Lie csoportok projektív ábrázolásai a kvantummechanikában

Holló László

2010. június 23.

Projektív ábrázolások szükségessége

A kvantummechanikában

- Egy eseményt a Hilbert-tér egy projektorának,
- Egy fizikai mennyiséget ezen Hilbert-tér önadjungált operátorának tekintjük.
- Szükség van tehát a téridő szimmetriacsoportjának irreducibilis projektív ábrázolásaira.

A szakdolgozatomban a négy- és több térdimenziós Galilei-csoport projektív ábrázolásaival foglalkoztam.

A Galilei-csoport

Az n térdimenziós Galilei-csoport

$$G \cong SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

A csoport egy általános eleme

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \in G$$

A szorzási szabály pedig

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})(R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}') = (RR', \tau + \tau', R\mathbf{v}' + \mathbf{v}, R\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \tau'\mathbf{v})$$

A csoport elemei mátrixba rendezhetők

$$\begin{pmatrix} R & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Projektív ábrázolás

Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ a projektorhálóját. Ekkor az $A\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$

$$A_g A_h = A_{gh}$$

csoporthomomorfitmust projektív ábrázolásnak nevezzük.

Wigner tétele értlmében, ha G összefüggő Lie-csoport, akkor a projektív ábrázolást egy unitér operátor generálja, azaz

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1}.$$

Unitér kociklusok

Ezen unitér operátorok szorására az

$$U_g U_h = \omega(g,h) U_{gh}$$

összefüggés teljesül, ahol $\omega(g,h)$ egy egységnyi abszolútértékű komplex szám. Ezt az ω függvényt *unitér kociklusnak* nevezzük.

Az unitér kociklusok között értelmezve van egy ekvivalencia-reláció, a *kohomológia*, koholomlóg unitér kociklusok ekvivalens a projektív ábrázolást generálnak.

Az (U,ω) párt a G csoport *sugárábrázolásának* nevezzük.

Projektív ábrázolás $\rightarrow$ Sugárábrázolás, unitér kociklus
Sugárábrázolás, unitér kociklusok kohomológia-osztálya $\rightarrow$ Projektív ábrázolás

A kibővítet csoport

Legyen $G_\omega = G \times \mathbb{T}$ kibővített csoport, és a csoportszorzás

$$(g, \lambda)(h, \mu) = (gh, \omega(g, h)\lambda\mu)$$

Tétel A G csoport sugárábrázolásai és a G_ω kibővített csoport unitér ábzázolásai kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

A projektív ábrátolások megtalálásához tehát szükség van

1. Az unitér kociklusok kohomológia-osztályaira
2. Az így kapott kibővített csoport unitér ábrázolásaira

Unitér kociklusok kohomológia-osztályai

Egy, a Lie-algebrán értlemezett zárt, antiszimmetrikus bilineáris formát *kommutátor-kociklusnak* nevezünk. Ezeken is értelmezve van egy *kohomológia*, ami ekvivalenciareláció.

Egy Lie-csoport unitér kociklusainak kohomológiaosztályai és a kommutártor-kociklusainak kohomológia-osztályai kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Mivel a Lie-algebra szerkezete egyszerűbb, először a kommutátor kociklusok kohomológiaosztályait határoztam meg, majd ez alapján az unitér kociklusokat.

Kommutátor kociklusok

Jelölje

- A_{ij} a forgatások infinitezimális generátorát,
- B_i az eltolágok infinitezimális generátorát,
- D_i a koordinátarendszerek közötti áttérés infinitezimális generátorát,
- F az időfejlődés infinitezimális generátorát.

A Lie-algebra kommutációs relációi ekkor

$$\begin{aligned} \left[A_{ij}, A_{jk}\right] &= A_{ik}, \\ [A_{ij}, B_j] &= B_i, \\ [A_{ij}, D_j] &= D_i, \\ [D_i, F] &= B_i, \end{aligned}$$

A Galilei csoport kommutátor kociklusai

A dolgozatomban beláttam, hogy $n \geq 4$ esetén az n térdimenziós Galilei csoport minden kommutátor kociklusához létezik egy vele kohomológ κ kommutátor kociklus, amire

$$\kappa(B_i, D_i) = \mu$$

és az összes többi páron felvett értéke nulla, μ pedig egy pozitív valós szám.

