Tudományos Diákköri Konferencia 2022

A kvantummechanikai állapottér egy felbontása által indukált geometria

Szondi Máté Álmos

Negyedéves építészmérnök hallgató

Témavezető: Dr. Andai Attila
egyetemi docens
BME Analízis Tanszék

BME
2022

Tartalomjegyzék

Előszó

A kvantumszámítógép és ebből adódóan a kvantummechanika szóval is, hosszú évek óta találkozhat az ember, akár a bulvársajtóban felröppenő egy-egy (ál)hír kapcsán, akár ismeretterjesztő irodalomban vagy egyéb mediában. Néhol szenzációhajhászásból máshol ismeretterjesztő céllal kerül szóba a kvantummechanika egyik *misztikus* tulajdonsága, az összefonódott állapotok fogalma és általában ugyanitt hosszasan részletezik, hogy ezen állapotok létezése nyithat új utat a számítástechinkában. Ezek után természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon a kvantumállapotok hány százaléka összefonódott.

Szakmai körökben először Życzkowski vetette fel ezt a kérdést 1998-ban az alábbi formában [4]. „Is the world more classical or more quantum? Does it contain more quantum correlated (entangled) states than classically correlated ones?" Meglepő módon erre az egyszerű kérdésre még a legegyszerűbb összetett kvantummechanikai rendszer (qubit-qubit rendszer) esetén sem ismert a válasz, pusztán numerikus szimulációk állnak rendelkezésre [3, 8, 2, 9]. 2017-ben sikerült Andai, Lovas szerzőpárosnak analitikus eszközökkel igazolni, hogy valós 2 dimenziós Hilbert-téren modellezhető kvantummechanikai renszerek (rebit) esetén a rebit-rebit állapotok összefonódottságának a valószínűsége $\frac{35}{64}$ (mely összhangban van a numerikus szimulációkkal) és integrálformulát adtak a qubit-qubit rendszer összefonódottsági valószínűségének a kiszámítására [5]. A jelen dolgozat ebbe a kutatási irányba csatlakozik be.

Amikor események valószínűséget kell meghatározni kulcsfontosságú, hogy milyen mértékkel látjuk el az események terét. A kvantummechanikai állapotok terén fizikai relevanciával bíró valószínűségi mértéket úgy kaphatunk, hogy monoton Riemann-metrikák (általánosított Fisher-információ) által generált térfogati formával számolunk. A fent említett 2017-es publikációban szerepel az összetett rendszernek egy olyan felbontása, melyben jól jellemezhető az összefonódottság, azonban a mérsékelt fizikai relevanciával bíró Hilbert–Schmidt-féle skalárszorzásból származó térfogati formával tekinti az állapotteret.

A jelen dolgozatban az állapotteret tetszőleges monoton metrikával tekintjük és megvizsgáljuk, hogy a fenti cikkben szereplő felbontás milyen metrikát indukál az egyes komponenseken. Ez egy elengedhetetlen lépés ahhoz, hogy az összefonódottsági valószínűséget fizikai relevanciával bíró térfogati mértékek szerint meg lehessen határozni.

.

1. Bevezetés

A statisztiában kulcsfontosságú Fisher-információ általánosítása a nemkommutatív esetre (egészen pontosan a kvantummechanikai állapottérre) Petz Dénes egyik kimagasló eredménye [6, 7], mely alapköve a nemkommutatív információgeometriának. A klasszikus esettel ellentétben, a nemkommutatív esetben nem egyértelmű a Fisher-információ, hanem azok bizonyos operátormonoton függvényekkel indexelhetők. Ezek a Fisher-információk Riemann-metrikának tekinthetők az állapottéren, ami magyarázza a monoton metrika elnevezésüket. Ezek a monoton metrikák a kvantuminformáció elmélet számtalan ágában kapnak kiemelkedő szerepet (pl. paraméterbecslésben, határozatlansági relációkban, Bayes-statisztikában, állapottér és kvantumcsatornák geometriájának vizsgálatánál, állapotok összefondottsági mértékének meghatározásában stb.).

