circ L_g, \int d\mu$ folytonos lineáris operátorok a $\mathscr{K}(S;\mathbb{C}) \otimes F \subset \mathscr{L}^1_F(S;\mu^*)$ sűrű lineáris altéren megegyeznek és így az egész téren is. ■

**2.1.20 Állítás.** *Legyen $G$ topologikus csoport, $S$ LCH tér és $\rho : G \times S \to S$ folytonos tranzitív csoporthatás, valamint $\mu \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})' : \mu \neq 0$ pozitív, $\rho$-invariáns Radon-mérték. Ekkor $\forall f \in \mathscr{K}_+(S) : f \neq 0 \Rightarrow \mu(f) > 0$, valamint $\operatorname{supp}\mu = S$.*

*Bizonyítás.* (Indirekt.) Tegyük fel, hogy $\exists f \in \mathscr{K}_+(S) : f \neq 0$ melyre $\mu(f) = 0$. Legyen $g \in \mathscr{K}_+(S) : g \neq 0$ tetszőleges. Mivel $f \neq 0$ így $\exists U \in \mathscr{T}_S : U \neq \emptyset$ és $U \subset [f > \|f\|_\infty / 2]$. Mivel $\rho$ tranzitív így $\operatorname{supp} g \subset \bigcup_{g \in G} \rho_g(U)$ ezért $\operatorname{supp} g$ kompaktsága miatt $\exists g_1, \dots, g_n \in G : \operatorname{supp} g \subset \bigcup_{k=1}^{n} \rho_{g_k}(U)$. Ekkor $g \leq \sum_{k=1}^{n} 2\frac{\|g\|_\infty}{\|f\|_\infty} L_{g_k}(f) \in \mathscr{K}_+(S)$ és így

$$\mu(g) \leq \sum_{k=1}^{n} 2\frac{\|g\|_\infty}{\|f\|_\infty}\mu(L_{g_k}(f)) = \sum_{k=1}^{n} 2\frac{\|g\|_\infty}{\|f\|_\infty}\mu(f) = 0$$

a $\mu$ $\rho$-invarianciája illetve az indirekt feltevés miatt. Így $\mu \restriction \mathscr{K}_+(S) = 0 \Rightarrow \mu = 0$ ami ellentmondás. ■

**2.1.21 Megjegyzés.** *Legyen $G$ LCH csoport.*

(i) *A fenti jelölésekkel élve $\mu_G$ bal $G$-invarianciája pontosan azt jelenti, hogy $\forall g \in G : \mu_G \circ L_g = \mu_G$.*

(ii) *Legyen $x \in G$ tetszőleges. Ekkor a $R_x(\mu_G)$ pozitív Radon-mérték bal $G$-invariáns, ugyanis, ha $g, y \in G$, akkor*

$$\begin{aligned} R_{x^{-1}}(L_y(f))(g) &= L_y(f)(gx^{-1}) = f(y^{-1}(gx^{-1})) = f((y^{-1}g)x^{-1}) = R_{x^{-1}}(f)(y^{-1}g) \\ &= L_y(R_{x^{-1}}(f))(g), \end{aligned}$$

*így $R_{x^{-1}}(L_y(f)) = L_y(R_{x^{-1}}(f))$, ezért $f \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ esetén*

$$\begin{aligned} R_x(\mu_G)(L_y(f)) &= \mu_G(L_y(f) \circ R_x) = \mu_G(R_{x^{-1}}(L_y(f))) = \mu_G(L_y(R_{x^{-1}}(f))) \\ &= \mu_G(R_{x^{-1}}(f)) = R_x(\mu_G)(f), \end{aligned}$$

*mivel $\mu_G$ bal-invariáns. Így a Haar-mérték „egyértelműsége” miatt $\exists \Delta(x) \in \mathbb{R}^*_+ : R_x(\mu_G) = \Delta(x)\mu_G$ (ha $\mu'_G$ egy másik bal Haar-mérték $G$ felett, akkor $\exists c \in \mathbb{R}^*_+ : \mu'_G = c\mu_G$ így ha $\Delta'(x)$ a fenti módon a $\mu'_G$ mértékhez tartozik, akkor $x \in G : \Delta'(x)\mu'_G = R_x(\mu'_G) = cR_x(\mu_G) = c(\Delta(x)\mu_G) = \Delta(x)\mu'_G \Rightarrow \Delta(x) = \Delta'(x)$, mivel $\exists f \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) : \mu'_G(f) \neq 0$; így $\Delta$ független a bal oldali Haar-mérték megválasztásától). Ezt a $\Delta : G \to \mathbb{R}^*_+$ leképezést a $G$ csoport* **moduláris függvényének** *nevezzük, jele $\Delta_G$.*

A következő állításban összegyűjtöttük a moduláris függvény néhány alapvető tulajdonságát (ld. [Fol15, 2, No.2.4]).

**2.1.22 Állítás.** *Legyen $G$ LCH csoport. Ekkor az imént definiált $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$ moduláris függvény folytonos csoport-homomorfizmus. Továbbá ha $i : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ az invertálás leképezése a $G$ csoportnak, akkor fennáll az $i(\mu_G) = \Delta_G^{-1} \cdot \mu_G$ összefüggés és ez a $G$ csoportnak egy jobb oldali Haar-mértéke.*

## 2.2. Átlagoló leképezések, Radon-mértékek faktorizációja

Legyen $G$ LCH csoport és $H \subset G$ zárt részcsoport, valamint $F$ Banach-tér. Legyen $f \in \mathscr{K}(G;F)$ és tekintsük a következőt: $x \in G$ esetén $L_{x^{-1}}(f) \restriction H \in \mathscr{K}(H;F)$, valamint a $G \to \mathscr{K}(H;F); x \mapsto L_{x^{-1}}(f) \restriction H$ leképezés folytonos, ugyanis a $\restriction : \mathscr{K}(G;F) \to \mathscr{K}(H;F)$ operátor korlátos illetve $f \in \mathscr{K}(G;F)$ esetén $\operatorname{supp} f \restriction H = \operatorname{supp} f \cap H \Rightarrow \forall K \subset G$ kompakt halmazra $\restriction (\mathscr{K}(G;F;K)) \subset \mathscr{K}(H;F;K \cap H)$ és így (1.4.3) (ii) alapján adódik a folytonosság. Emiatt a $\varphi : G \to F; x \mapsto \int L_{x^{-1}}(f) \restriction H d\mu_H$ leképezés folytonos és $x \in G, \xi \in H$ esetén $L_{(x\xi)^{-1}}(f) \restriction H = L_{\xi^{-1}}(L_{x^{-1}}(f) \restriction H)$ így

$$\varphi(x\xi) = \int L_{\xi^{-1}}(L_{x^{-1}}(f) \restriction H) d\mu_H = \int L_{x^{-1}}(f) \restriction H d\mu_H = \varphi(x)$$

mivel $\mu_H$ bal-invariáns így (2.1.19) miatt az $\int d\mu_H$ operátor is. Így $\varphi$ állandó a $H$ szerinti bal mellékosztályokon, valamint $\operatorname{supp} \varphi \subset (\operatorname{supp} f)H$ mivel $\operatorname{supp} L_{x^{-1}}(f) \restriction H = x^{-1} \operatorname{supp} f \cap H$ és így ha $x^{-1} \operatorname{supp} f \cap H \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \operatorname{supp} f : \exists h \in H : x^{-1}k = h \Rightarrow x = kh^{-1} \in (\operatorname{supp} f)H$ tehát $x \notin (\operatorname{supp} f)H \Rightarrow x^{-1} \operatorname{supp} f \cap H = \emptyset \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset (\operatorname{supp} f)H$. Emiatt $\exists! P(f) \in \mathscr{K}(G/H;F) : \varphi = P(f) \circ q$. (Tehát $x \in G$ esetén $P(f)(xH) = \int L_{x^{-1}}(f) \restriction H d\mu_H$, valamint $\operatorname{supp} P(f) \subset q(\operatorname{supp} f)$.) Így a

$$P : \mathscr{K}(G;F) \to \mathscr{K}(G/H;F); f \mapsto P(f)$$

leképezés jóldefiniált; ezeket nevezzük a $G$ csoport $H$ részcsoporthoz tartozó **átlagoló leképezéseinek**. (Az $F$ Banach-tértől függetlenül $P$-vel jelöljük ezeket.)

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi, [Fol15, 2, No.2.6]-ból származó lemmára.

**2.2.1 Lemma.** *Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és $E \subset G/H$ kompakt halmaz. Ekkor $\exists K \subset G$ kompakt halmaz, melyre $q(K) = E$.*

**2.2.2 Állítás. (Átlagoló leképezések tulajdonságai)** *Legyen $G$ LCH csoport és $H \subset G$ zárt részcsoport, valamint $F_{\mathbb{K}}$ Banach-tér. Az imént definiált $P : \mathscr{K}(G;F) \to \mathscr{K}(G/H;F); f \mapsto P(f)$ leképezés folytonos és lineáris továbbá $f \in \mathscr{K}(G;F) : x \in G$ esetén $P(L_x(f)) = L_x(P(f))$ és ha $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{K})$ akkor $P(f(\varphi \circ q)) = \varphi P(f)$. Speciálisan, ha $F = \mathbb{C}$ akkor $P$ szürjektív nyílt leképezés, valamint $\forall f \in \mathscr{K}_+(G/H) : \exists \varphi \in \mathscr{K}_+(G) : P(\varphi) = f$.*

*Bizonyítás.* Linearitás: legyen $\varphi, \psi \in \mathscr{K}(G;F)$, $a, b \in \mathbb{K}$ és $x \in G$. Ekkor

$$P(a\varphi + b\psi)(xH) = \int (a\varphi + b\psi)(x\eta)d\mu_H(\eta) = a\int \varphi(x\eta)d\mu_H(\eta) + b\int \psi(x\eta)d\mu_H(\eta) = \\ = aP(\varphi)(xH) + bP(\psi)(xH) \Rightarrow P(a\varphi + b\psi) = aP(\varphi) + bP(\psi).$$

Folytonosság: legyen $K \subset G$ kompakt és $f \in \mathscr{K}(G;F;K)$. Amint láttuk, $\operatorname{supp} P(f) \subset q(\operatorname{supp} f) \subset q(K) \Rightarrow P(\mathscr{K}(G;F;K)) \subset \mathscr{K}(G/H;F;q(K))$. Legyen $x \in K$ tetszőleges, ekkor: $\operatorname{supp} L_{x^{-1}}(f) \restriction H = x^{-1} \operatorname{supp} f \cap H \subset K^{-1}K \cap H =: K' \subset H$ kompakt és

$$\|P(f)(xH)\| = \left\| \int L_{x^{-1}}(f) \restriction H d\mu_H \right\| \le \|L_{x^{-1}}(f) \restriction H\|_{\mu_H^*,1} \le \|f\|_\infty \|\chi_{K'}\|_{\mu_H^*,1}.$$

Ha $x \notin KH \Rightarrow P(f)(xH) = 0$ és így $\|P(f)(xH)\| \le \|f\|_\infty \|\chi_{K'}\|_{\mu_H^*,1}$ triviálisan teljesül, tehát $\|P(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty \|\chi_{K'}\|_{\mu_H^*,1}$ vagyis $P \circ \mathrm{in}_K : \mathscr{K}(G;F;K) \to \mathscr{K}(G/H;F;q(K))$ korlátos. Így (1.4.3) (ii) alapján $P$ folytonos.
Ha $f \in \mathscr{K}(G;F)$, $x, y \in G$, akkor

$$P(L_x(f))(yH) = \int L_x(f)(y\eta)d\mu_H(\eta) = \int f((x^{-1}y)\eta)d\mu_H(\eta) \\ = P(f)((x^{-1}y)H) = L_x(P(f))(yH) \Rightarrow P(L_x(f)) = L_x(P(f)).$$

Ha $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{K})$ tetszőleges, akkor

$$P(f(\varphi \circ q))(xH) = \int f(x\eta)\varphi(q(x\eta))d\mu_H(\eta) = \varphi(xH)\int f(x\eta)d\mu_H(\eta) \\ = \varphi(xH)P(f)(xH) \Rightarrow P(f(\varphi \circ q)) = \varphi P(f).$$

Tekintsük most az $F = \mathbb{C}$ esetet. Először igazoljuk, hogy $\forall F \subset G/H$ kompakt halmazhoz $\exists f \in \mathscr{K}_+(G) : F \subset [P(f) = 1]$. Ehhez legyen $F \subset E \in \mathscr{T}_{G/H} : \overline{E}$ kompakt. A fenti lemma alapján $\exists K \subset G$ kompakt: $q(K) = \overline{E}$ továbbá, az Uriszon-lemmát használva, válasszunk $\varphi \in \mathscr{K}_+(G/H), \psi \in \mathscr{K}_+(G)$ függvényeket, melyekre: $\operatorname{supp} \varphi \subset E, F \subset [\varphi = 1]$ illetve $K \subset [\psi = 1]$ teljesül. Legyen $x \in G$ esetén

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\psi(x)\varphi(q(x))}{P(\psi)(q(x))}, & x \in \overset{-1}{q}(\operatorname{supp} \varphi); \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mivel $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{E}$, így $\overset{-1}{q}(\operatorname{supp}\varphi) \subset KH \subset [\psi > 1/2]H$ és $x \in [\psi > 1/2]H$ esetén $[L_{x^{-1}}(\psi) \restriction H > 0] \neq \emptyset \Rightarrow P(\psi)(xH) > 0$ (2.1.20) alapján tehát $f$ jóldefiniált, továbbá a $[\psi > 1/2]H$ nyílt halmazon $f$ folytonos. Ezenfelül, definíciója szerint, $f$ folytonos a $G \setminus \overset{-1}{q}(\operatorname{supp}\varphi)$ nyílt halmazon illetve $[\psi > 1/2]H \cup G \setminus \overset{-1}{q}(\operatorname{supp}\varphi) = G$ így $f$ folytonos illetve $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp}\psi \Rightarrow f \in \mathscr{K}_+(G)$. Továbbá $x \in \overset{-1}{q}(\operatorname{supp}\varphi)$ esetén a fentiek alapján $P(f)(xH) = \varphi(xH)P(\psi)(xH)P(\psi)(xH)^{-1} = \varphi(xH) \Rightarrow F \subset [P(f) = 1]$.
Legyen most $E \subset G/H$ kompakt és $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E)$ tetszőleges illetve válasszunk egy $f \in \mathscr{K}_+(G)$ függvényt melyre $E \subset [P(f) = 1]$. Ekkor a $g := \varphi \circ qf \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C};\operatorname{supp} f)$ függvényre $P(g) = \varphi P(f) = \varphi$, valamint $q(\operatorname{supp} g) = \operatorname{supp}\varphi$ és mivel $P(f) \in \mathscr{K}_+(G/H)$ így ha $\varphi \geq 0 \Rightarrow g \geq 0$. Többet bizonyítottunk: $\forall E \subset G/H$ kompakt halmazhoz $\exists K \subset G$ kompakt halmaz, melyre $\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E) \subset P(\mathscr{K}(G;\mathbb{C};K))$. (A segédállítás illetve szürjektivitás bizonyítása [Fol15, 2, No.2.6] alapján történt.)
Végül belátjuk, hogy $P : \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \to \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}))$ nyílt leképezés: tekintsük mindkét tér nulleleménék az első fejezetben megadott $\mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_{G/H}$ környezetbázisait. A $P$ és a topológiák linearitása miatt elég belátni, hogy $\forall B \in \mathfrak{B}_G : \exists B' \in \mathfrak{B}_{G/H} : B' \subset P(B)$. Legyen $B \in \mathfrak{B}_G$ tetszőleges: $B = \operatorname{co}\left(\bigcup_{\substack{K\subset G\\ K kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathbb{C};K)\right)$, alkalmas $\varepsilon_K > 0$ ($K \subset G$ kompakt) számokkal. Legyen $E \subset G/H$ kompakt, melyre $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ (különben a hozzá tartózó altér $= \{0\}$) és a fentiek alapján válasszunk egy $K \subset G$ kompakt halmazt, melyre $\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E) \subset P(\mathscr{K}(G;\mathbb{C};K)) \subset \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};q(K))$. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a következő jelölést: $P_K := P \circ \operatorname{in}_K$. Ekkor $X_E := \overset{-1}{P_K}(\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E)) \subset \mathscr{K}(G;\mathbb{C};K)$ zárt altér és $P_K \restriction X_E : X_E \to \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E)$ Banach-terek között ható, korlátos lineáris szürjekció így a nyílt leképezés tétel alapján $\exists\varepsilon_E > 0 : \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_E}(0) \cap \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E) \subset P_K(\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathbb{C};K) \cap X_E) \subset P_K(\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathbb{C};K))$. Így $\forall E \subset G/H$ kompakt halmazhoz $\exists\varepsilon_E > 0$ ($\operatorname{int} E = \emptyset$ esetén pl. $\varepsilon_E = 1$) melyre