A Galilei csoport unitér kociklusai

Megmutattam, hogy a μ számmal indexelt kommutátor kociklushoz tartozó unitér kociklus

$$\omega_\mu\big((R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}')\big) = e^{\frac{i\mu}{2}(\langle\mathbf{u},R\mathbf{v}'\rangle-\langle\mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle+\tau'\langle\mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle)}$$

Ezek után meg kellett keresni a kibővített csoport unitér ábrázolásait.

Unitér ábrázolások

Ha egy G csoport féldirekt szorzat szerkezetű, azaz $G = H \times_t A$, ekkor a $(Z, \mu, \varphi, a_0, c_{a_0}, m)$ rendszert megengedett hatosnak nevezzük, ha

1. Z lokálisan kompakt H pálya $\hat{A}$ csoportban
2. μ nem-nulla Radon-mérték a Z pályán
3. φ a μ mérték sűrűségfüggvénye
4. a_0 egy rögzített pont a Z pályán
5. c_{a_0} az a_0 ponthoz tartozó Borel metszet-függvény
6. m az a_0 pontbeli kiscsoport unitér ábrázolása egy $\mathcal{K}$ Hilbert-téren

Unitér ábrázolások

Ekkor, ha μ invariáns mérték a Z pályán, és $c_0(a_0) = e_H$, akkor G csoport ábrázolása a $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(Z, \mu, \mathcal{K})$ Hilbert-téren

$$\left(U_{(h,a)}(f)\right)(p) = p(a)m\left(c_{a_0}(p)^{-1}\, h\, c_{a_0}(Q_{h^{-1}}p)\right)f(Q_{h^{-1}}p)$$

Mackey tétele értelmében, a megengedett hatosok által indukált unitér ábrázolások megadják a G csoport összes folytonos irreducibilis unitér ábrázolását.

Tehát ha azonosítjuk a megengedett hatos elemeit, akkor megkapjuk a csoport unitér ábrázolásait.

A kibővített csoport

A kibővitett csoport

$$G^\mu = SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$$

egy általános eleme pedig

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \zeta)$$

Ennek két részcsoportja

$$A^\mu = \{(1, \tau, \mathbf{0}, \mathbf{u}, \zeta)\}$$
$$H^\mu = \{(R, 0, \mathbf{v}, \mathbf{0}, 1)\}$$

és a H^μ csoport hatása az A^μ csoporton

$$t_{(R,\mathbf{v},1)}(\tau, \mathbf{u}, \zeta) = \left(\tau, R\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, \zeta e^{-i\frac{\mu}{2}(2\langle\mathbf{v}, R\mathbf{u}\rangle + \tau\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle)}\right)$$

A kibővített csoport

A kibővitett csoport

$$G^{\mu} = SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{T}$$

Ennek két részcsoportja

$$A^{\mu} = \{(1, \tau, \mathbf{0}, \mathbf{u}, \zeta)\}$$
$$H^{\mu} = \{(R, 0, \mathbf{v}, \mathbf{0}, 1)\}$$

Az A^{μ} egy Abel-csoport, a G^{μ} csoport pedig féldirekt szorzat szerkezetű

$$G^{\mu} = H^{\mu} \times_{t} A^{\mu}$$

Pályák az $\hat{A}^\mu$ csoporton

Az $\hat{A}^\mu = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{Z}$, ahol

$$(p_0, \mathbf{p}, k)(\tau, \mathbf{u}, \zeta) = \zeta^k e^{i(p_0\tau + \langle \mathbf{u}, \mathbf{p} \rangle)}.$$

A H^μ csoportnak van egy adjungált hatása $\hat{A}^\mu$ csoporton. A H^μ pályák pedig

$$Z_{k,\rho} = \{(p_0, \mathbf{p}, k) \,|\, \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + 2k\mu p_0 = \rho\}\,.$$

Borel metszet-függvény és a mérték

Válasszunk reprezentánst mindegyik pályáról, legyen

$$a_{k,\rho} = \left((2k\mu)^{-1}\rho, \mathbf{0}, k\right).$$

Az $a_{k,\rho}$ pontbeli Borel metszet-függvény

$$c_{a_{k,\rho}}\left(\left((2k\mu)^{-1}\left(\rho - \langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right), \mathbf{p}, k\right)\right) = \left(1, (k\mu)^{-1}\mathbf{p}, 1\right) \in H^{\mu}$$