A qubit-qubit rendszerben az állapotok szeparálhatóságának, illetve összefonódottságának a vizsgálatánál Lovas Attila és Andai Attila megmutatták [5], hogy a $2n$ dimenziós Hilbert-tér feletti $\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ állapotteret lehet és érdemes is felbontani a $\mathcal{M}_{2n}^{+,1} \simeq \mathcal{M}_n \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ módon, ahol $\mathcal{M}_n$ az n dimenziós Hilbert-térhez tartozó állapottér, $\mathcal{E}_n$ az $n \times n$-es mátrixok terében az $]-I, I[$ intervallum, valamint $\mathcal{B}_1(n)$ azon $n \times n$-es mátrixok tere, melyek operátornormája egynél kisebb.

A dolgozatban meghatározom, hogy a fenti felbontásban szereplő komponenseken milyen metrikát indukálnak az $\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ téren értelmezett monoton metrikák, mely segít megérteni két $\mathcal{M}_n$ térbeli részecskéből álló összetett rendszer állapotterének a geometriáját. Továbbá ennek segítségével lehetőség nyílik az összefonódottsági valószínűség meghatározására fizikailag relaváns mértékek szerint.

2. Kvantum-információgeometriai alapfogalmak

A következő alfejezetben a dolgozat megértéséhez szükséges alapvető fogalmakat definiáljuk, valamint a későbbi állítások bizonyításához és értelmezéséhez szükséges tételeket, lemmákat mondjuk ki. A dolgozatban az idevágó szakirodalomban elterjedt jelöléseket igyekszünk használni.

2.1. Differenciálgeometriai alapfogalmak

2.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}$ topologikus tér, $U \subset M$ nyílt halmaz és $x : U \to \mathbb{R}^n$ olyan leképezés, mely homeomorfizmus U és a $\mathrm{Ran}(x)$ nyílt halmaz között. Ekkor minden $p \in U$ pontra az (U, x)* lokális térkép, *vagy* lokális koordináta-rendszer az M halmazon a p körül.

2.2. Definíció. *Az $\mathcal{M}$ topologikus tér térképeinek egy A családja atlasz, ha a családhoz tartozó térképek értelmezési tartományainak az uniója $\mathcal{M}$.*

2.3. Definíció. *Az $(\mathcal{M}, A)$ pár n* dimenziós topologikus sokaság, *ha $\mathcal{M}$ megszámlálható bázisú Hausdorff-féle topologikus tér és az A olyan atlasz, melynek minden $x \in A$ elemére $\mathrm{Ran}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ teljesül.*

2.4. Definíció. *Az $(\mathcal{M}, A)$ párt n* dimenziós sima sokaság*nak hívjuk, ha:*
1. $(\mathcal{M}, A)$ n dimenziós topologikus sokaság,
2. $A = (\varphi)_{i \in I}$ térképek rendszere, hogy $\forall i, j$ indexre a $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés végtelenszer differenciálható.

2.5. Definíció. *Legyen $(\mathcal{M}, A)$ pár n dimenziós, az $(\mathcal{N}, B)$ pár pedig k dimenziós sima sokaság, valamint $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ leképezés.*
Az f függvény differenciálható *(illetve* sima*)* a $p \in \mathcal{M}$ pontban, *ha minden p körüli $x \in A$ térkép és $f(p)$ körüli $y \in B$ térkép esetén $y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható (illetve végtelenszer differenciálható).*
Az f függvény differenciálható *(illetve* sima*), ha minden $p \in \mathcal{M}$ pontban differenciálható (illetve sima).*

2.6. Definíció. *Legyen $(\mathcal{M}, A)$ pár n dimenziós, az $(\mathcal{N}, B)$ pár pedig k dimenziós sima sokaság, valamint $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ leképezés.*
Az f függvény diffeomorfizmus, *ha:*
1. f bijekció
2. f és f^{-1} differenciálható.
Az f sima diffeomorfizmus, *ha:*
1. f bijekció

2. f és f^{-1} sima.

