Galilei-csoportok gyenge kohomológiái

Krisztián Jonatán

Témavezető: Dr. Andai Attila

BME Matematika Intézet

2018. június 12.

Tartalom

1. **Galilei-csoportok alapfogalmai**
   - Lie-algebra
   - Galilei csoport
   - Egyparaméteres részcsoport
   - Kommutátor kociklus, és azok gyenge kohomológiája
2. **Példák**
   - Speciális lineáris csoportok
   - 2+1 tér-idő dimenziós Galilei-csoport
3. **Egy számítógépes program**
   - Gyenge kohomológiák meghatározása Maple használatával.
   - Procedúrák ismertetése.
4. **Összefoglaló**

Lie-algebra

Adott egy V vektortér valamely $\mathbb{F}$ test felett és egy kétváltozós művelet $[.,.]$ úgy, hogy

$$[.,.] : V \times V \to V,$$

melyet kommutátornak vagy Lie-zárójelnek is neveznek és eleget tesz a következő 3 tulajdonságnak.

- Bilineáris, ha $\forall$ a, b skalárra és $\forall$ x, y, z vektorra.

  $$[ax+by,z] = a[x,z]+b[y,z], [z,ax+by] = a[z,x]+b[z,y]$$

- Antikommutatív, ha $\forall$ x, y vektorra.

  $$[x,y] = -[y,x]$$

- Teljesíti a Jacobi-azonosságot, ha $\forall$ x, y, z vektorra.

  $$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = 0$$

A Galilei-csoport definíciója.

1. A G_s speciális Galilei-csoport izomorf és homeomorf az $\mathbb{R}^3$ csoporttal. Elemeit "sebességként" interpretáljuk.
2. A G_t teljes Galilei-csoport alaphalmaza $\mathrm{SO}_3 \times \mathbb{R} \times \mathrm{G}_s \times \mathbb{R}^3$, a szorzás pedig:

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})(R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}') = (RR', \tau+\tau', R\mathbf{v}'+\mathbf{v}, R\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\tau'\mathbf{v}).$$

A csoport egy $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ elemének az inverze

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})^{-1} = (R^{-1}, -\tau, -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}(t\mathbf{v} - \mathbf{u}))$$

lesz. A teljes Galilei-csoport $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ elemét felfoghatjuk $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ olyan transzformációjaként, amely

$$t \mapsto t + \tau \tag{1}$$

$$\mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x} + t\mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{2}$$

formán hat.

A Galilei-csoport reprezentációja.

A csoport felírható egy $(n+2) \times (n+2)$ mátrix-csoport részcsoportjaként. Ahol $R \in \mathrm{SO}_n$ a térbeli forgatásokat, $\tau \in \mathbb{R}$ az idő eltolást, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó koordináta-rendszerek közti áttérést $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ térbeli eltolásokat reprezentálnak, és

$$\begin{pmatrix} R & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

módon mátrixba rendezve, és ezt ellátva a szokásos mátrixszorzással éppen a Galilei-csoporttal izomorf és homeomorf csoportot kapunk.

A Galilei-csoport reprezentációja.

Ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ fizikai tér egy pontját $t \in \mathbb{R}$ pedig a fizikai időt jelképezik, akkor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor balról szorozható a (3) mátrix-szal úgy, hogy:

$$\begin{pmatrix} R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{u} \\ t + \tau \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az (1) és (2) valóban fennáll.

Az egyparaméteres részcsoport definíciója.

Legyen $T > 0$ tetszőlegesen választott valós szám. Egy

$$\mathbb{R} \supset (-T, T) \to N \subset G, \quad t \mapsto r(t), \quad r(0) = e$$

leképezést a csoport e egységelemén áthaladó görbének nevezzük, ha

$$\rho := \phi \circ r$$

differenciálható. A görbe egyparaméteres részcsoport, ha

$$r(t)' r(s) = r(t+s),$$

illetve

$$F(\rho(t), \rho(s)) = \rho(t+s)$$

$$(-T < t, s, t+s < T).$$

Kommutátor kociklus

Legyen $\mathfrak{g}$ egy $\mathbb{R}$ feletti Lie-algebra a $[.,.]$ kommutátorral. Egy $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ bilineáris, antiszimmetrikus zárt függvényt a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra kommutátor-kociklusának nevezünk.