A $Z_{k,\rho}$ pályán invariáns mérték lesz a Lebesgue-mérték, azaz

$$\mu = d\mathbf{p} \qquad\qquad \varphi \equiv 1$$

A kibővített csoport megengedett hatosa

Beláttam, hogy a pályák közük csak $k = -1$ esetén kapjuk meg a Galilei csoport sugárábrázolását. A megengedett hatos

1. A pálya $Z_{-1,\rho} = \left\{ \left(-\frac{1}{2\mu} \left(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \right), \mathbf{p}, -1 \right) \right\}$
2. A mérték a Lebesgue-mérték $d\mathbf{p}$
3. Ennek sűrűségfüggvénye $\varphi \equiv 1$
4. A reprezentáns pont $a_{-1,\rho} = \left(-\frac{1}{2\mu} \rho, \mathbf{0}, -1 \right)$
5. A Borel metszet-függvény $c\left(\left(-\frac{1}{2\mu} \left(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \right), \mathbf{p}, -1 \right) \right) = \left(1, -\frac{1}{\mu} \mathbf{p}, 1 \right)$
6. Az $a_{-1,\rho}$ pontbeli kiscsoport $G_{a_{-1,\rho}} = \{(R, 0, 1)\} \cong SO(n)$, ennek unitér ábrázolása m.

A kibővített csoport unitér ábrázolása

A megengedett hatos által indukált ábrázolás, ha s indexeli a kiscsoport folytonos, irreducibilis ábrázolásait

$$\left(U^{\mu,s,\rho}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)}f\right)(\mathbf{p}) =$$
$$\left(\zeta e^{\frac{i\tau\rho}{2\mu}}\right)^{-1} e^{i\left(\left\langle \mathbf{u},\mathbf{p}+\frac{\mu}{2}\mathbf{v}\right\rangle+\frac{\tau}{2\mu}\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right)} \cdot m^s(R)\, f\left(R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right)$$

A Galilei csoport sugárábrázolásai

Az így kapott unitér ábrázolás egyértelműen meghatároz egy sugárábrázolást

$$\left(V^{\mu,s}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\right)(\mathbf{p}) =$$

$$e^{i\left(\left\langle \mathbf{u},\mathbf{p}+\frac{\mu}{2}\mathbf{v}\right\rangle + \frac{\tau}{2\mu}\langle \mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right)} \cdot m^s(R) f\left(R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right)$$

A hozzá tartozó unitér kociklus pedig

$$\omega_\mu((R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}')) = e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u},R\mathbf{v}'\rangle - \langle \mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle + \tau'\langle \mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle)}$$

Ábrázolás a valós térben

Eddig a duális (impulzus) térben adtuk meg az ábrázolást, Fourier-transzformációval megkapható a valós térbeli ábrázolás. Ha a kiscsoportot triviálisan ábrázoljuk, akkor a Galilei csoport ábrázolása a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ Hilbert-téren

$$
\begin{aligned}
W^{\mu}_{(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{0})} &= e^{-i\frac{\tau}{2\mu}\Delta}, \\
\left(W^{\mu}_{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\right)(\mathbf{x}) &= e^{-i\mu\left(\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right)} f(R^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{u}))
\end{aligned}
$$

Kapcsolat a Schrödinger egyenlettel

Az időfeljődés infinitezimális generátora

$$H = \frac{-1}{2\mu}\Delta$$

Az eltolások infinitezimális generátorai

$$P_j = -i\partial_j$$

Ezek alapján

$$H = \sum \frac{P_j^2}{2\mu}$$

Azaz az időfeljődés infinitezimális generátora a teljes kinetikus energia.

Összefoglalás

- Minden $n \geq 4$ esetén visszavezettük az n térdimenziós Galilei-csoport projektív ábrázolásait egy kompakt Lie-csoport, az $SO(n)$ unitér ábrázolásaira
- A forgáscsoport triviális ábrázolása esetén megadtuk az ábrázoló operátorokat
- Homogén potenciál esetén a téridő szimmetriájából levezettük a Schrödinger egyenletet

Kérdések?

Köszönöm a figyelmet!

Kérdések?