A továbbiakban a sima sokaságokra, csak az alaphalmaz jelével hivatkozunk, nem jelöljük külön a térképek halmazát.

2.7. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}$ n dimenziós sima sokaság. Jelölje $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ az $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sima függvények halmazát, azaz*

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}|\ \mathrm{Dom}(f) = \mathcal{M},\ f \text{ sima}\}.$$

Adott $p \in \mathcal{M}$ esetén p pontbeli derivációnak *nevezzük a $D : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ leképezést, ha minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ függvényre*

$$D(af + bg) = aD(f) + bD(g) \quad \text{és} \quad D(fg) = f(p)D(g) + D(f)g(p)$$

teljesül. A sokaság p pontbeli érintőtere*, jele: $T_p\mathcal{M}$, a p pontbeli derivációnak halmaza. A sokaság* érintő nyalábja *$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$.*

Megmutatható, hogy $T_p\mathcal{M}$ n-dimenziós valós vektortér.

2.8. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}$ n dimenziós sima sokaság. Az $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ leképezés* sima vektormező*, ha*
1. minden $p \in \mathcal{M}$ esetén $X(p) \in T_p\mathcal{M}$,
2. minden $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ esetén a

$$Xf : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto (X(p))(f)$$

függvény sima. A sima vektormezők halmazát jelölje $\chi(\mathcal{M})$.

A következő definíció előtt megemlítjük, hogy adott A és B halmaz esetén az

$$F(A, B) = \{f : A \to B|\mathrm{Dom}(f) \subseteq A\}$$

jelölést használjuk a függvények halmazára.

2.9. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}$ n-dimenziós sima sokaság. Egy*

$$g : \mathcal{M} \to F(T\mathcal{M} \times T\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

leképezés Riemann-metrika*, ha*
1. minden $p \in \mathcal{M}$ esetén $g(p) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, pozitív definit, bilineáris, nem degenerált leképezés (skaláris szorzás),

2. minden $X \in \chi(M)$ estén a

$$g(X,X) : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto g(p)(X(p), X(p))$$

leképezés sima.

Az (M,g) párt Riemann-sokaságnak *(vagy* Riemann geometriának*) nevezzük, ha $\mathcal{M}$ adott dimenziójú differenciálható sokaság és g Riemann-metrika az $\mathcal{M}$ sokaságon.*

A továbbiakban adott X vekrotmező, illetve g Riemann-metrika $p \in \mathcal{M}$ pontbeli értékét néha az X_p illetve a g_p szimbólummal jelöljük.

Legyen $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság, $(\mathcal{N}, g)$ Riemann-sokaság, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sima leképezés és $p \in \mathcal{M}$. Ekkor minden $X \in T_p\mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto X(f \circ \varphi)$$

$\varphi(p)$ pontbeli deriváció, vagyis φ indukál egy

$$\varphi_{*p} : T_p\mathcal{M} \to T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \qquad X \mapsto \varphi_{*p}(X)$$

leképezést, melyre minden $X_p \in T_p\mathcal{M}$ és minden $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ esetén

$$(\varphi_{*p}(X_p))f = X_p(f \circ \varphi).$$

Ezek alapján $X, Y \in T_p\mathcal{M}$ esetén képezhető

$$g_p^*(X,Y) = g_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}X, \varphi_{*p}Y).$$

Ha φ sima diffeomorfizmus, g^* szintén Riemann-metrika, melyet a *g Riemann-metrika φ szerinti visszahúzásának* nevezünk, vagy még a g^* metrikát a *g és φ által indukált metrikának* mondjuk.