$$\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_E}(0) \cap \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E) \subset P\left(\bigcup_{\substack{K\subset G\\ K kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathbb{C};K)\right) \subset P(B)$$

ami konvex (mert konvex halmaz lineáris képe) így

$$\mathfrak{B}_{G/H} \ni B' := \operatorname{co}\left(\bigcup_{\substack{E\subset G/H\\ E kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_E}(0) \cap \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};E)\right) \subset P(B)$$

tehát $P$ nyílt leképezés. ■

Az előző állítás alapján jóldefiniált a $P' : \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})' \to \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'; \mu \mapsto \mu \circ P$ leképezés amely láthatóan lineáris és $P$ szürjektivitása miatt injektív is továbbá $\mu \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})'$ esetén $P'(\overline{\mu}) = \overline{P'(\mu)}$, ugyanis $\forall f \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ esetén

$$P'(\overline{\mu})(f) = \overline{\mu}(P(f)) = \overline{\mu(\overline{P(f)})} = \overline{\mu(P(\overline{f}))} = \overline{P'(\mu)}(f)$$

mivel $\mu_H$ valós (pozitív) Radon-mérték, így $\overline{P(f)} = P(\overline{f})$.

**2.2.3 Definíció.** *Legyen $G$ LCH csoport és $H \subset G$ zárt részcsoport. Egy $\mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ Radon-mértéket $P$ szerint faktorizálhatónak nevezünk ha $\mu \in \operatorname{Ran} P'$ (ekkor $\mu$ egyetlen $P'$ általi ősképét jelölje $\mu'$).*

Ha $\mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ $P$ szerint faktorizálható, akkor amennyiben $\mu$ valós/pozitív úgy $\mu'$ is valós/pozitív, ugyanis ha $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ valós/pozitív akkor $\exists f \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ valós/pozitív, melyre $P(f) = \varphi$ (a pozitív esetet láttuk az előző tételben és ha $\varphi$ valós akkor $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ melyek $\in \mathscr{K}_+(G)$ így $P$ linearitásából adódik a valós eset is) és így $\mu'(\varphi) = \mu'(P(f)) = \mu(f)$ mutatja az állítást. A következő állításban jellemzést adunk Radon-mértékek fenti értelembeli faktorizálhatóságára:

**2.2.4 Állítás. (Radon-mérték átlagoló leképezés szerinti faktorizálhatósága)** *Legyen $G$ LCH csoport és $H \subset G$ zárt részcsoport, valamint legyen $P : \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \to \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ a $G$ csoport $H$ részcsoportjához tartozó átlagoló leképezése. Ekkor*

(i) *Egy $\mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ $P$ szerint faktorizálható $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} \mu$.*

(ii) *Legyen $f \in C(G;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\forall x \in G : \forall \xi \in H : f(x\xi) = \dfrac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)} f(x)$. Ekkor $\operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} f \cdot \mu_G$, vagyis (i) alapján $f \cdot \mu_G$ $P$ szerint faktorizálható.*

*Bizonyítás.* (i) $\Rightarrow$: Ha $f \in \operatorname{Ker} P$, akkor $\mu(f) = \mu'(P(f)) = \mu'(0) = 0 \Rightarrow f \in \operatorname{Ker} \mu$.
$\Leftarrow$: Ismert (ld. [Já98, XIV, §1]), hogy a $\mathscr{K}(G;\mathbb{C})/\operatorname{Ker} P$ lineáris faktortér ellátva a faktortopológiával topologikus vektortér továbbá, hogy a $\pi : \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \to \mathscr{K}(G;\mathbb{C})/\operatorname{Ker} P$ természetes faktorleképezés folytonos és nyílt szürjektív homomorfizmus. Tekintsük a $P^l : \mathscr{K}(G;\mathbb{C})/\operatorname{Ker} P \to \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}); f + \operatorname{Ker} P \mapsto P(f)$ leképezést, amely az algebrából ismeretes homomorfizmus-tétel szerint vektortér-izomorfizmus valamint $P^l \circ \pi = P$ és $\pi$ nyíltsága miatt folytonos is. Megmutatjuk, hogy $P^l$ nyílt leképezés is ezáltal topologikus vektorterek izomorfizmusa. Legyen $U \subset \mathscr{K}(G;\mathbb{C})/\operatorname{Ker} P$ nyílt: $P^l(U) = P^l(\pi(\overset{-1}{\pi}(U))) = P(\overset{-1}{\pi}(U))$ ami nyílt, mivel $P$ nyílt leképezés. Így $\operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} \mu$ miatt $\exists \mu^l \in (\mathscr{K}(G;\mathbb{C})/\operatorname{Ker} P)' : \mu^l \circ \pi = \mu$. Ekkor $\mu' := \mu^l \circ (P^l)^{-1} \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})'$ és ha

$f \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ akkor $P'(\mu')(f) = \mu^l \circ (P^l)^{-1} \circ P(f) = \mu^l \circ \pi(f) = \mu(f)$ tehát $P'(\mu') = \mu$ vagyis $\mu$ faktorizálható $P$ szerint.

(ii) ([Fol15, 2, No.2.6] alapján) Legyen $g \in \operatorname{Ker} P$. Ekkor (2.1.22) alapján $\forall x \in G$ esetén

$$0 = P(f)(q(x)) = \int g(x\eta)d\mu_H(\eta) = \int g(x\eta^{-1})\Delta_H(\eta^{-1})d\mu_H(\eta).$$

Válasszunk egy $\varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ függvényt melyre $q(\operatorname{supp} g) \subset [P(\varphi) = 1]$. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 &= \int_G f(x)\varphi(x) \int_H g(x\eta^{-1})\Delta_H(\eta^{-1})d\mu_H(\eta)d\mu_G(x)\\
&= \int_H \int_G f(x\eta)\varphi(x\eta)g(x)\Delta_H(\eta^{-1})\Delta_G(\eta)d\mu_G(x)d\mu_H(\eta)\\
&= \int_G \int_H f(x)\varphi(x\eta)g(x)d\mu_H(\eta)d\mu_G(x)\\
&= \int_G f(x)g(x)P(\varphi)(q(x))d\mu_G(x) = f \cdot \mu_G(g)
\end{aligned}$$

teljesül a következők miatt: az első lépésben először is használtuk az elemi Fubini-tételt, ami jogos, hiszen az integrandus (most mint $(x,\eta)$ függvénye) folytonos és a tartója része a $\operatorname{supp}\varphi \times (\operatorname{supp} g)^{-1} \operatorname{supp}\varphi$ kompakt halmaznak. Másodszor $1 = \Delta_G(\eta)\Delta_G(\eta^{-1})$ felírásból a második tényező a $\mu_G$ szerinti integrálban „kicserélhető” egy $R_{\eta^{-1}}$-el való kompozíciójára az integrandusnak (moduláris függvény definíciója szerint). A második lépésben használtuk $f$ (ii)-ben megadott tulajdonságát végül a harmadikban ismét az elemi Fubini-tételt, hasonló indoklással, mint előbb. ■

## 2.3. Csoportalgebra, Harmonikus analízis alaptétele

Legyen $G$ LCH csoport. Az alábbiakban röviden ismertetjük a $G$ csoport által meghatározott, úgynevezett *csoportalgebrát*, amely egy speciális Banach *-algebra és amelynek ábrázoláselmélete szoros kapcsolatban áll a $G$ csoport folytonos unitér ábrázolásainak elméletével.

Legyen $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu^*_G)$, valamint $x \in G$ tetszőleges és tekintsük a következőket.

$$(f * g)(x) := \int f(y)L_y(g)(x)d\mu_G(y)$$
$$f^*(x) := \Delta_G(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$$

Belátható, hogy $f * g, f^* \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu^*_G)$, valamint az is, hogy ezen elemek $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu^*_G)$-beli ekvivalencia-osztályai függetlenek az $f^\bullet, g^\bullet$ osztályokbeli reprezentánsok választásától;

ezáltal jóldefiniáltak a következő leképezések.

$$\begin{cases} * : & \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \times \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \to \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \\ & (f^\bullet, g^\bullet) \mapsto (f * g)^\bullet \end{cases}, \begin{cases} ^* : & \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \to \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \\ & f^\bullet \mapsto (f^*)^\bullet \end{cases}$$

Igaz továbbá, hogy ezek a leképezések az $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*)$ téren rendre szorzást és involúciót határoznak meg, valamint, hogy ezen két új művelettel ellátva $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*)$ approximatív egységelemes Banach *-algebra. Ezt nevezzük a $G$ csoport *csoportalgebrájának* (ld. [Fol15, 2, No.2.5]). A következő nevezetes tétel mutat rá a két struktúra ábrázoláselméletének fent említett kapcsolatára (ld. [Fol15, 3, No.3.2]).

**2.3.1 Tétel. (A harmonikus analízis alaptétele)** *Legyen $G$ LCH csoport, $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ folytonos unitér ábrázolása a $G$ csoportnak a $\mathscr{H}_\pi$ Hilbert-téren. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*)$ esetén létezik a*

$$\pi(f) = \int^{\mathrm{w}} f \pi d\mu_G \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$$

*gyenge integrál amely független az $f^\bullet$-beli reprezentáns választásától így jóldefiniált az $f^\bullet \mapsto \pi(f)$ leképezés. Ez a megfeleltetés az $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*)$ algebrának nemelfajult *-ábrázolását létesíti a $\mathscr{H}_\pi$ Hilbert-téren, továbbá teljesül, hogy $\forall g \in G : \forall f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*)$ esetén $\pi(g)\pi(f^\bullet) = \pi(L_g(f)^\bullet)$. Megfordítva, bármely $A : \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(G;\mu_G^*) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ nemelfajult *-ábrázoláshoz létezik a $G$ csoportnak olyan $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ folytonos unitér ábrázolása, melyre $A \simeq \pi$.*

**2.3.2 Megjegyzés.** *Az értelmezési tartományok különbözősége miatt nem okoz félreértést, hogy a csoportalgebra fenti ábrázolását ugyanazon betűvel jelöljük, mint a csoport ábrázolását.*

# 3. fejezet

# Indukált folytonos unitér reprezentációk

## 3.1. Az indukált folytonos unitér ábrázolás definíciója

Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és legyen $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ részcsoportnak $\mathscr{H}_\sigma$ felett. Tekintsük a következő halmazt

$$\mathscr{F}^0 := \Bigg\{ f \in C(G; \mathscr{H}_\sigma) \mid \exists K \subset G \textit{ kompakt halmaz} : \operatorname{supp} f \subset KH \text{ és}$$
$$\forall x \in G : \forall \eta \in H : f(x\eta) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}} \sigma(\eta^{-1}) f(x) \Bigg\}.$$

Ez lineáris altere a $C(G; \mathscr{H}_\sigma)$ függvénytérnek, ugyanis $\forall f, g \in \mathscr{F}^0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ esetén $\operatorname{supp} \alpha f + \beta g \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subset K_1 H \cup K_2 H = (K_1 \cup K_2) H$, alkalmas $K_1, K_2 \subset G$ kompakt halmazokra. Ha $x \in G, \eta \in H$, akkor

$$(\alpha f + \beta g)(x\eta) = \alpha f(x\eta) + \beta g(x\eta) = \alpha \sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}} \sigma(\eta^{-1}) f(x) + \beta \sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}} \sigma(\eta^{-1}) g(x) =$$
$$= \sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}} \sigma(\eta^{-1}) (\alpha f + \beta g)(x),$$

így $\alpha f + \beta g \in \mathscr{F}^0$. Ha $f \in \mathscr{F}^0, g \in G$ akkor $\operatorname{supp} L_g(f) = g \operatorname{supp} f \subset (gK)H$, alkalmas $K \subset G$ kompakt halmazra, valamint könnyen látható, hogy

$$L_g(f)(x\eta) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}}\sigma(\eta^{-1})L_g(f)(x),$$

így $L_g(f) \in \mathscr{F}^0$, vagyis $\mathscr{F}^0$ invariáns altere az $L : G \to \operatorname{Aut}(\mathscr{F}(G; \mathscr{H}_\sigma)); g \mapsto L_g$ lineáris ábrázolásnak így $L : G \to \operatorname{Aut}(\mathscr{F}^0); g \mapsto L_g$ lineáris ábrázolása a $G$ csoportnak $\mathscr{F}^0$ felett. A következőkben ellátjuk az $\mathscr{F}^0$ teret egy skaláris szorzással. Minden $f, g \in \mathscr{F}^0$ esetén $\langle f, g\rangle_\sigma \in C(G; \mathbb{C})$, valamint $x \in G$ és $\eta \in H$ esetén

$$\langle f(x\eta), g(x\eta)\rangle_\sigma = \frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}\langle \sigma(\eta^{-1})f(x), \sigma(\eta^{-1})g(x)\rangle_\sigma = \frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}\langle f(x), g(x)\rangle_\sigma,$$

mivel $\sigma$ unitér ábrázolás. Így (2.2.4) alapján $\langle f, g\rangle_\sigma \cdot \mu_G$ faktorizálható $P$ szerint; jelölje $\mu_{f,g} \in \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C})'$ azt az egyértelműen létező Radon-mértéket, melyre $\langle f, g\rangle_\sigma \cdot \mu_G = \mu_{f,g} \circ P$. Legyen $K \subset G$ olyan kompakt halmaz, melyre $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset KH$. Legyen $\varphi \in \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C}; (G/H) \setminus q(K))$ tetszőleges, valamint $h \in \mathscr{K}(G; \mathbb{C}) : P(h) = \varphi$ és $q(\operatorname{supp} h) = \operatorname{supp} \varphi$. Ekkor $\operatorname{supp} h \subset \operatorname{supp} hH = \overset{-1}{q}(\operatorname{supp} \varphi) \subset G \setminus KH$ így $h\langle f, g\rangle_\sigma = 0 \Rightarrow \langle f, g\rangle_\sigma \cdot \mu_G(h) = 0 \Rightarrow 0 = \mu_{f,g}(P(h)) = \mu_{f,g}(\varphi) \Rightarrow \operatorname{supp} \mu_{f,g} \subset q(K)$ emiatt $\operatorname{supp} \mu_{f,g}$ kompakt.