Gyenge kohomológia

A κ és κ' kommutátor-kociklusok kohomológok egymással, ha létezik olyan $\eta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, mellyel

$$\kappa'(.,.) = \kappa(.,.) + \eta \circ [.,.].$$

A két kommutátor-kociklus gyengén kohomológ, ha κ és κ' vagy $-\kappa$ és κ' kohomológ egymással.

SL(2,$\mathbb{R}$)

Az $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det M = 1; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ halmazt speciális lineáris csoportnak nevezzük.

Az egyparaméteres részcsoportjai:

$$r_1 := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} r_3 := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Az egyparaméteres részcsoportokból számított bázis pedig:

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Melyeket az egyparaméteres részcsoportok origóban vett deriváltjaiból számítottunk.

Kommutátor táblázatuk a következőnek adódott:

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -2a \\ -c & 0 & 2b \\ 2a & -2b & 0 \end{bmatrix}.$$

Melyben az (i, j)-edik helyen az i-edik és a j-edik bázis kommutátora áll.
Egy tetszőleges κ kommutátor kociklusuk paraméteres táblázata a következő lesz, az antiszimmetria felhasználásával:

$$\begin{bmatrix} 0 & m_1 & m_2 \\ -m_1 & 0 & m_3 \\ -m_2 & -m_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mely a Jacobi-azonossággal tovább egyszerűsíthető.

1. $\kappa([a,b],c)+\kappa([c,a],b)+\kappa([b,c],a) =$
$\kappa(c,c)+2\kappa(a,b)+2\kappa(b,a)\equiv 0$
2. $\kappa([b,a],c)+\kappa([c,b],a)+\kappa([a,c],b) =$
$-\kappa(c,c)-2\kappa(b,a)-2\kappa(a,b)\equiv 0$

A Jacobi-azonossággal egyszerűsítettünk. A κ kommutátor kociklus gyengén kohomológ egy κ'-vel, melyre:

1. $\kappa'(a,b)=\kappa(a,b)+\eta(c)=m_1+\eta(c)\Rightarrow\eta(c):=-m_1$,
2. $\kappa'(a,c)=\kappa(a,c)+\eta(-2a)=m_2-2\eta(a)\Rightarrow\eta(a):=\frac{m_2}{2}$,
3. $\kappa'(b,c)=\kappa(b,c)+\eta(2b)=m_3+2\eta(b)\Rightarrow\eta(b):=-\frac{m_3}{2}$.

Azaz létezik olyan κ' kommutátor kociklus, melynek változóiban nem marad paraméter. Tehát $\kappa'(x,y)\equiv 0\ \forall\ x, y$-ra.

A 2+1 dimenziós Galilei-csoport egyparaméteres részcsoportjai.

$$r_1(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0 & 0\\ \sin t & \cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad r_2(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$r_3(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad r_4(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$r_5(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & t\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad r_6(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Bázisa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kohomológia táblázata:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A κ paraméter táblázata:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -a_1 & 0 & a_6 & a_7 & 0 & -a_4 \\ -a_2 & -a_6 & 0 & 0 & a_7 & a_3 \\ -a_3 & -a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & -a_7 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & a_4 & -a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa'(e_1, e_2) = \kappa(e_1, e_2) + \eta(e_3) = a_1 + \eta(e_3) = 0 \Rightarrow \eta(e_3) := -a_1$$

$$\kappa'(e_1, e_3) = \kappa(e_1, e_3) + \eta(-e_2) = a_2 - \eta(e_2) = 0 \Rightarrow \eta(e_2) := a_2$$

$$\kappa'(e_1, e_4) = \kappa(e_1, e_4) + \eta(e_5) = a_3 + \eta(e_5) = 0 \Rightarrow \eta(e_5) := -a_3$$

$$\kappa'(e_1, e_5) = \kappa(e_1, e_5) + \eta(-e_4) = a_4 - \eta(e_4) = 0 \Rightarrow \eta(e_4) := a_4$$

$$\kappa'(e_2, e_6) = \kappa(e_2, e_6) + \eta(e_4) = -a_4 + \eta(e_4) = 0 \quad \checkmark$$

$$\kappa'(e_3, e_6) = \kappa(e_3, e_6) + \eta(e_5) = a_3 + \eta(e_5) = 0 \quad \checkmark$$

Az $\eta(e_i) = 0$ minden más báziselemre. A κ' gyengén kohomológ κ-val és csupán az a_5, a_6 és az a_7 paraméterektől függ.