2.2. Kvantummechanikai alapfogalmak

Jelölje M_n azon $n \times n$-es mátrixok halmazát, melynek elemei komplex számok. Kitüntett szerepet kapnak a pozitív definit mátrixok

$$\mathcal{M}_n^+ = \{D \in \mathrm{M}_n |\ D = D^*,\ 0 < D\}$$

illetve az önadjungált mátrixok

$$\mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}} = \{D \in \mathrm{M}_n |\ D = D^*\}\,.$$

2.10. Definíció. Állapottér*nek nevezzük adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az n dimenziós komplex (illetve valós) Hilbert-téren értelmezett önadjungált, pozitív, egységnyomú operátorok halmazát. Az állaptottér elemeit* állapot*nak vagy* sűrűségi mátrix*nak nevezik.*

Differenciálgeometriai szempontból egyszerűbb az állapottér belsejét tekinti, ezért az állapottérre az alábbi jelölést vezetjük be.

$$\mathcal{M}_n^{+,1} = \{D \in \mathrm{M}_n |\ D = D^*,\ 0 < D,\ \mathrm{Tr}D = 1\}$$

2.11. Definíció. *Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén* mérhető fizikai mennyiségeknek *(röviden* fizikai mennyiségeknek*) nevezzük a valós vagy komplex n dimenziós Hilbert-tér önadjungált operátorainak a halmazát.*

Az $\mathcal{M}_n^{+,1}$ tér az $\mathbb{R}^{n^2-1}$ tér egy nyílt részhalmazával azonosítható, így természetes módon n^2-1 dimenziós topologikus sokaságnak tekinthető (az identitás függvénnyel, mint egyetlen globális térképpel). Egy adott $D_0 \in \mathcal{M}_n^{+,1}$ állapotban az érintőteret azonosíthatjuk a nulla nyomú, önadjungált $n \times n$-es mátrixok halmazával, melyre a $\mathrm{M}_{\mathrm{sa}}^0$ jelölést fogjuk használni, vagyis

$$\mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0 = \{X \in \mathrm{M}_n |\ D = D^*,\ \mathrm{Tr}D = 0\}\,.$$

Ugyanis ha $X \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0$ és $f : \mathcal{M}_n^{+,1} \to \mathbb{R}$ sima függvény akkor a

$$(Xf)(D_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(D_0 + tX)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

leképezés deriváció.

A fizikai szempontból releváns metrikák az úgynevezett monoton metrikák. Most ezeket definiáljuk kis előkészítés után.

2.12. Definíció. *Jelölje $\mathrm{M}_m(\mathrm{M}_n)$ azon $m \times m$-es mátrixok halmazát, melynek elemei $n \times n$-es mátrixok. A $T : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ lineáris leképezés* pozitív*, ha pozitív operátorhoz pozitív operátort rendel.*
A $T : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ lineáris leképezés teljesen pozitív*, ha minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén a*

$$T^{(k)} : \mathrm{M}_k(\mathrm{M}_n) \to \mathrm{M}_k(\mathrm{M}_m) \qquad [A_{ij}] \mapsto [T(A_{ij})]$$

lineáris leképezés pozitív.

A $T : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ *lineáris leképezés* sztochasztikus, *ha megőrzi a mátrix nyomát és teljesen pozitív.*

2.13. Definíció. *Riemann-sokaságoknak egy* $(\mathcal{M}_n^+, g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ *rendszerét* monoton metrikák családjá*nak nevezzük,ha minden* $n, m \in \mathbb{N}^+$ *paraméterekre, minden* $T : \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ *stochasztikus leképezésre, minden* $D \in \mathcal{M}_n$ *állapotra és minden* $X \in \mathrm{M}_{\mathrm{sa}}^0$ *érintőtérbeli vektorra*

$$g_{T(D)}^{(m)}(T(X), T(X)) \leq g_D^{(n)}(X, X)$$

teljesül.