**3.1.1 Definíció.** *Legyen $\varphi \in \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C})$ tetszőleges, melyre* $\operatorname{supp} \mu_{f,g} \subset [\varphi = 1]$ *és definiáljuk $\langle f, g\rangle := \mu_{f,g}(\varphi)$; ez (1.6.4) alapján független $\varphi$ megválasztásától. Így jóldefiniált a $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathscr{F}^0 \times \mathscr{F}^0 \to \mathbb{C}$ leképezés.*

Speciálisan, ha $\psi \in \mathscr{K}(G; \mathbb{C})$ olyan, melyre $\operatorname{supp} \mu_{f,g} \subset [P(\psi) = 1]$ akkor $\langle f, g\rangle = \mu_{f,g}(P(\psi)) = \int \psi \langle f, g\rangle_\sigma d\mu_G$.

**3.1.2 Állítás.** *Az imént definiált $\mathscr{F}^0 \times \mathscr{F}^0 \to \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ megfeleltetés skaláris szorzás az $\mathscr{F}^0$ téren és így $(\mathscr{F}^0, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ pre-Hilbert-tér.*

*Bizonyítás.* Az $\mathscr{F}^0 \times \mathscr{F}^0 \to C(G; \mathbb{C}); (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_\sigma$ leképezés láthatóan szeszkvilineáris és konjugált-szimmetrikus, továbbá az első fejezetben mondottak alapján a $C(G; \mathbb{C}) \to \mathscr{K}(G; \mathbb{C})'; f \mapsto f \cdot \mu_G$ leképezés lineáris és $\mu_G$ valós mivolta miatt megtartja a konjugálást is: $\overline{f} \cdot \mu_G = \overline{f \cdot \mu_G}$. Végül $(P')^{-1} : \operatorname{Ran} P' \to \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C})'$ szintén lineáris és konjugálás-tartó így $\mathscr{F}^0 \times \mathscr{F}^0 \to \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C})'; (f, g) \mapsto \mu_{f,g}$ szeszkvilineáris és konjugált-szimmetrikus, valamint a fentiek alapján az $\mathcal{M}_c(G/H)$ altérbe képez.

Legyen $e : \mathcal{M}_c(G/H) \to \mathbb{C}; \mu \mapsto \mu(\varphi)$, ahol $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ tetszőleges, melyre $\operatorname{supp}\mu \subset [\varphi = 1]$. Ekkor az $e$ leképezés lineáris és konjugálás-tartó, ugyanis ha $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G/H), a, b \in \mathbb{C}$ és $\varphi \in \mathscr{K}_+(G/H)$ olyan, melyre $\operatorname{supp}\mu_1 \cup \operatorname{supp}\mu_2 \subset [\varphi = 1]$, akkor

$$e(a\mu_1 + b\mu_2) = (a\mu_1 + b\mu_2)(\varphi) = a\mu_1(\varphi) + b\mu_2(\varphi) = ae(\mu_1) + be(\mu_2),$$

valamint $e(\overline{\mu}) = \overline{\mu}(\varphi) = \overline{\mu(\varphi)} = \overline{e(\mu)}$ és így kapjuk, hogy a $(f, g) \mapsto \mu_{f,g}(\varphi)$ leképezés szeszkvilineáris és konjugált-szimmetrikus.
Legyen $f \in \mathscr{F}^0$ tetszőleges. Ekkor mivel $\langle f, f\rangle_\sigma \cdot \mu_G = \|f\|_\sigma^2 \cdot \mu_G$ pozitív Radon-mérték így, a $\mu_{f,f}$ Radon-mérték is pozitív és emiatt ha $\varphi \in \mathscr{K}_+(G/H)$ olyan, melyre $\operatorname{supp}\mu_{f,f} \subset [\varphi = 1]$ akkor $\langle f, f\rangle = \mu_{f,f}(\varphi) \geq 0$ valamint látható, hogy ha $f = 0$ akkor $\langle f, f\rangle = 0$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\langle f, f\rangle = 0$; belátjuk hogy ekkor $\mu_{f,f} = 0$: elég látni, hogy $\mu_{f,f} \restriction \mathscr{K}_+(G/H) = 0$. Ehhez legyen $\psi \in \mathscr{K}_+(G/H)$ tetszőleges és válasszunk egy olyan $\varphi \in \mathscr{K}_+(G/H)$ element, melyre $\operatorname{supp}\mu_{f,f} \cup \operatorname{supp}\psi \subset [\varphi = 1]$. Ekkor $\mu_{f,f}(\psi) \leq \|\psi\|_\infty \mu_{f,f}(\varphi) = \|\psi\|_\infty \langle f, f\rangle = 0$ a feltevés szerint ami mutatja az állítást. Emiatt $\|f\|_\sigma^2 \cdot \mu_G = \mu_{f,f} \circ P = 0$ és így (1.6.6), (2.1.20) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\emptyset = \operatorname{supp}\|f\|_\sigma^2 \cdot \mu_G = \overline{\operatorname{supp}\mu_G \cap [\|f\|_\sigma^2 \neq 0]} = \overline{[\|f\|_\sigma^2 \neq 0]} = \operatorname{supp} f \Rightarrow f = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy a fenti leképezés skaláris szorzás az $\mathscr{F}^0$ téren. ■

**3.1.3 Megjegyzés.** *A továbbiakban az $\mathscr{F}^0$ teret mindig ezen skaláris szorzással, illetve az ebből származó topológiával ellátva tekintjük.*

**3.1.4 Állítás. ($\mathscr{F}^0$ jellemzése)** *Legyen $f \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma)$ és tekintsük a következő leképezést:*

$$F(f) : G \to \mathscr{H}_\sigma; x \mapsto \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta)f(x\eta)d\mu_H(\eta)$$

*Ekkor $F(f) \in \mathscr{F}^0$. Az $F : \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma) \to \mathscr{F}^0; f \mapsto F(f)$ leképezés folytonos lineáris szürjekció, valamint $x \in G, f \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma)$ és $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ esetén $F(L_x(f)) = L_x(F(f))$, valamint $F(\varphi \circ qf) = \varphi \circ qF(f)$, továbbá ha $g \in \mathscr{F}^0$ és $\psi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$, akkor $F(\psi g) = P(\psi) \circ qf$.*

*Bizonyítás.* Legyen $f \in \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma)$ tetszőleges és tekintsük a következő leképezést: $A(f) : H \to \mathscr{H}_\sigma; \eta \mapsto \sigma(\eta)f(\eta)$. Ekkor $A(f)$ a következő két leképezés kompozíciójaként áll elő:

$$\begin{cases} H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma) \times \mathscr{H}_\sigma \\ \eta \mapsto (\sigma(\eta), f(\eta)) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma) \times \mathscr{H}_\sigma \to \mathscr{H}_\sigma \\ (u, x) \mapsto u(x) \end{cases}$$

Amennyiben az $\mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ teret a $\mathscr{T}_{\mathrm{so}}$ erős operátortopológiával ellátva tekintjük, úgy az első leképezés láthatóan folytonos, mivel komponensei folytonosak. A második leképezés folytonossága a következőképpen látható: legyen $(u,x) \in \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma) \times \mathscr{H}_\sigma$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyen $V \in \mathscr{T}_{\mathrm{so}}(u)$ olyan, melyre $\forall v \in V : \|u(x) - v(x)\|_\sigma < \varepsilon$. Ekkor $(v,y) \in V \times \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|_\sigma}(x) \in \mathscr{T}_{\mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)\times\mathscr{H}_\sigma}((u,x))$ esetén

$$\|v(y) - u(x)\|_\sigma \leq \|v(y) - v(x)\|_\sigma + \|v(x) - u(x)\|_\sigma < 2\varepsilon$$

Így tehát $A(f)$ folytonos és láthatóan $\operatorname{supp} A(f) = \operatorname{supp} f$ így $A(f) \in \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma)$. Ezek szerint jóldefiniált az $A : \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma) \to \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma); f \mapsto A(f)$ leképezés amelyről könnyen látható, hogy lineáris, valamint az előbbiek alapján látszik, hogy ha $K \subset H$ kompakt halmaz, akkor $A(\mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma;K)) \subset \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma;K)$. Legyen $f \in \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma;K)$; ekkor $\eta \in H$ esetén

$$\|A(f)(\eta)\|_\sigma = \|\sigma(\eta)f(\eta)\|_\sigma = \|f(\eta)\|_\sigma \Rightarrow \|A(f)\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

emiatt $A \circ \mathrm{in}_K$ folytonos lineáris leképezés így (1.4.3) alapján $A$ folytonos. Ekkor a

$$\begin{cases} \Psi : & G \times \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma) \to \mathscr{H}_\sigma \\ & (x,f) \mapsto \displaystyle\int \sqrt{\frac{\Delta_G}{\Delta_H}} A(L_{x^{-1}}(f) \restriction H) d\mu_H = \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}} \sigma(\eta) f(x\eta) d\mu_H(\eta) \end{cases}$$

leképezés folytonos, ugyanis a $(g,f) \mapsto L_{g^{-1}}(f)$ leképezés (2.1.17) (ii) pontja alapján folytonos, a megszorítás operátor folytonosságát láttuk az átlagoló leképezés definíciója közben, $A$ folytonosságát az imént láttuk, $h \in \mathscr{K}(H;\mathscr{H}_\sigma) : h \mapsto \sqrt{\frac{\Delta_G}{\Delta_H}} h$ folytonossága (1.4.3) második következménye és (1.6.20) (ii) garantálja a kompozíció utolsó tényezőjének folytonosságát. Mivel $f \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma)$ esetén $F(f) = \Psi(\cdot, f)$ így kapjuk, hogy $F(f) \in C(G;\mathscr{H}_\sigma)$ továbbá látható, hogy ha $x \notin \operatorname{supp} fH$, akkor $L_{x^{-1}}(f) \restriction H = 0 \Rightarrow F(f)(x) = 0$ így $\operatorname{supp} F(f) \subset \operatorname{supp} fH$. Legyen most $x \in G$ és $\xi \in H$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} F(f)(x\xi) &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}} \sigma(\eta) f(x\xi\eta) d\mu_H(\eta) \\ &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\xi^{-1}\eta)}{\Delta_H(\xi^{-1}\eta)}} \sigma(\xi^{-1}\eta) f(x\eta) d\mu_H(\eta) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}} \sigma(\xi^{-1}) F(f)(x), \end{aligned}$$

(ahol alkalmaztuk rendre az (1.6.13), (2.1.19) állításokat) így tehát $F(f) \in \mathscr{F}^0$ és az $f \mapsto F(f)$ leképezés lineáris, mivel lineáris leképezések kompozíciója.

Legyen most $g \in \mathscr{F}^0, \psi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), x \in G$ tetszőleges. Ekkor $\psi g \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma)$ és

$$\begin{aligned} F(\psi g)(x) &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\psi(x\eta)\sigma(\eta)g(x\eta)d\mu_H(\eta) \\ &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\psi(x\eta)\sigma(\eta)(\sqrt{\frac{\Delta_H(\eta)}{\Delta_G(\eta)}}\sigma(\eta^{-1})g(x))d\mu_H(\eta) \\ &= \int \psi(x\eta)d\mu_H(\eta)g(x) = P(\psi)\circ q(x)g(x), \end{aligned}$$

ahol ismét felhasználtuk (1.6.13)-t. Ebből kapjuk egyben a szürjektivitást is: ha $\psi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ olyan, melyre $q(\operatorname{supp} g) \subset [P(\psi) = 1]$ akkor a fenti számolás alapján $F(\psi g) = g$.
Ha $x, y \in G, f \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma), \varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$, akkor

$$\begin{aligned} F(L_y(f))(x) &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta)L_y(f)(x\eta)d\mu_H(\eta) \\ &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta)f((y^{-1}x)\eta)d\mu_H(\eta) = L_y(F(f))(x), \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} F(\varphi\circ qf)(x) &= \int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\varphi(q(x\eta))\sigma(\eta)f(x\eta)d\mu_H(\eta) \\ &= \varphi(q(x))\int \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta)f(x\eta)d\mu_H(\eta) = \varphi(q(x))F(f)(x) \end{aligned}$$

így $F(L_y(f)) = L_y(F(f))$ illetve $F(\varphi\circ qf) = \varphi\circ qF(f)$ teljesül.
Végül belátjuk, hogy $f \mapsto F(f)$ folytonos. Ehhez, $F$ illetve a topológiák linearitása miatt, elég látni a 0 pontbeli folytonosságot. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges illetve $K \subset G$ kompakt halmaz, melyre $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Válasszunk egy $\varphi_K \in \mathscr{K}_+(G)$ element, melyre $q(K) \subset [P(\varphi_K) = 1]$. Ha $f \in \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)$, akkor $\operatorname{supp} F(f) \subset KH$ így $\|F(f)\|^2 = \int \varphi_K(x)\,\|F(f)(x)\|_\sigma^2\,d\mu_G(x)$. Legyen $\varepsilon' > 0$ olyan kicsi, hogy $(\varepsilon')^2\int \varphi_K d\mu_G < \varepsilon$ teljesüljön. Ekkor az $\varepsilon' > 0$ számhoz és a $\operatorname{supp}\varphi_K$ kompakt halmazhoz, $\Psi$ folytonosságát kihasználva (2.1.16) alapján $\exists V \in \mathscr{T}_{\text{ind}}(0)$ környezet, melyre $\forall f \in V : \sup\limits_{x\in\operatorname{supp}\varphi_K} \|F(f)(x)\|_\sigma < \varepsilon'$. Így ha $f \in V \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)$, akkor

$$\|F(f)\|^2 = \int \varphi_K\,\|F(f)\|_\sigma^2\,d\mu_G \leq \sup_{x\in\operatorname{supp}\varphi_K}\|F(f)(x)\|_\sigma{}^2\int\varphi_K d\mu_G < (\varepsilon')^2\int\varphi_K d\mu_G < \varepsilon$$

Legyen most $\varepsilon_K > 0$ olyan, melyre $\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K) \subset V \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)$. Ekkor az előbbiek alapján $F(\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)) \subset \mathrm{B}^{\|\cdot\|}_{\varepsilon}(0)$, továbbá tekintsük a $\mathfrak{B} \ni \mathscr{B} := \mathrm{co}\left(\bigcup\limits_{\substack{K\subset G\\ K kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)\right)$ környezetet ($\mathfrak{B}$ az első fejezetben megadott környezetbázisa $\mathscr{T}_{\mathrm{ind}}$ szerint a 0 pontnak), ahol $K \subset G$ kompakt, $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$ esetén az $\varepsilon_K > 0$ számot az előbbieknek megfelelően választjuk, $\mathrm{int}\, K = \emptyset$ esetén pedig legyen pl. $\varepsilon_K := 1$. Ekkor

$$F(\mathscr{B}) \subset \mathrm{co}\left(\bigcup_{\substack{K\subset X\\ K kompakt}} F(\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K))\right) \subset \mathrm{B}^{\|\cdot\|}_{\varepsilon}(0),$$

mivel $F$ linearitása és szürjektivitása miatt az $\bigcup\limits_{\substack{K\subset X\\ K kompakt}} F(\mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K))$ halmazt tartalmazó konvex halmazok éppen az $\bigcup\limits_{\substack{K\subset X\\ K kompakt}} \mathrm{B}^{\|\cdot\|_\infty}_{\varepsilon_K}(0) \cap \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma;K)$ halmazt tartalmazó konvez halmazok $F$ általi képei és metszet függvény általi képe része a képhalmazok metszetének. Az utolsó tartalmazás a norma szerinti gömb konvexitásából következik. Így $F$ folytonos a 0 pontban. ■