- Input: a Galilei-csoport tér dimenziója.
- Output: a Galilei-csoport gyenge kohomológia osztályait meghatározó paraméterek száma.

- *create*:
  - Input: tér dimenzió.
  - Output: az adott dimenzióhoz tartozó Galilei-csoport generátorai.
- *commatrix*:
  - Input: tér dimenzió, és a generátorok listája.
  - Output: kommutátor táblázat.
  - Trükk: mátrixok egyenlőségének meghatározására, két mátrix különbségének Frobenius-normáját használtunk.
- *Mcreate*:
  - Input: tér dimenzió.
  - Output: κ paraméter táblázata az antiszimmetriai tulajdonság felhasználásával, és a változók listája.
  - Megjegyzés: itt még nem használjuk a κ zártsági tulajdonságát.

- *zerocohom*:
  - Input: tér dimenzió, kommutátor táblázat, az előbbi antiszimmetrikus mátrix és a változók listája.
  - Output: azt adja meg, hogy a κ kommutátor kociklus mely paraméterei nullázhatóak ki egy megfelelően megadott κ' kommutátor kociklussal, mely gyengén kohomológ κ-val.
- *MMcreate*:
  - Input: tér dimenzió, és az előbb megadott mátrix nullhelyei.
  - Működés: kinullázza a nullhelyek elemeit, és újra indexeli a változókat.
  - Output: az újradefiniált paraméter mátrix és változók listája.
- *setofeq*:
  - Az eddigiekből kapott κ' paraméter táblázatán elvégezzük a Jacobi-azonosságot, és vissza térünk a Jacobi-azonosságból származó egyenletek listájával.

- *simpeqset*:
  - Input: egy egyenletrendszer.
  - Output: $\pm a_i = 0$ alakú egyenletek paramétereinek az indexeinek a listája, és az ezen egyenletek elhagyásával kapott egyenletrendszer.
- *dimker*:
  - Egy olyan mátrixot reprezentál, melynek soraiban az egyenletrendszerek, oszlopaiban a változók állnak, annyi sora van, ahány egyenlet, és annyi oszlopa, ahány változó. A dimenzió tételből pedig tudjuk, hogy

    $$\dim(\mathrm{Ker}(LL)) = p - \dim(\mathrm{Ran}(LL)).$$

    ahol p a változók, azaz a paraméterek száma. Így pedig $\dim(\mathrm{Ker}(LL))$-lel azt kaptuk meg, hogy a κ' kommutátor kociklusban hány függő paraméterünk lesz. Azaz, hogy az n tér dimenziós Galilei-csoport gyenge kohomológia osztályai között hány függő paraméter van.

Eredmények ismertetése.

A programunk használatával rendre a következőket határoztuk meg a tér dimenzió függvényében:

1. a kezdeti paraméterek számát,
2. a gyenge kohomológia által kinullázott paraméterek számát,
3. a Jacobi-azonosság null paramétereinek számát,
4. az egyenletek és az új paraméterek számát,
5. legvégül pedig a gyenge kohomológiát meghatározó paraméterek számát.

Eredmények ismertetése.

- 1, 3, 1, 0, 0, 2, 2
- 2, 15, 4, 5, 3, 6, 3
- 3, 45, 9, 30, 6, 6, 1
- 4, 105, 14, 84, 10, 7, 1
- 5, 210, 20, 185, 10, 5, 1
- 6, 378, 27, 345, 15, 6, 1
- 7, 630, 35, 588, 21, 7, 1
- 8, 990, 44, 938, 28, 8, 1
- 9, 1485, 54, 1422, 36, 9, 1
- 10, 2145, 65, 2070, 45, 10, 1

Megfigyelhető, sőt sejthető, hogy a legalább 3 tér dimenziós Galilei-csoportok esetében a kommutátor kociklusok gyenge kohomológiái már csupán egyetlen paramétertől függnek.

Köszönöm a figyelmet!

Kérdések?