**3.1.5 Állítás.** *A korábban megadott $L : G \to \mathrm{Aut}\,(\mathscr{F}^0); g \mapsto L_g$ lineáris ábrázolása a $G$ csoportnak az $\mathscr{F}^0$ pre-Hilbert-tér felett folytonos unitér ábrázolás.*

*Bizonyítás.* Először belátjuk, hogy $\forall x \in G$ esetén az $L_x$ operátor unitér. Legyen $x \in G, f \in \mathscr{F}^0$ tetszőleges, $K_f \subset G$ kompakt halmaz, melyre $\mathrm{supp}\, f \subset K_f H$ valamint válasszunk egy $\varphi \in \mathscr{K}(X;\mathbb{C})$ elemet, melyre $q(K_f) \subset [P(\varphi) = 1]$. Ekkor mivel $\mathrm{supp}\, L_x(f) \subset (xK_f)H$ valamint $q(xK_f) = xq(K_f)$ (a $G$ csoportnak a $G/H$ mellékosztálytéren való hatásának definíciójából) és $xq(K_f) \subset x[P(\varphi) = 1] = [L_x(P(\varphi)) = 1] = [P(L_x(\varphi)) = 1]$ így

$$\|L_x(f)\|^2 = \int L_x(\varphi)\, \|L_x(f)\|^2_\sigma \, d\mu_G = \int L_x(\varphi\, \|f\|^2_\sigma) d\mu_G = \int \varphi\, \|f\|^2_\sigma \, d\mu_G = \|f\|^2,$$

vagyis az $L_x$ operátor izometria és mivel tudjuk, hogy bijektív így unitér. A folytonossághoz (2.1.13) (ii) alapján elég látni, hogy a $G \to \mathrm{U}(\mathscr{F}^0); x \mapsto L_x$ leképezés $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\mathrm{so}})$-folytonos, amihez elég az $1 \in G$ pontbeli folytonosság, mivel a leképezés topologikus csoportok közötti homomorfizmus ($(\mathrm{U}(\mathscr{F}^0), \mathscr{T}_{\mathrm{so}})$ topologikus csoport). Ehhez legyen $\varepsilon > 0$ ill. $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}^0$ tetszőlegesek valamint rögzítsünk egy $V' \in \mathscr{T}_G(1)$ kompakt környezetet. Ekkor $\exists K' \subset G$ kompakt halmaz, melyre $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{supp}\, f_k \subset K'H$

és így $\forall y \in V' : \forall k \in \{1, \dots, n\} : \operatorname{supp} L_y(f_k) \subset (VK')H$. A $K := VK'$ kompakt halmazhoz válasszunk egy $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ függvényt, melyre $q(K) \subset [P(\varphi) = 1]$. Legyen most $k \in \{1, \dots, n\}$ rögzített, $\alpha_k \in \mathscr{K}(G; \mathscr{H}_\sigma) : F(\alpha_k) = f_k$ és $\varepsilon' > 0$ olyan kicsi, hogy $(\varepsilon')^2 \int \varphi d\mu_G < \varepsilon$ teljesüljön. Ekkor az előző állításbeli $\Psi$ folytonos függvényre alkalmazzuk a (2.1.16) állítást, $\alpha_k$, $\operatorname{supp} \varphi$, $\varepsilon'$ paraméterekkel: $\exists U_k \in \mathscr{T}_{\text{ind}}(\alpha_k) : \forall \alpha \in U_k : \sup_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \|F(\alpha_k - \alpha)(x)\|_\sigma < \varepsilon'$. Mivel (2.1.17) (ii) szerint $G \to \mathscr{K}(G; \mathscr{H}_\sigma); x \mapsto L_x(\alpha_k)$ folytonos így $\exists V_k \in \mathscr{T}_G(1) : \forall x \in V_k : L_x(\alpha_k) \in U_k$. Így $\forall y \in V_k$ :

$$\begin{aligned}\sup_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \|F(\alpha_k - L_y(\alpha_k))(x)\|_\sigma &= \sup_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \|F(\alpha_k) - L_y(F(\alpha_k))(x)\|_\sigma = \\ &= \sup_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \|f_k(x) - L_y(f_k)(x)\|_\sigma < \varepsilon'.\end{aligned}$$

Legyen $\bigcap_{k=1}^{n} V_k \cap V' =: V \in \mathscr{T}_G(1)$. Ekkor $y \in V, 1 \leq k \leq n$ esetén:

$$\begin{aligned}\|L_y(f_k) - f_k\|^2 = \int \varphi \|L_y(f_k) - f_k\|_\sigma^2 d\mu_G &\leq \sup_{x \in \operatorname{supp} \varphi} \|L_y(f_k)(x) - f_k(x)\|_\sigma^2 \int \varphi d\mu_G \\ &< (\varepsilon')^2 \int \varphi d\mu_G < \varepsilon,\end{aligned}$$

mivel $y \in V', 1 \leq k \leq n$ esetén $\operatorname{supp}(L_y(f_k) - f_k) \subset KH$ így $\varphi$ megválasztása folytán a normanégyzet számolható a fenti integrállal. Kaptuk: $\forall y \in V$ esetén

$$L_y \in W^\varepsilon_{f_1, \dots, f_n}(id_{\mathscr{F}^0}) := \{u \in \mathrm{U}(\mathscr{F}^0) \mid \forall k \in \{1, \dots, n\} : \|u(f_k) - f_k\| < \varepsilon\},$$

és mivel az ilyen alakú környezetek az $id_{\mathscr{F}^0} \in \mathrm{U}(\mathscr{F}^0)$ pontnak $\mathscr{T}_{\text{so}}$ szerinti környezetbázisát alkotják így kapjuk az $1 \in G$ pontbeli folytonosságot. ■

Legyen $(\mathscr{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ az $\mathscr{F}^0$ pre-Hilbert-tér teljes burka ($\mathscr{F}^0 \subset \mathscr{F}$). Ekkor (2.1.15) alapján az $L : G \to \operatorname{Aut}(\mathscr{F}^0); g \mapsto L_g$ folytonos unitér ábrázolás kiterjed az $\mathscr{F}$ teljes burokra: $\exists \operatorname{ind}_H^G(\sigma) : G \to \operatorname{Aut} \mathscr{F}$ folytonos unitér ábrázolás melyre $\forall g \in G : \operatorname{ind}_H^G(\sigma)(g) \restriction \mathscr{F}^0 = L_g$.

**3.1.6 Definíció. (Indukált folytonos unitér ábrázolás)** *A fent definiált* $\operatorname{ind}_H^G(\sigma) : G \to \operatorname{Aut} \mathscr{F}$ *folytonos unitér ábrázolását a* $G$ *csoportnak a* $H$ *részcsoport* $\sigma$ *folytonos unitér ábrázolása által indukált ábrázolásnak nevezzük.*

## 3.2. A Mackey-féle imprimitivitás-tétel

**3.2.1 Definíció. (Imprimitivitás-rendszer)** *Legyen* $G$ *LCH csoport,* $S$ *LCH tér valamint* $\rho : G \times S \to S$ *folytonos csoporthatás. Legyen továbbá* $\pi : G \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\pi)$ *a* $G$ *csoport-*

*nak folytonos unitér ábrázolása a $\mathscr{H}_\pi$ Hilbert-téren illetve legyen $M : \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$ nemelfajult *-ábrázolása a $\mathscr{K}(S;\mathbb{C})$ térnek szintén a $\mathscr{H}_\pi$ Hilbert-téren. Amennyiben $\forall x \in G : \forall \varphi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})$ esetén teljesül a*

$$\pi(x)M(\varphi)\pi(x^{-1}) = M(L_x(\varphi)) \quad \textit{(Imprimitivitás-egyenlőség)}$$

*úgy a $(\pi, M, \rho)$ hármast $G$ feletti* **imprimitivitás-rendszernek** *nevezzük.*

**3.2.2 Jelölés.** *Amennyiben $S = G/H$ valamely $H \subset G$ zárt részcsoportra és a $\rho$ hatás a második fejezetben megadott balról-szorzás úgy a $(\pi, M, G/H)$ jelölést használjuk ezekre az imprimitivitás-rendszerekre. (Mivel ebben a dolgozatban a $G/H$ faktortereken a $G$ csoportnak mindig ezen hatását tekintjük így ez nem okoz félreértést.)*

**3.2.3 Állítás.** *Az előbbi definíció jelöléseit használva, ha a $G$ csoport $\rho$ hatása az $S$ téren tranzitív akkor $M$ izometria.*

*Bizonyítás.* Láthatóan $\operatorname{Ker} M$ G-invariáns *-ideál ($\forall g \in G : \forall \varphi \in \operatorname{Ker} M : M(L_g\varphi) = \pi(g)M(\varphi)\pi(g^{-1}) = 0$ miatt $L_g\varphi \in \operatorname{Ker} M$). Emiatt $M$ injektív: Tegyük fel, hogy $\exists \varphi \in \operatorname{Ker} M : \varphi \neq 0$. Mivel $\operatorname{Ker} M$ *-ideál, ezért ha $\varphi$ nem volna valós értékű akkor $\operatorname{Re}\varphi = \dfrac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}, \operatorname{Im}\varphi = \dfrac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i} \in \operatorname{Ker} M$ valamelyike $\neq 0$ és ezek már valósak így feltehető, hogy $\varphi$ valós. Legyen $x \in S$ olyan, melyre $\varphi(x) \neq 0$ továbbá legyen $K := \left[|\varphi| \geq \dfrac{|\varphi(x)|}{2}\right] \subset S$ kompakt és $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Ekkor $\varphi \upharpoonright K$ $(\mathscr{T}_S \upharpoonright K, \mathscr{T}_{|\cdot|})$-folytonos és sehol sem 0 így $\dfrac{1}{\varphi \upharpoonright K}$ is ilyen, ezért a LCH terekre vonatkozó Tietze kiterjesztési tétel szerint $\exists \widetilde{\varphi} \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) : \widetilde{\varphi} \upharpoonright K = \dfrac{1}{\varphi \upharpoonright K}$. $\operatorname{Ker} M$ ideál mivolta miatt $\varphi\widetilde{\varphi} \in KerM$ és $\varphi\widetilde{\varphi}|K = 1$. A továbbiakban használjuk a $f := \varphi\widetilde{\varphi}$ jelölést. Legyen most $\psi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C})$ tetszőleges. Mivel G hatása az S téren tranzitív, ezért $\operatorname{supp}\psi \subset \bigcup_{g\in G} \rho_g(K)$ így $\exists n \in \mathbb{N} : \exists g_1, \ldots, g_n \in G : \operatorname{supp}\psi \subset \bigcup_{k=1}^{n} \rho_{g_k}(K)$. Ekkor $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : L_{g_k^{-1}} f \in \operatorname{Ker} M$ és $\rho_{g_k}(K) \subset [L_{g_k^{-1}} f = 1]$. Most hasonlóan járunk el, mint az egységosztás-tétel bizonyításában; definiáljuk az alábbi függvényeket

$$\begin{aligned}
h_1 &:= L_{g_1^{-1}} f \\
h_2 &:= (1 - L_{g_1^{-1}} f) L_{g_2^{-1}} f \\
&\vdots \\
h_n &:= (1 - L_{g_1^{-1}} f)(1 - L_{g_2^{-1}} f) \ldots (1 - L_{g_{n-1}^{-1}} f) L_{g_n^{-1}} f
\end{aligned}$$

Ekkor $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : h_k \in \operatorname{Ker} M$ mivel mindegyik szorzatban szerepel olyan elem, amely a $\operatorname{Ker} M$ altérhez tartozik. Teljes indukcióval igazolható, hogy $\sum_{k=1}^{n} h_k = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - L_{g_k^{-1}} f)$. Ha most $x \in \operatorname{supp} \psi$, akkor $\exists k \in \{1, \ldots, n\} : x \in \rho_{g_k}(K) \subset [L_{g_k^{-1}} f = 1]$ így $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$, tehát $\sum_{k=1}^{n} h_k \restriction K = 1$ és mivel ez a függvény is a $\operatorname{Ker} M$ altérből való így $\psi = \psi\left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \psi h_k \in \operatorname{Ker} M$. Ezek alapján $M = 0$ ami ellentmondás. Ez igazolja $M$ injektivitását. Ismert, hogy $\widetilde{\mathscr{K}(S;\mathbb{C})} = C_0(S;\mathbb{C})$ (pre-C*-algebra teljessé tétele). Emiatt $\exists \widetilde{M} : C_0(S;\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(H_\pi)$ *-homomorfizmus amely kiterjesztése az M leképezésnek. Ez szükségképpen injektív. Tegyük fel, hogy $\exists \varphi \in \operatorname{Ker} \widetilde{M} : \varphi \neq 0$. Ekkor $\exists x \in S : \varphi(x) \neq 0 \Rightarrow U := \left[|\varphi| > \frac{|\varphi(x)|}{2}\right] \in \mathscr{T}_S, \neq \emptyset$. Az Uriszon-lemmát alkalmazva a $(\{x\}, S \setminus U)$ párra kapjuk: $\exists \psi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}) : 0 \leq \psi \leq 1, \psi(x) = 1, \operatorname{supp} \psi \subset U$. Emiatt $\psi\varphi \in \mathscr{K}(S;\mathbb{C}), \neq 0$ és $\in \operatorname{Ker} \widetilde{M}$ tehát $0 = \widetilde{M}(\psi\varphi) = M(\psi\varphi)$ de $KerM = \{0\}$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\widetilde{M}$ injektív. Mivel $\widetilde{M}$ C*-algebrák közötti injektív *-homomorfizmus, ezért (1.5.6) alapján $\widetilde{M}$ izometria. Így tehát $M$ is az. ■

Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és legyen $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ részcsoportnak $\mathscr{H}_\sigma$ felett. Jelöljék rendre $\mathscr{F}^0, \mathscr{F}$ ugyanazokat a tereket, mint az előző alfejezetben illetve legyen $\operatorname{ind}_H^G(\sigma) : G \to \operatorname{Aut} \mathscr{F}$ a $H$ részcsoport $\sigma$ ábrázolása által indukált folytonos unitér ábrázolása a $G$ csoportnak. Tekintsük a következő leképezést.

$$\begin{cases} M: & \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{F}^0) \\ & \varphi \mapsto M(\varphi) := (f \mapsto \varphi \circ qf) \end{cases}$$

Ez a leképezés jóldefiniált, hiszen $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), f \in \mathscr{F}^0$ esetén először is $M(\varphi)(f) \in \mathscr{F}^0$, ugyanis ez a függvény láthatóan folytonos $\mathscr{H}_\sigma$-beli értékű, $\operatorname{supp} M(\varphi)(f) \subset \operatorname{supp} f \subset KH$ alkalmas $K \subset G$ kompakt halmazra és $x \in G, \xi \in H$ esetén

$$M(\varphi)(f)(x\xi) = \varphi(q(x))f(x\xi) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}\sigma(\xi^{-1})\varphi(q(x))f(x) =$$
$$= \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}\sigma(\xi^{-1})M(\varphi)(f)(x).$$

Továbbá láthatóan $M(\varphi) \in \operatorname{Lin}(\mathscr{F}^0)$ teljesül és végül válasszunk egy $\psi \in \mathscr{K}_+(G)$ függvényt, melyre $q(K) \subset [P(\psi) = 1]$. Ekkor

$$\|M(\varphi)(f)\|^2 = \int \psi \,\|\varphi \circ q f\|_\sigma^2 \, d\mu_G \leq \|\varphi\|_\infty^2 \int \psi \,\|f\|_\sigma^2 \, d\mu_G = \|\varphi\|_\infty^2 \,\|f\|^2$$

tehát $\|M(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_\infty$ így $M(\varphi) \in \mathscr{L}(\mathscr{F}^0)$. A $\varphi \mapsto M(\varphi)$ megfeleltetésről közvetlenül látható, hogy lineáris és multiplikatív valamint most belátjuk, hogy *-tartó. Legyenek ehhez $f, g \in \mathscr{F}^0$ tetszőlegesek, $K \subset G$ olyan kompakt halmaz, melyre $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset KH$ és $\mathscr{K}(G;\mathbb{C}) : q(K) \subset [P(\psi) = 1]$. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle M(\varphi)^*(f), g\rangle = \langle f, M(\varphi)(g)\rangle &= \int \psi\langle f, \varphi \circ q g\rangle_\sigma d\mu_G = \int \psi\overline{\varphi} \circ q\langle f, g\rangle_\sigma d\mu_G = \\ &= \int \psi\langle \overline{\varphi} \circ q f, g\rangle_\sigma d\mu_G = \langle M(\overline{\varphi})(f), g\rangle\end{aligned}$$

így kapjuk, hogy $M(\varphi)^* = M(\overline{\varphi})$. Tehát $M$ *-homomorfizmus. Ha $\varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ akkor $M(\varphi) \in \mathscr{L}(\mathscr{F}^0, \mathscr{F})$ így mivel $\mathscr{F}^0 \subset \mathscr{F}$ sűrű lineáris altér $\exists M^\sigma(\varphi) \in \mathscr{L}(\mathscr{F}) : M^\sigma(\varphi) \restriction \mathscr{F}^0 = M(\varphi)$, valamint $\|M^\sigma(\varphi)\| = \|M(\varphi)\|$. Így értelmezhetjük a következő leképezést: $M^\sigma : \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{F}); \varphi \mapsto M^\sigma(\varphi)$. Ez a leképezés is *-homomorfizmus; belátjuk az additivitást, a többi is közvetlenül ellenőrizhető. Legyen $\varphi, \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), f \in \mathscr{F}^0$. Ekkor

$$M^\sigma(\varphi + \psi)(f) = M(\varphi + \psi)(f) = M(\varphi)(f) + M(\psi)(f) = M^\sigma(\varphi)(f) + M^\sigma(\psi)(f)$$

és így mivel folytonos függvények kapjuk, hogy a $\mathscr{F}$ téren is megegyeznek. Továbbá $\|M^\sigma(\varphi)\| = \|M(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_\infty$ teljesül amiből kapjuk, hogy $M^\sigma$ *-homomorfizmus. Végül belátjuk, hogy az $M^\sigma$ *-ábrázolás nemelfajult. Legyen $f \in \mathscr{F}^0$ tetszőleges és $\psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ olyan, melyre $q(\operatorname{supp} f) \subset [\psi = 1]$. Ekkor $M^\sigma(\psi)(f) = M(\psi)(f) = \psi \circ q f = f \Rightarrow f \in \operatorname{Ran} M^\sigma$ vagyis $\operatorname{Ran} M^\sigma$ tartalmaz egy sűrű lineáris alteret tehát $M^\sigma$ nemelfajult.
Ha most $x, y \in G, f \in \mathscr{F}^0, \varphi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_H^G(\sigma)(x) M^\sigma(\varphi) \operatorname{ind}_H^G(\sigma)(x)^{-1}(f)(y) &= M^\sigma(\varphi) \operatorname{ind}_H^G(\sigma)(x)^{-1}(f)(x^{-1}y) \\ &= \varphi(q(x^{-1}y)) f(y) = M^\sigma(L_x(\varphi))(f)(y)\end{aligned}$$

Mivel $y \in G, f \in \mathscr{F}^0$ tetszőlegesek így kapjuk, hogy az egyenlőség-lánc két végén levő operátor megegyezik az $\mathscr{F}^0$ sűrű lineáris altéren így a folytonosság miatt a $\mathscr{F}$ téren is. Ezzel beláttuk az alábbi állítást.

**3.2.4 Állítás.** *A fenti jelöléseket használva,* $(\operatorname{ind}_H^G(\sigma), M^\sigma, G/H)$ *G feletti imprimitivitás-rendszer.*

**3.2.5 Definíció.** *Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és legyen $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ részcsoportnak $\mathscr{H}_\sigma$ felett. Legyen $\operatorname{ind}_H^G(\sigma) : G \to \operatorname{Aut}\mathscr{F}$ a $\sigma$ által indukált folytonos unitér ábrázolása a $G$ csoportnak. Ekkor az imént definiált $(\operatorname{ind}_H^G(\sigma), M^\sigma, G/H)$ $G$ feletti imprimitivitás-rendszert az $\sigma$ ábrázolás által* **indukált imprimitivitás-rendszernek** *nevezzük.*

**3.2.6 Definíció. (Imprimitivitás-rendszerek unitér ekvivalenciája)** *Legyen $G$ LCH csoport, $\rho_1, \rho_2$ folytonos hatásai a $G$ csoportnak rendre az $S_1, S_2$ LCH tereken, valamint $(\pi_1, M_1, \rho_1), (\pi_2, M_2, \rho_2)$ $G$ feletti imprimitivitás-rendszerek. Ekkor, amennyiben létezik olyan $W : \mathscr{H}_{\pi_1} \to \mathscr{H}_{\pi_2}$ unitér leképezés illetve $\varphi : S_2 \to S_1$ homeomorfizmus, melyekre*

(i) $\forall g \in G\ \forall s \in S_2 : \rho_2(g, s) = \rho_1(g, \varphi(s))$;

(ii) $\forall g \in G : W \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ W$;

(iii) $\forall \psi \in \mathscr{K}(S_1; \mathbb{C}) : W \circ M_1(\psi) = M_2(\psi \circ \varphi) \circ W$,

*úgy a fenti két imprimitivitás-rendszert* **unitér ekvivalensnek** *mondjuk és ezt a következőképpen jelöljük: $(\pi_1, M_1, \rho_1) \simeq (\pi_2, M_2, \rho_2)$*

*A következő fontos állítás az imprimitivitás-tétel egyértelműségi részét tartalmazza (ld. [Fol15, 6, No.6.5]).*

**3.2.7 Állítás.** *Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és legyen $\sigma_i : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_{\sigma_i})$ $(i = 1, 2)$ folytonos unitér ábrázolásai a $H$ részcsoportnak. Ekkor*

$$(\operatorname{ind}_H^G(\sigma_1), M^{\sigma_1}, G/H) \simeq (\operatorname{ind}_H^G(\sigma_2), M^{\sigma_2}, G/H) \Leftrightarrow \sigma_1 \simeq \sigma_2.$$

A fő tétel bizonyításában felhasználjuk majd a következő, [Já98, XVII, No.10]-ből származó lemmát, amelyre az eddigi eredményeink alapján saját bizonyítást adunk.

**3.2.8 Lemma.** *Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport és legyen $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ részcsoportnak $\mathscr{H}_\sigma$ felett. Jelöljék $\mathscr{F}^0, \mathscr{F}$ az előző alfejezetben definiált tereket. Ekkor ha $X \subset \mathscr{F}^0$ olyan lineáris altér, amely $\operatorname{ind}_H^G(\sigma)$-illetve $M^\sigma$-invariáns, továbbá $X(1) := \{f(1) \mid f \in X\} \subset \mathscr{H}_\sigma$ sűrű részhalmaz, akkor $X \subset \mathscr{F}$ sűrű lineáris altér.*

*Bizonyítás.* Legyen $F : \mathscr{K}(G; \mathscr{H}_\sigma) \to \mathscr{F}^0$ a (3.1.4)-ban definiált leképezés és tekintsük az $\overset{-1}{F}(X) \subset \mathscr{K}(G; \mathscr{H}_\sigma)$ alteret. Legyen $\varphi \in \mathscr{K}(G; \mathbb{C})$ tetszőleges, ekkor $f \in X \Rightarrow F(\varphi f) = P(\varphi) \circ qf = M^\sigma(P(\varphi))f \in X \Rightarrow \varphi f \in \overset{-1}{F}(X)$ vagyis $\mathscr{K}(G; \mathbb{C})X \subset \overset{-1}{F}(X)$. Legyen $\mathscr{A} := \operatorname{span} \mathscr{K}(G; \mathbb{C})X \subset \overset{-1}{F}(X)$. Ekkor világos, hogy $\mathscr{K}(G; \mathbb{C})\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$. Legyen

$x \in G$ tetszőleges. Ekkor $X(1) \subset X(x)$ ugyanis $f \in X : L_x(f) = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)(x)f \in X$ a feltételből és így $L_x(f)(x) = f(1) \in X(x)$ tehát $X(x) \subset \mathscr{H}_\sigma$ sűrű halmaz. Ha most $\varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\varphi(x) = 1$ akkor $f \in X : \varphi f \in \mathscr{A}$ miatt $X(x) \subset \mathscr{A}(x)$ így ez is sűrű a $\mathscr{H}_\sigma$ térben. Így alkalmazható (1.4.8) az $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}(G;\mathscr{H}_\sigma)$ altérre amely ezáltal sűrű. Mivel $F$ folytonos és szürjektív így $F(\mathscr{A}) \subset \mathscr{F}^0$ sűrű és $F(\mathscr{A}) \subset X$ miatt így $X \subset \mathscr{F}^0$ is sűrű. Végül mivel $\mathscr{F}^0 \subset \mathscr{F}$ sűrű így kapjuk az állítást. ■

**3.2.9 Tétel. (A Mackey-féle imprimitivitás-tétel)** *Legyen $G$ LCH csoport, $H \subset G$ zárt részcsoport. Legyen továbbá $(\pi, M, G/H)$ tranzitív imprimitivitás-rendszer $G$ felett. Ekkor létezik (unitér ekvivalencia erejéig egyértelműen) olyan $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H}_\sigma)$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ részcsoportnak, melyre $(\pi, M, G/H) \simeq (\mathrm{ind}_H^G(\sigma), M^\sigma, G/H)$.*

*Bizonyítás.* Az egyértelműségi részt tartalmazza az előző állítás. A létezés bizonyításakor a [Ørs79] cikkben leírt gondolatmenetet követjük, valamint [Já98, XVII, No.10]-ből származó megfontolásokat is átveszünk. A bizonyítást hat lépésre tagoljuk.
1.lépés: tekintsük a következő halmazt:

$$D_1 := \mathrm{span}\,\pi(\mathscr{K}(G;\mathbb{C})^\bullet)\mathscr{H}_\pi = \mathrm{span}\,\{\pi(\varphi^\bullet)u \mid \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), u \in \mathscr{H}_\pi\}$$

Most igazoljuk, hogy $D_1 \subset \mathscr{H}_\pi$ sűrű lineáris altér. Ehhez tekintsük a következő leképezést:

$$\begin{cases} A : & \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi) \times \mathscr{H}_\pi \to \mathscr{H}_\pi \\ & (u, x) \mapsto u(x). \end{cases}$$

Ez a leképezés folytonos, ugyanis ha $\varepsilon > 0, (u_0, x_0) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi) \times \mathscr{H}_\pi$ tetszőlegesek akkor $(u, x) \in \mathrm{B}_\varepsilon(u_0)^{\|\cdot\|_{op}} \times \mathrm{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|_\pi}(x_0)$ esetén

$$\begin{aligned} \|u_0(x_0) - u(x)\|_\pi &\le \|u_0(x_0) - u(x_0)\|_\pi + \|u(x_0) - u(x)\|_\pi \le \\ &\le \|u_0 - u\|_{op} \|x_0\|_\pi + \|u\|_{op} \|x_0 - x\|_\pi < \varepsilon \|x_0\|_\pi + (\|u_0\|_{op} + \varepsilon)\varepsilon, \end{aligned}$$

amiből következik $A$ $(u_0, x_0)$ pontbeli folytonossága. Így, mivel $\mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^1_\mathbb{C}(G;\mu_G^*)$ sűrű részhalmaz és $\pi$ folytonos, következik, hogy $A(\pi(\mathscr{K}(G;\mathbb{C})^\bullet) \times \mathscr{H}_\pi) = \pi(\mathscr{K}(G;\mathbb{C})^\bullet)\mathscr{H}_\pi \subset \pi(\mathrm{L}^1_\mathbb{C}(G;\mu_G^*))\mathscr{H}_\pi$ sűrű részhalmaz. Ekkor

$$D_1^\perp = \overline{D}_1^\perp \subset \pi(\mathrm{L}^1_\mathbb{C}(G;\mu_G^*))\mathscr{H}_\pi^\perp = \overline{\mathrm{span}\,\pi(\mathrm{L}^1_\mathbb{C}(G;\mu_G^*))\mathscr{H}_\pi}^\perp = \{0\}$$

mivel a csoportalgebra $\pi$ *-ábrázolása nemelfajult. Így $D_1 \subset \mathscr{H}_\pi$ sűrű lineáris altér. Ennek segítségével definiáljuk a következő halmazt.

$$D := M(\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}))D_1 = \mathrm{span}\,\{M(\psi)\pi(\varphi^\bullet)u \mid \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), u \in \mathscr{H}_\pi\}$$

Mivel $M$ multiplikatív így könnyen látható, hogy a $D$ altér $M$-invariáns. Továbbá az is igaz, hogy $D$ invariáns a $G$ csoport $\pi$ ábrázolására, ugyanis ha $x \in G, \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), u \in \mathscr{H}_\pi$, akkor

$$\pi(x)M(\psi)\pi(\varphi^\bullet)u = \pi(x)M(\psi)\pi(x)^{-1}\pi(x)\pi(\varphi^\bullet)u = M(L_x(\psi))\pi(L_x(\varphi)^\bullet)u \in D.$$

Most belátjuk, hogy $D \subset \mathscr{H}_\pi$ sűrű lineáris altér ami ekvivalens azzal, hogy $D^\perp = \{0\}$. Legyen $v \in D^\perp$ tetszőleges. Ekkor $\forall \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), u \in \mathscr{H}_\pi$ : $0 = \langle M(\psi)\pi(\varphi^\bullet)u, v\rangle_\pi = \langle \pi(\varphi^\bullet)u, M(\overline{\psi})v\rangle_\pi \Rightarrow M(\overline{\psi})v \in D_1^\perp$ amiről láttuk, hogy sűrű lineáris altér így kapjuk, hogy $\forall \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) : M(\psi)v = 0$ amiből következik, a nemelfajultság (1.5.8)-beli jellemzése szerint, hogy $v = 0$, mivel $M$ nemelfajult. Végül belátjuk, hogy $\forall \xi \in D : \exists \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) : M(\psi)\xi = \xi$. Ha $\xi \in D$ akkor $\exists n \in \mathbb{N} : \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \exists \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$, valamint $\exists u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{H}_\pi$ : $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} M(\psi_k)\pi(\varphi_k^\bullet)u_k$. Ekkor ha $\psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ : $\operatorname{supp}\psi_k \subset [\psi = 1]$ akkor $M(\psi)M(\psi_k) = M(\psi\psi_k) = M(\psi_k)$ és így láthatóan $M(\psi)\xi = \xi$ fennáll.
2.lépés: Tekintsük a következő leképezést:

$$\begin{cases} B: & \mathscr{H}_\pi \times \mathscr{H}_\pi \to \mathscr{K}(G;\mathbb{C})' \\ & (x,y) \mapsto \mu_{x,y} := \langle M \circ P(\cdot)x, y\rangle_\pi \end{cases}$$

ami jóldefiniált, hiszen $P$ $(\mathscr{T}_{\text{ind}}, \mathscr{T}_{\text{ind}})$-folytonos, $M$ $(\mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty}, \mathscr{T}_{\|\cdot\|_{op}})$-folytonos, valamint $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_\infty} \preccurlyeq \mathscr{T}_{\text{ind}}$ és a kompozícióban szereplő leképezések mind lineárisak. Továbbá látható, hogy $B$ szeszkvilineáris. Most belátjuk, hogy $B$ konjugált-szimmetrikus. Ehhez legyen $x, y \in \mathscr{H}_\pi, \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ tetszőleges és tekintsük a következőt:

$$\begin{aligned} \mu_{y,x}(\varphi) &= \langle M(P(\varphi))y, x\rangle_\pi = \overline{\langle x, M(P(\varphi))y\rangle_\pi} = \overline{\langle M(P(\varphi))^* x, y\rangle_\pi} = \\ &= \overline{\langle M(P(\overline{\varphi}))x, y\rangle_\pi} = \overline{\mu_{x,y}}(\varphi) \end{aligned}$$

így $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$. Az is igaz, hogy $x \in \mathscr{H}_\pi$ esetén $\mu_{x,x}$ pozitív Radon-mérték, ugyanis ha $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ akkor $P(\varphi) \in \mathscr{K}_+(G/H) \Rightarrow M(P(\varphi))$ pozitív elem az $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$ algebrában így (1.5.4) alapján $M(P(\varphi))$ pozitív operátor és így $\mu_{x,x}(\varphi) = \langle M(P(\varphi))x, x\rangle_\pi \geq 0$. Végül megemlítjük, hogy $g \in G, x, y \in \mathscr{H}_\pi, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), \varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ esetén

$$\begin{aligned} \mu_{M(\psi_1)x, M(\psi_2)y}(\varphi) &= \langle M(P(\varphi))M(\psi_1)x, M(\psi_2)y\rangle_\pi = \langle M(\overline{\psi_2})M(P(\varphi))M(\psi_1)x, y\rangle_\pi = \\ &= \langle M(P(\overline{\psi_2} \circ q\varphi\psi_1 \circ q))x, y\rangle_\pi = (\overline{\psi_2}\psi_1 \circ q) \cdot \mu_{x,y}(\varphi) \end{aligned}$$

vagyis $\mu_{M(\psi_1)x,M(\psi_2)y} = (\overline{\psi_2}\psi_1 \circ q) \cdot \mu_{x,y}$, illetve

$$\begin{aligned}\mu_{\pi(g)x,\pi(g)y}(\varphi) &= \langle M(P(\varphi))\pi(g)x, \pi(g)y\rangle_\pi = \langle \pi(g^{-1})M(P(\varphi))\pi(g)x, y\rangle_\pi \\ &= \langle M(P(L_{g^{-1}}(\varphi)))x, y\rangle_\pi = L_g(\mu_{x,y})(\varphi)\end{aligned}$$

ezért $\mu_{\pi(g)x,\pi(g)y} = L_g(\mu_{x,y})$ (ahol használtuk az imprimitivitás-egyenletet illetve azt, hogy $P$ felcserélhető az eltolásokkal).
3.lépés: Tekintsük a következő halmazt: $Abs(\mu_G) := \{\mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})' \mid \exists f \in C(G;\mathbb{C}) : \mu = f \cdot \mu_G\}$ amely láthatóan lineáris altere a $\mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ térnek, valamint mivel láttuk, hogy $f \in C(G;\mathbb{C}), \mu \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})'$ esetén $\overline{f \cdot \mu} = \overline{f} \cdot \overline{\mu}$ teljesül így, felhasználva, hogy $\overline{\mu_G} = \mu_G$, azt is kapjuk, hogy $Abs(\mu_G)$ zárt a Radon-mértékek konjugálására. Ezenfelül ha $\mu \in Abs(\mu_G)$, valamint $f_1, f_2 \in C(G;\mathbb{C})$ olyanok, melyekre $\mu = f_1 \cdot \mu_G = f_2 \cdot \mu_G$ akkor (1.6.6), (2.1.20) alapján

$$\emptyset = \operatorname{supp}(f_1 - f_2) \cdot \mu_G = \overline{\operatorname{supp}\mu_G \cap [f_1 - f_2 \neq 0]} = \operatorname{supp}(f_1 - f_2) \Rightarrow f_1 = f_2$$

adódik, vagyis a $\mu$ Radon-mértékhez tartozó súlyfüggvény egyértelmű ezáltal jóldefiniált az $A : Abs(\mu_G) \to C(G;\mathbb{C}); f \cdot \mu_G \mapsto f$ leképezés amelyről szintén ezen egyértelműség felhasználásával látható, hogy lineáris és megtartja a konjugálást. Továbbá ha $\mu \in Abs(\mu_G)$ pozitív Radon-mérték, akkor $f := A(\mu) \in C_+(G)$ ugyanis $f \cdot \mu_G = \mu = \overline{\mu} = \overline{f} \cdot \mu_G$ így az egyértelműség miatt $f = \overline{f} \Rightarrow f$ valós. Ha most indirekt feltesszük, hogy $\exists t \in G : f(t) < 0$ akkor $\exists U \in \mathscr{T}_G : U \neq \emptyset$ és $f \upharpoonright U < 0$. Legyen $\varphi \in \mathscr{K}_+(G) : \operatorname{supp}\varphi \subset U$. Ekkor $-f\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ és $\neq 0$ így (2.1.20) alapján $\mu(-\varphi) = f \cdot \mu_G(-\varphi) = \mu_G(-f\varphi) > 0 \Rightarrow \mu(\varphi) < 0$ ami ellentmond $\mu$ pozitivitásának. Ezek szerint a $Abs(\mu_G) \to \mathbb{C}; f \cdot \mu_G \mapsto f(1)$ leképezés lineáris, konjugálás tartó illetve ha $\mu \in Abs(\mu_G)$ pozitív Radon-mérték akkor $f(1) \geq 1$.
4.lépés: Belátjuk, hogy $\operatorname{Ran} B \upharpoonright D \times D \subset Abs(\mu_G)$. Ehhez először igazoljuk, hogy $\forall x, y \in \mathscr{H}_\pi$ esetén $\exists \lambda_{x,y} \in \mathscr{K}(G \times G;\mathbb{C})'$ amelyre

$$f \otimes g \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \otimes \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) : \lambda_{x,y}(f \otimes g) = \langle M(P(f))\pi(g^\bullet)x, y\rangle_\pi.$$

Legyenek $x, y \in \mathscr{H}_\pi$ illetve $f \in \mathscr{K}(G \times G;\mathbb{C})$ rögzítettek és $b \in G$ tetszőleges. Ekkor $f^b := f \circ \mathrm{in}_{1,b}$ folytonos és mivel $\operatorname{supp} f^b \subset \mathrm{pr}_1(\operatorname{supp} f)$ ami kompakt így $f^b \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C};\mathrm{pr}_1(\operatorname{supp} f))$, valamint (2.1.16) közvetlen alkalmazása mutatja, hogy az $G \ni b \mapsto f^b \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ leképezés $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\mathrm{ind}})$-folytonos és a tartója $\subset \mathrm{pr}_2(\operatorname{supp} f)$. Tekintsük a következő leképezést.

$$G \to \mathscr{H}_\pi; b \mapsto M \circ P(f^b)\pi(b)x$$

Az előzőek alapján a $G \mapsto \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi); b \mapsto M(P(f^b))$ leképezés $(\mathscr{T}_G, \mathscr{T}_{\|\cdot\|_{op}})$-folytonos valamint $\pi$ folytonossága miatt a $G \mapsto \mathscr{H}_\pi; b \mapsto \pi(b)x$ leképezés szintén folytonos. Ha most

$b_1, b_2 \in G$ tetszőlegesek akkor

$$\left\|M(P(f^{b_1}))\pi(b_1)x - M(P(f^{b_2}))\pi(b_2)x\right\|_\pi \leq \left\|M(P(f^{b_1}))\pi(b_1)x - M(P(f^{b_1}))\pi(b_2)x\right\|_\pi + \\ + \left\|M(P(f^{b_1}))\pi(b_2)x - M(P(f^{b_2}))\pi(b_2)x\right\|_\pi \leq \left\|M(P(f^{b_1}))\right\|_{op} \|\pi(b_1)x - \pi(b_2)x\|_\pi + \\ + \left\|M(P(f^{b_1})) - M(P(f^{b_2}))\right\|_{op} \|\pi(b_2)x\|_\pi$$

ami, az imént említett leképezések folytonosságának felhasználásával, mutatja a fenti leképezés folytonosságát. Így a

$$\vartheta(f) : G \to \mathbb{C}; b \mapsto \langle M \circ P(f^b)\pi(b)x, y\rangle$$

megfeleltetés szintén folytonos, valamint a fentiek alapján $\operatorname{supp}\vartheta(f) \subset \operatorname{pr}_2(\operatorname{supp} f)$ így $\vartheta(f) \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$. Emiatt jóldefiniált a $\vartheta : \mathscr{K}(G \times G;\mathbb{C}) \to \mathscr{K}(G;\mathbb{C}); f \mapsto \vartheta(f)$ leképezés ami láthatóan lineáris valamint az eddigiek alapján ha $K \subset G \times G$ kompakt akkor $\vartheta(\mathscr{K}(G\times G;\mathbb{C};K)) \subset \mathscr{K}(G;\mathbb{C};\operatorname{pr}_2(K))$. Legyen most $K \subset G\times G$ kompakt illetve $f \in \mathscr{K}(G \times G;\mathbb{C};K)$ tetszőleges. Ekkor $b \in G$ esetén

$$|\vartheta(f)(b)| = |\langle M \circ P(f^b)\pi(b)x, y\rangle| \leq \left\|M \circ P(f^b)\right\|_{op} \|\pi(b)x\|_\pi \|y\|_\pi = \\ = \left\|P(f^b)\right\|_\infty \|x\|_\pi \|y\|_\pi \leq C_K \left\|f^b\right\|_\infty \|x\|_\pi \|y\|_\pi \leq C_K \|f\|_\infty \|x\|_\pi \|y\|_\pi$$

teljesül, mivel $M, \pi(b)$ izometriák illetve a $C_K$ konstans a

$$P \circ \operatorname{in}_{\operatorname{pr}_2(K)} : \mathscr{K}(G;\mathbb{C};\operatorname{pr}_2(K)) \to \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C};q(\operatorname{pr}_2(K)))$$

operátor korlátosságából adódik. Így kapjuk, hogy $\|\vartheta(f)\|_\infty \leq C_K \|f\|_\infty \|x\|_\pi \|y\|_\pi$ vagyis a $\vartheta \circ \operatorname{in}_K : \mathscr{K}(G\times G;\mathbb{C};K) \to \mathscr{K}(G;\mathbb{C};\operatorname{pr}_2(K))$ lineáris operátor folytonos így (1.4.3) (ii) alapján $\vartheta$ folytonos. Definiáljuk: $\lambda_{x,y} := \mu_G \circ \vartheta \in \mathscr{K}(G \times G;\mathbb{C})'$. Most belátjuk, hogy $\lambda_{x,y}$ rendelkezik a fenti tulajdonsággal. Legyen $f \otimes g \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}) \otimes \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$; ekkor $b \in G$ esetén $(f \otimes g)^b = fg(b)$ így

$$\lambda_{x,y}(f \otimes g) = \int g(b)\langle M(P(f))\pi(b)x, y\rangle d\mu_G(b) = \langle M(P(f))(\cdot)x, y\rangle \circ \int^{\mathrm{w}} g(b)\pi(b)d\mu_G(b) = \\ = \langle M(P(f))(\cdot)x, y\rangle \circ \pi(g^\bullet) = \langle M(P(f))\pi(g^\bullet)x, y\rangle$$

mivel a $\langle M(P(f))(\cdot)x, y\rangle : \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál $(\mathscr{T}_{so}, \mathscr{T}_{|\cdot|})$-folytonos. (Ugyanis, ha $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$ olyan általánosított sorozat melyre $u_\alpha \overset{\mathscr{T}_{so}}{\to} u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi)$, akkor $u_\alpha(x) \to u(x) \Rightarrow M(P(f))u_\alpha(x) \to M(P(f))u(x) \Rightarrow \langle M(P(f))u_\alpha(x), y\rangle \to \langle M(P(f))u(x), y\rangle$.) Így (1.6.24) alapján felcserélhető a gyenge integrállal.

A következőkben megmutatjuk, hogy $x, y \in \mathscr{H}_\pi, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ esetén $\mu_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y} \in Abs(\mu_G)$. Ehhez legyen $\varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ tetszőleges:

$$\begin{aligned}
\mu_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}(\varphi) &= \langle M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x, \pi(\psi_2^\bullet)y\rangle_\pi = \overline{\langle \pi(\psi_2^\bullet)y, M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x\rangle_\pi} = \\
&\overset{(1)}{=} \overline{\langle(\cdot)y, M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x\rangle_\pi \circ \int^{\mathrm{w}} \psi_2(c)\pi(c)d\mu_G(c)} = \\
&\overset{(2)}{=} \overline{\int \psi_2(c)\langle \pi(c)y, M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x\rangle_\pi d\mu_G(c)} = \\
&\overset{(3)}{=} \int \overline{\psi_2}(c)\langle M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x, \pi(c)y\rangle_\pi d\mu_G(c) = \\
&\overset{(4)}{=} \int \overline{\psi_2}(c)\langle \pi(c^{-1})M(P(\varphi))\pi(c)\pi(c^{-1})\pi(\psi_1^\bullet)x, y\rangle_\pi d\mu_G(c) = \\
&\overset{(5)}{=} \int \overline{\psi_2}(c)\langle M(P(L_{c^{-1}}(\varphi)))\pi(L_{c^{-1}}(\psi_1)^\bullet)x, y\rangle_\pi d\mu_G(c) = \\
&\overset{(6)}{=} \int \int \overline{\psi_2}(c)(L_{c^{-1}}(\varphi) \otimes L_{c^{-1}}(\psi_1))(a,b)\lambda_{x,y}(a,b)d\mu_G(c) = \\
&\overset{(7)}{=} \int \Delta_G(a^{-1})\Delta_G(a) \int \overline{\psi_2}(c)\varphi(ca)\psi_1(cb)d\mu_G(c)\lambda_{x,y}(a,b) = \\
&\overset{(8)}{=} \int \int \overline{\psi_2}(ca^{-1})\varphi(c)\psi_1(ca^{-1}b)\Delta_G(a^{-1})d\mu_G(c)\lambda_{x,y}(a,b) = \\
&\overset{(9)}{=} \int \varphi(c) \int \overline{\psi_2}(ca^{-1})\psi_1(ca^{-1}b)\Delta_G(a^{-1})\lambda_{x,y}(a,b)d\mu_G(c) = \\
&= \int \varphi h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y} d\mu_G = h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y} \cdot \mu_G(\varphi)
\end{aligned}$$

ahol $c \in G : h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}(c) = \lambda_{x,y}(\Phi(c,\psi_1,\psi_2)),\ a, b \in G:$

$$\Phi(c,\psi_1,\psi_2)(a,b) = \overline{\psi_2}(ca^{-1})\psi_1(ca^{-1}b)\Delta_G(a^{-1}).$$

Mielőtt rátérnénk $\Phi$ tulajdonságaira azelőtt nézzük a fenti lépések helyességét: az (1)-beli felírással azt hangsúlyozzuk, hogy ott egy gyenge integrál folytonos lineáris funkcionál általi képe szerepel ($\langle(\cdot)y, M(P(\varphi))\pi(\psi_1^\bullet)x\rangle_\pi : \mathscr{L}(\mathscr{H}_\pi) \to \mathbb{C}$ $(\mathscr{T}_{so}, \mathscr{T}_{|\cdot|})$-folytonossága hasonlóan látható, mint egy korábbi esetben) amelyeket ezután (2)-ben fel is cserélünk továbbá látható, hogy a (2)-ben levő integrandus $\in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$. Mivel $\mu_G$ valós (pozitív) Radon-mérték, így (3)-ban „bevihetjük" a konjugálást az integrálba. A következő két lépésben kihasználva, hogy $\pi$ unitér ábrázolása a $G$ csoportnak, átírhatjuk az integrandusban szereplő skaláris szorzatot az (5)-ben levő alakra (eközben felhasználjuk az imprimitivitás-egyenletet illetve az alaptételnél említett kapcsolatát a csoport illetve csoportalgebra ábrázolásának: $\pi(c)\pi(\varphi^\bullet) = \pi(L_c(\varphi)^\bullet)$). A következő lépésben $\lambda_{x,y}$ azon tulajdonságát használjuk ki ami az $f \otimes g$ alakú függvényeken felvett értékeire vonatkozik.

Az így kapott

$$\begin{cases}(G\times G)\times G\to\mathbb{C}\\((a,b),c)\mapsto\overline{\psi_2}(c)\varphi(ca)\psi_1(cb)=\overline{\psi_2}\circ\mathrm{pr}_2\,\varphi\circ(\mathrm{pr}_2\,\mathrm{pr}_1\circ\mathrm{pr}_1)\psi_1\circ(\mathrm{pr}_2\,\mathrm{pr}_2\circ\mathrm{pr}_1)((a,b),c)\end{cases}$$

integrandus ezen felírásból láthatóan $\in C((G\times G)\times G;\mathbb{C})$ valamint, hogy a tartója $\subset((\operatorname{supp}\psi_2)^{-1}\operatorname{supp}\varphi\times(\operatorname{supp}\psi_2)^{-1}\operatorname{supp}\psi_1)\times\operatorname{supp}\psi_2\subset(G\times G)\times G$ kompakt így $\in\mathscr{K}((G\times G)\times G;\mathbb{C})$ és emiatt jogos (7)-ben az elemi Fubini-tétel szerinti integrálcsere. A következő lépésben (2.1.21) (ii)-t használjuk. Végül a (8)-beli integrandusról az előzőhöz hasonlóan látható, hogy $\in\mathscr{K}((G\times G)\times G;\mathbb{C})$ így ismét használható az elemi Fubini-tétel.
Tekintsük most a következő leképezéseket.

$$\begin{cases}\iota: & G\times\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\times\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\to\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\times\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\\ & (c,\psi_1,\psi_2)\mapsto(L_{c^{-1}}(\psi_1),\overline{L_{c^{-1}}(\psi_2)})\end{cases},\quad\begin{cases}\gamma: & G\times G\to G\times G\\ & (a,b)\mapsto(a^{-1}b,a^{-1})\end{cases}$$

Mindkét leképezés folytonos, mert komponenseik folytonosak ($\iota$ esetén ez (2.1.17) (ii) alapján látható, $\gamma$ esetén pedig a csoportműveletek folytonosságából), sőt, $\gamma$ homeomorfizmus is mivel látható, hogy a $G\times G\to G\times G;(a,b)\mapsto(b^{-1},b^{-1}a)$ leképezés éppen $\gamma^{-1}$ és ennek a folytonossága ugyan úgy látható, mint $\gamma$ esetén. Legyenek $\mathscr{K}(G\times G;\mathbb{C})\to\mathscr{K}(G\times G;\mathbb{C});f\overset{\Gamma}{\mapsto}f\circ\gamma;f\overset{\Lambda}{\mapsto}f\Delta_G^{-1}\circ\mathrm{pr}_1$; ezek (1.4.3) második következménye szerint folytonosak. Ekkor az eddigieket összevetve

$$\begin{cases}\Phi: & G\times\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\times\mathscr{K}(G;\mathbb{C})\to\mathscr{K}(G\times G;\mathbb{C})\\ & (c,\psi_1,\psi_2)\mapsto L_{c^{-1}}(\psi_1)\otimes\overline{L_{c^{-1}}(\psi_2)}\circ\gamma\Delta_G^{-1}\circ\mathrm{pr}_1\end{cases}$$

folytonos, mivel $\Phi=\Lambda\circ\Gamma\circ\otimes\circ\iota$ ($\otimes$ folytonosságát láttuk (1.4.3) első következményében). Eszerint $h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}=\lambda_{x,y}\circ\Phi(\cdot,\psi_1,\psi_2)\in C(G;\mathbb{C})$ így $\mu_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}\in Abs(\mu_G)$. Ha most $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{K}(G;\mathbb{C}),\psi_1,\psi_2\in\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}),x,y\in\mathscr{H}_\pi$ tetszőlegesek, akkor a második pontban látottakat felhasználva

$$\mu_{M(\psi_1)\pi(\varphi_1^\bullet)x,M(\psi_2)\pi(\varphi_2^\bullet)y}=(\overline{\psi_2}\psi_1\circ q)\cdot\mu_{\pi(\varphi_1^\bullet)x,\pi(\varphi_2^\bullet)y}=(h_{\pi(\varphi_1^\bullet)x,\pi(\varphi_2^\bullet)y}\overline{\psi_2}\psi_1\circ q)\cdot\mu_G\in Abs(\mu_G)$$

Végül ha $\xi_1,\xi_2\in D:\xi_1=\sum_{i=1}^{n}M(\psi_i)\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,\ \xi_2=\sum_{j=1}^{m}M(\psi_j)\pi(\varphi_j^\bullet)y_j$ alkalmasan választott $\varphi_i,\varphi_j\in\mathscr{K}(G;\mathbb{C}),\psi_i,\psi_j\in\mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ illetve $x_i,y_j\in\mathscr{H}_\pi$ elemekkel akkor

$$\mu_{\xi_1,\xi_2}=\sum_{i,j}\mu_{M(\psi_i)\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,M(\psi_j)\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}=\left(\sum_{i,j}h_{\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}\overline{\psi_j}\psi_i\circ q\right)\cdot\mu_G:=h_{\xi_1,\xi_2}\cdot\mu_G\in Abs(\mu_G),$$

ahol kihasználtuk $B$ szeszkvilinearitását illetve a Radon-mértékek folytonos függvénnyel való szorzásának első fejezetben említett tulajdonságait. Továbbá az $Abs(\mu_G)$ halmazbeli Radon-mértékek súlyfüggvényeinek egyértelműsége miatt $h_{\xi_1,\xi_2}$ iménti definíciója független a $\xi_1, \xi_2$ elemek generátorokkal való felírásától.
Ebben a lépésben még megnézzük a $h_{\xi_1,\xi_2}$ függvények további két fontos tulajdonsgát: legyen ehhez $\eta \in G, x, y \in \mathscr{H}_\pi, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ tetszőleges. Ekkor

$$\mu_{\pi(\eta)\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\eta)\pi(\psi_2^\bullet)y} = L_\eta(\mu_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}) = L_\eta(h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y} \cdot \mu_G) = L_\eta(h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}) \cdot \mu_G$$

így az egyértelműség miatt $h_{\pi(\eta)\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\eta)\pi(\psi_2^\bullet)y} = L_\eta(h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y})$ áll fenn és az általános esetben hasonlóan eljárva, mint fentebb kapjuk, hogy $\xi_1, \xi_2 \in D$ esetén is $h_{\pi(\eta)\xi_1,\pi(\eta)\xi_2} = L_\eta(h_{\xi_1,\xi_2})$ teljesül. Legyen most $\eta \in H$ és tekintsük a következőt:

$$\begin{aligned} L_\eta(h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y})(1) &= \lambda_{x,y}(\Phi(\eta^{-1},\psi_1,\psi_2)) = \int \vartheta(\Phi(\eta^{-1},\psi_1,\psi_2))d\mu_G \\ &= \int \langle M(P(\Phi(\eta^{-1},\psi_1,\psi_2)^b))\pi(b)x,y\rangle d\mu_G(b) \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

mivel tetszőleges $a, b \in G$ esetén

$$\begin{aligned} P(\Phi(\eta^{-1},\psi_1,\psi_2)^b)(aH) &= \int \Phi(\eta^{-1},\psi_1,\psi_2)^b(a\xi)d\mu_H(\xi) \\ &= \Delta_G(\eta)\int \overline{\psi_2}((\xi\eta)^{-1}a^{-1})\psi_1((\xi\eta)^{-1}a^{-1}b)\Delta_G((\xi\eta)^{-1}a^{-1})d\mu_H(\xi) \\ &= \Delta_G(\eta)\int R_\eta(\Phi(1,\psi_1,\psi_2)^b)(a\xi)d\mu_H(\xi) \\ &= \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})P(\Phi(1,\psi_1,\psi_2)^b)(aH) \end{aligned}$$

teljesül, így ezzel folytatva a korábbi egyenlőség-láncot, az alábbi adódik

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})\int \langle M(P(\Phi(1,\psi_1,\psi_2)^b))\pi(b)x,y\rangle d\mu_G(b) \\ &= \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})\int \vartheta(\Phi(1,\psi_1,\psi_2))d\mu_G \\ &= \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})\lambda_{x,y}(\Phi(1,\psi_1,\psi_2)) = \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})h_{\pi(\psi_1^\bullet)x,\pi(\psi_2^\bullet)y}(1). \end{aligned}$$

Általában, $\xi_1, \xi_2 \in D$ esetén ha $\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} M(\psi_i)\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,\ \xi_2 = \sum_{j=1}^{m} M(\psi_j)\pi(\varphi_j^\bullet)y_j$ alkalmasan választott $\varphi_i, \varphi_j \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \psi_i, \psi_j \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ illetve $x_i, y_j \in \mathscr{H}_\pi$ elemekkel akkor

$$L_\eta(h_{\xi_1,\xi_2})(1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(\eta^{-1})\overline{\psi_j}\psi_i \circ q(\eta^{-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})h_{\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(1)\overline{\psi_j}\psi_i \circ q(1) = \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})h_{\xi_1,\xi_2}(1)$$

Tehát $\forall \xi_1, \xi_2 \in D, \eta \in H : L_\eta(h_{\xi_1,\xi_2})(1) = \Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})h_{\xi_1,\xi_2}(1)$ teljesül.
Most rátérünk az említett második tulajdonságra: legyen $g \in G$, valamint az egyszerűség kedvéért legyenek $\xi_1, \xi_2 \in D$ az előző gondolatmenet végén felírt elemek és tekintsük a következőt.

$$h_{\pi(g)\xi_1,\xi_2}(1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{\pi(g)M(\psi_i)\pi(\varphi_i^\bullet)x_i,M(\psi_2)\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{M(L_g(\psi_i))\pi(L_g(\varphi_i)^\bullet)x_i,M(\psi_2)\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} L_g(\psi_i)(q(1))\overline{\psi_2}(q(1))h_{\pi(L_g(\varphi_i)^\bullet)x_i,\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(1)$$

Ha most $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$, akkor

$$h_{\pi(L_g(\varphi_i)^\bullet)x_i,\pi(\varphi_j^\bullet)y_j}(1) = \lambda_{x_i,y_j} \circ \Phi(1, L_g(\varphi_i), \varphi_j) = \lambda_{x_i,y_j} \circ \Phi \circ \mathrm{in}_{2,(1,\varphi_i,\varphi_j)}(L_g(\varphi_i))$$

és mivel (2.1.16) (ii) alapján $g \mapsto L_g(\varphi_i), g \mapsto L_g(\psi_i)$ folytonosak, így ez a függvény a $g \in G$ paramétertől szintén folytonosan függ, $\Phi, \lambda_{x,y}$ korábban bizonyított folytonosságát felhasználva. Mivel ez a fenti összeg minden tagjára érvényes így azt kaptuk, hogy $\forall \xi_1, \xi_2 \in D$ esetén a $h_{\pi(g)\xi_1,\xi_2}(1)$ függvény folytonosan függ a $g \in G$ paramétertől.
5.lépés: Az előző lépésekben definiált $A, B$ leképezések segítségével definiáljuk a következő leképezést.

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_D : & D \times D \to \mathbb{C} \\ & (\xi_1, \xi_2) \mapsto A(B(\xi_1, \xi_2))(1) = h_{\xi_1,\xi_2}(1) \end{cases}$$

Erről $A, B$ korábban bizonyított tulajdonságai alapján látható, hogy szemi-definit skaláris szorzás, valamint $x_1, x_2 \in D, \xi \in H$ esetén a 4. pont végén látottak alapján

$$\langle \pi(\xi)x_1, \pi(\xi)x_2 \rangle_D = h_{\pi(\xi)x_1,\pi(\xi)x_2}(1) = L_\xi(h_{x_1,x_1})(1) = \Delta_G(\xi)\Delta_H(\xi^{-1})h_{x_1,x_2}(1)$$
$$= \Delta_G(\xi)\Delta_H(\xi^{-1})\langle x_1, x_2 \rangle_D$$

Tetszőleges $\xi \in H$ esetén tekintsük a következő leképezést.

$$\begin{cases} \sigma_D(\xi): & D \to D \\ & x \mapsto \sqrt{\Delta_H(\xi)\Delta_G(\xi^{-1})}\pi(\xi)x \end{cases}$$

Mivel a $\pi$ szerinti ábrázoló operátorok lineáris bijekciók így ezek az operátorok szintén ilyenek, valamint a fentiek alapján $x_1, x_2 \in D$ esetén $\langle \sigma_D(\xi)x_1, \sigma_D(\xi)x_2 \rangle_D = \langle x_1, x_2 \rangle_D$ így ezen szemi-definit skaláris szorzás által indukált norma magtere invariáns a $\sigma(\xi)$ operátorokra. Továbbá megjegyezzük, hogy mivel $\pi, \Delta_G, \Delta_H$ csoport-homomorfizmusok ezért a $\sigma_D : H \to \mathrm{Aut}(D); \xi \mapsto \sigma_D(\xi)$ leképezés szintén csoport-homomorfizmus. Ha $\|\cdot\|_D$ jelöli a $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ által meghatározott félnormát, valamint $\mathscr{H} := D/\operatorname{Ker}\|\cdot\|_D$ és $[\cdot] : D \to \mathscr{H}$ a természetes faktorleképezést akkor ezek szerint $\forall \xi \in H$ esetén $\exists \sigma(\xi) \in \mathrm{Lin}(\mathscr{H})$ szürjektív lineáris leképezés, melyre $x \in D$ esetén $\sigma(\xi)[x] = [\sigma_D(\xi)x]$. Legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ a következőképpen értelmezve: $\forall x, y \in D : \langle [x], [y] \rangle = \langle x, y \rangle_D$. Ez a leképezés jóldefiniált (független a mellékosztálybeli reprezentánsok választásától), hiszen ha $x, x', y, y' \in D$ olyanok, melyekre $x' \in x + \operatorname{Ker}\|\cdot\|_D, y' \in y + \operatorname{Ker}\|\cdot\|_D$, akkor

$$|\langle x, y \rangle_D - \langle x', y' \rangle_D| \leq |\langle x - x', y \rangle_D| + |\langle x', y - y' \rangle_D| \overset{CSB}{\leq} \|x - x'\|_D \|y\|_D + \|x'\|_D \|y - y'\|_D = 0$$

Közvetlen ellenőrzés mutatja, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a $\mathscr{H}$ téren így $(\mathscr{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pre-Hilbert-tér. Továbbá ha $\xi, \eta \in H, x, y \in D$, akkor

$$\langle \sigma(\xi)[x], \sigma(\xi)[y] \rangle = \langle \sigma_D(\xi)x, \sigma_D(\xi)y \rangle_D = \langle x, y \rangle_D = \langle [x], [y] \rangle$$
$$\sigma(\xi\eta)[x] = [\sigma_D(\xi\eta)x] = [\sigma_D(\xi)(\sigma_D(\eta)x)] = \sigma(\xi)[\sigma_D(\eta)x] = \sigma(\xi)(\sigma(\eta)[x])$$

amelyek mutatják, hogy $\sigma : H \to \mathrm{U}(\mathscr{H})$ csoport-homomorfizmus vagyis $\sigma$ lineáris unitér ábrázolása a $H$ csoportnak $\mathscr{H}$ felett. Most belátjuk, hogy $\sigma$ folytonos ábrázolás; ehhez felhasználjuk a (2.1.13) (iii)-ban adott jellemzést. Legyen ehhez $(\xi_i)_{i \in I} \subset H$ általánosított sorozat, melyre $\xi_i \to \xi \in H$, illetve legyenek $x, y \in D$ tetszőlegesek. Ekkor $i \in I$ esetén:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\xi_i)[x], [y] \rangle &= \langle \sigma_D(\xi_i)x, y \rangle_D = \sqrt{\Delta_H(\xi_i)\Delta_G(\xi_i^{-1})}\langle \pi(\xi_i)x, y \rangle_D \\ &= \sqrt{\Delta_H(\xi_i)\Delta_G(\xi_i^{-1})}h_{\pi(\xi_i)x,y}(1) \to \sqrt{\Delta_H(\xi)\Delta_G(\xi^{-1})}h_{\pi(\xi)x,y}(1) \\ &= \langle \sigma_D(\xi)x, y \rangle_D = \langle \sigma(\xi)[x], [y] \rangle \end{aligned}$$

mivel, az 5.lépés legvégén látottak alapján, $h_{\pi(\cdot)x,y}(1)$ folytonos. Ezek szerint $\sigma$ folytonos unitér ábrázolása a $H$ csoportnak a $\mathscr{H}$ pre-Hilbert-tér felett így ha $\mathscr{H} \subset \widetilde{\mathscr{H}}$ jelöli $\mathscr{H}$ teljes burkát akkor (2.1.15) alapján egyértelműen létezik olyan $\widetilde{\sigma} : H \to \mathrm{U}(\widetilde{\mathscr{H}})$ folytonos

unitér ábrázolás, melyre $\forall\eta \in H : \widetilde{\sigma}(\eta) \restriction \mathscr{H} = \sigma(\eta)$.
Jelölje $\mathscr{F}^0$ a § 3.1 szerinti, $\widetilde{\sigma}$ ábrázoláshoz tartozó pre-Hilbert-teret illetve $\mathscr{F}^0 \subset \mathscr{F}$ ennek teljes burkát amelyen a skaláris szorzást illetve normát rendre $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{F}}, \|\cdot\|_{\mathscr{F}}$ jelöli.
6.lépés: Tetszőleges $x \in D$ elemre definiáljuk a következő leképezést: $f_x : G \to \widetilde{\mathscr{H}}; a \mapsto [\pi(a^{-1})x]$. Legyen most $x \in D$ rögzített. Belátjuk, hogy $f_x \in \mathscr{F}^0$. Legyen $a \in G, \eta \in H$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned} f_x(a\eta) &= [\pi((a\eta)^{-1})x] = [\pi(\eta^{-1})\pi(a^{-1})x] = \sqrt{\Delta_G(\eta)\Delta_H(\eta^{-1})}[\sigma_D(\eta^{-1})(\pi(a^{-1})x)] \\ &= \sqrt{\Delta_H(\eta)\Delta_G(\eta^{-1})}\widetilde{\sigma}(\eta^{-1})f_x(a). \end{aligned}$$

Tehát $f_x$ eleget tesz az $\mathscr{F}^0$ elemeitől megkövetelt egyenletnek. Most belátjuk, hogy $f_x \in C(G;\widetilde{\mathscr{H}})$. Tegyük fel először, hogy $x = M(\psi)\pi(\varphi^\bullet)u$ alakú, alkalmas $\varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C}), \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), u \in \mathscr{H}_\pi$ elemekkel. Legyen $a, b \in G$ tetszőleges és tekintsük a következőt.

$$\begin{aligned} \|f_x(a) - f_x(b)\|^2 &= \left\|[\pi(a^{-1})x - \pi(b^{-1})x]\right\|^2 = \left\|\pi(a^{-1})x - \pi(b^{-1})x\right\|_D^2 \\ &= \left\|\pi(a^{-1})M(\psi)\pi(a)\pi(a^{-1})\pi(\varphi^\bullet)u - \pi(b^{-1})M(\psi)\pi(b)\pi(b^{-1})\pi(\varphi^\bullet)u\right\|_D^2 = \\ &= \|M(L_{a^{-1}}(\psi))\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u - M(L_{b^{-1}}(\psi))\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u\|_D^2 = \\ &= \|M(L_{a^{-1}}(\psi))\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u\|_D^2 + \|M(L_{b^{-1}}(\psi))\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u\|_D^2 - \\ &- 2\operatorname{Re}\langle M(L_{a^{-1}}(\psi))\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u, M(L_{b^{-1}}(\psi))\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u\rangle_D = \\ &= |L_{a^{-1}}(\psi)(q(1))|^2 h_{\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u,\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u}(1) + \\ &+ |L_{b^{-1}}(\psi)(q(1))|^2 h_{\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u,\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u}(1) - \\ &- 2L_{a^{-1}}(\psi)(q(1))L_{b^{-1}}(\psi)(q(1))\operatorname{Re} h_{\pi(L_{a^{-1}}(\varphi)^\bullet)u,\pi(L_{b^{-1}}(\varphi)^\bullet)u}(1) = \\ &= |L_{a^{-1}}(\psi)(q(1))|^2 \lambda_{u,u}(\Phi(1, L_{a^{-1}}(\varphi), L_{a^{-1}}(\varphi))) + \\ &+ |L_{b^{-1}}(\psi)(q(1))|^2 \lambda_{u,u}(\Phi(1, L_{b^{-1}}(\varphi), L_{b^{-1}}(\varphi))) - \\ &- 2L_{a^{-1}}(\psi)(q(1))L_{b^{-1}}(\psi)(q(1))\operatorname{Re}\lambda_{u,u}(\Phi(1, L_{a^{-1}}(\varphi), L_{b^{-1}}(\varphi))) \end{aligned}$$

Mivel (2.1.16) (ii) alapján $g \mapsto L_{g^{-1}}(\varphi), g \mapsto L_{g^{-1}}(\psi)$ folytonosak, továbbá mivel $\Phi, \lambda_{u,u}$ szintén folytonosak így $b \to a$ esetén az egyenlőség-lánc végén levő kifejezés láthatóan $\to 0$. Tehát $f_x$ folytonos az $a \in G$ pontban ami tetszőleges volt így folytonos a teljes $G$ téren is. Végül, általános $x \in D$ elemre $f_x$ folytonossága adódik az előbbi, speciális esetből, hiszen a $D \ni x \mapsto f_x \in \mathscr{F}(G;\widetilde{\mathscr{H}})$ leképezés láthatóan lineáris.
Mielőtt $f_x$ tartójára vonatkozó feltételt ellenőriznénk, megnézzük még ezen függvények két fontos tulajdonságát. Legyen $\psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}), g \in G, y \in D$ tetszőleges és tekintsük

a következőt.

$$\begin{aligned}\langle f_{M(\psi)x}(g), [y]\rangle &= \langle [\pi(g^{-1})M(\psi)x], [y]\rangle = \langle [M(L_{g^{-1}}(\psi))\pi(g^{-1})x], [y]\rangle \\ &= \langle M(L_{g^{-1}}(\psi))\pi(g^{-1})x, y\rangle_D = L_{g^{-1}}(\psi)(q(1))h_{\pi(g^{-1})x,y} \\ &= \psi(q(g))\langle \pi(g^{-1})x, y\rangle_D = \langle \psi(q(g))f_x(g), [y]\rangle\end{aligned}$$

Mivel $y \in D$ tetszőleges volt, így kapjuk, hogy $\forall y \in D : \langle f_{M(\psi)x}(g) - \psi(q(g))f_x(g), [y]\rangle = 0$ viszont $[D] = \mathscr{H} \subset \widetilde{\mathscr{H}}$ sűrű lineáris altér, így $f_{M(\psi)x}(g) - \psi(q(g))f_x(g) = 0$. Mivel $g \in G$ is tetszőleges volt így kapjuk, hogy $f_{M(\psi)x} = \psi \circ q f_x$. A másik említett tulajdonság a következő. Minden $g, h \in G$ esetén

$$f_{\pi(g)x}(h) = [\pi(h^{-1})\pi(g)x] = [\pi((g^{-1}h)^{-1})x] = f_x(g^{-1}h) = L_g(f_x)(h),$$

vagyis $f_{\pi(g)x} = L_g(f_x)$.
Most belátjuk a tartóra vonatkozó feltételt: az első lépésben látottak alapján $\exists \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) : M(\psi)x = x$. Így az előbb belátott tulajdonságot felhasználva kapjuk: $f_x = f_{M(\psi)x} = \psi \circ q f_x$. Ha most $K \subset G$ olyan kompakt halmaz, melyre $q(K) = \operatorname{supp}\psi$ akkor $\operatorname{supp} f_x \subset \overset{-1}{q}(\operatorname{supp}\psi) = \overset{-1}{q}(q(K)) = KH$ így mindent összevetve $f_x \in \mathscr{F}^0$ adódik.
Most belátjuk, hogy $\|x\|_\pi^2 = \|f_x\|_{\mathscr{F}}^2$. Ehhez legyen $\psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C}) : M(\psi)x = x$, valamint $\varphi \in \mathscr{K}(G;\mathbb{C})$ olyan, melyre $\operatorname{supp}\psi \subset [P(\varphi) = 1]$. Ekkor $M$ multiplikativitása miatt $M(P(\varphi))x = M(P(\varphi))M(\psi)x = M(P(\varphi)\psi)x = M(\psi)x = x$ áll. Tekintsük a következőt:

$$\begin{aligned}\|f_x\|_{\mathscr{F}}^2 &= \int \varphi(t)\,\|f_x(t)\|^2\, d\mu_G(t) = \int \varphi(t)\left\|\pi(t^{-1})x\right\|_D^2 d\mu_G(t) \\ &= \int \varphi(t)h_{\pi(t^{-1})x,\pi(t^{-1})x}(1)d\mu_G(t) = \int \varphi(t)L_{t^{-1}}(h_{x,x})(1)d\mu_G(t) = \int \varphi(t)h_{x,x}(t)d\mu_G(t) \\ &= h_{x,x}\cdot\mu_G(\varphi) = \mu_{x,x}(\varphi) = \langle M(P(\varphi))x, x\rangle_\pi = \langle x, x\rangle_\pi = \|x\|_\pi^2\end{aligned}$$

Az eddigiek alapján tehát a $W : D \to \mathscr{F}^0; x \mapsto f_x$ leképezés lineáris izometria. Így mivel $D \subset \mathscr{H}_\pi$ sűrű lineáris altér $\exists!\ \widetilde{W} : \mathscr{H}_\pi \to \mathscr{F}$ lineáris izometria, melyre $\widetilde{W} \restriction D = W$.
Legyenek most $g \in G, x \in D, \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ tetszőlegesek és tekintsük a következőket:

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_H^G(\widetilde{\sigma})(g)(\widetilde{W}(x)) &= L_g(f_x) = f_{\pi(g)x} = \widetilde{W}(\pi(g)x) \\ M^{\widetilde{\sigma}}(\psi)(\widetilde{W}(x)) &= \psi \circ q f_x = f_{M(\psi)x} = \widetilde{W}(M(\psi)x)\end{aligned}$$

Mivel az egyenlőség-láncok végein folytonos lineáris operátorok állnak, melyek megegyeznek a $D \subset \mathscr{H}_\pi$ sűrű lineáris altéren így kapjuk, hogy $\forall g \in G, \psi \in \mathscr{K}(G/H;\mathbb{C})$ esetén

$$\operatorname{ind}_H^G(\widetilde{\sigma})(g) \circ \widetilde{W} = \widetilde{W} \circ \pi(g),\ \ M^{\widetilde{\sigma}}(\psi) \circ \widetilde{W} = \widetilde{W} \circ M(\psi)$$

vagyis a $\widetilde{W}$ operátor összeköti a $(\pi, M, G/H)$, $(\widetilde{\mathrm{ind}_H^G(\sigma)}, M^{\widetilde{\sigma}}, G/H)$ imprimitivitás-rendszereket. Még annak belátása maradt hátra, hogy a $\widetilde{W}$ unitér operátor. Az előzőek alapján, ha $g \in G, \psi \in \mathscr{K}(G/H; \mathbb{C})$ tetszőlegesek, akkor $\widetilde{\mathrm{ind}_H^G(\sigma)}(g)(\mathrm{Ran}\,\widetilde{W}) \subset \mathrm{Ran}\,\widetilde{W}$, valamint $M^{\widetilde{\sigma}}(\psi)(\mathrm{Ran}\,\widetilde{W}) \subset \mathrm{Ran}\,\widetilde{W}$ vagyis a $\mathrm{Ran}\,\widetilde{W} \subset \mathscr{F}^0$ lineáris altér invariáns az $\widetilde{\mathrm{ind}_H^G(\sigma)}, M^{\widetilde{\sigma}}$ ábrázolásokra. Továbbá $\widetilde{W}(D) \subset \mathrm{Ran}\,\widetilde{W}$ és $\{f(1) \mid f \in \widetilde{W}(D)\} = \{f_x(1) \mid x \in D\} = [D] = \mathscr{H} \subset \widetilde{\mathscr{H}}$ sűrű lineáris altér így (3.2.8) alapján $\mathrm{Ran}\,\widetilde{W} \subset \mathscr{F}$ sűrű lineáris altér. Mivel $\widetilde{W}$ izometria, így $\mathrm{Ran}\,\widetilde{W} \subset \mathscr{F}$ zárt altér amiből adódik $\widetilde{W}$ szürjektivitása. ■

# Irodalomjegyzék


[Bou87] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bou04] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics: Integration I*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Fol15] Gerald B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, 2015.

[HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis I*. Springer-Verlag, 1979.

[Já96] Kristóf János. *Az analízis elemei III*. ELTE TTK, Budapest, 1996.

[Já98] Kristóf János. *Az analízis elemei IV*. ELTE TTK, Budapest, 1998.

[Já21] Kristóf János. *Az analízis elemei V*. elektronikus jegyzet, `web.cs.elte.hu/~krja/`, 2021.

[Ørs79] Bent Ørsted. Induced representations and a new proof of the imprimitivity theorem. *Journal of Functional Analysis*, 31(3):355–359, 1979.

[Tre67] François Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, 1967.