2.14. Definíció. *Egy* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *függvény* operátormonoton, *ha minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $A, B \in \mathrm{M}_n$ *önadjungált mátrixra* $0 < A \leq B$ *esetén* $f(A) \leq f(B)$ *fennáll.*

2.15. Definíció. *Adott* $D \in \mathrm{M}_n$ *mátrix esetén definiáljuk a*
$L_D : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n$ $X \mapsto DX$ balról való szorzás *és a*
$R_D : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n$ $X \mapsto XD$ jobbról való szorzás *operátorát.*

2.16. Definíció. *A*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n \to \mathbb{C} \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^*B)$$

skaláris szorzást nevezzük Hilbert–Schimdt-féle skaláris szorzásnak.

2.1. Állítás. *Legyen* $D \in \mathrm{M}_n$ *pozitív definit* ($0 < D$) *önadjungált mátrix. Ekkor* L_D *és* $R_{D^{-1}}$ *egymással kommutáló önadjungált operátorok, továbbá* $L_D R_D^{-1}$ *pozitív.*

Bizonyítás. Tetszőleges $A, B \in \mathrm{M}_n$ mátrix esetén

$$\begin{aligned} \langle A, L_D B \rangle &= \langle A, DB \rangle = \mathrm{Tr}(A^*DB) = \mathrm{Tr}(BA^*D^*) = \\ &= \mathrm{Tr}(B(DA)^* = \mathrm{Tr}((DA)^*B = \langle DA, B \rangle = \\ &= \langle L_D A, B \rangle \,, \end{aligned}$$

ami alapján L_D önadjungált. Az R_D^{-1} önadjungáltsága hasonlóan adódik. Mivel minden $A \in \mathrm{M}_n$ esetén

$$L_D R_D^{-1}(A) = L_D(AD^{-1}) = DAD^{-1} = R_{D^{-1}}(DA) = R_{D^{-1}} L_D(A),$$

ezért L_D és $R_{D^{-1}}$ egymással felcserélhető operátorok. Ezek alapján

$$(L_D R_{D^{-1}})^* = R_{D^{-1}}^* L_D^* = R_{D^{-1}} L_D = L_D R_{D^{-1}}$$

miatt $L_D R_{D^{-1}}$ önadjungált. Mivel bármely $A \in \mathrm{M}_n \setminus \{0\}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\langle A, L_D R_{D^{-1}} A\rangle = \left\langle A, DAD^{-1}\right\rangle = \mathrm{Tr}(A^* DAD^{-1}) = \\
&\quad = \mathrm{Tr}(D^{-1/2} A^* D^{1/2} D^{1/2} A D^{-1/2}) = \mathrm{Tr}\left(\left(D^{1/2} A D^{-1/2}\right)^* \left(D^{1/2} A D^{-1/2}\right)\right) = \\
&\quad = \left\langle D^{1/2} A D^{-1/2}, D^{1/2} A D^{-1/2}\right\rangle > 0,
\end{aligned}$$

ezért $L_D R_{D^{-1}}$ pozitív definit. □

Ezek alapján bármely $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $D \in \mathcal{M}_n$ esetén értelmes az $f(L_D R_{D^{-1}})$ kifejezés.

2.1. Tétel. *(Petz osztályozási tétele [6].) A monoton metrikák családja és az olyan operátormonoton $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvények között, melyekre minden pozitív x esetén $f(x) = x f(x^{-1})$ teljesül, létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Minden ilyen f függvényre a*

$$\begin{aligned}
&G^{(n,f)} : \mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0 \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0 \to \mathbb{R} \qquad (D, X, Y) \mapsto G_D^{(n,f)}(X, Y) \\
&G_D^{(n,f)}(X, Y) = \mathrm{Tr}(X(R_D^{\frac{1}{2}} f(L_D R_D^{-1}) R_D^{\frac{1}{2}})^{-1}(Y))
\end{aligned} \tag{1}$$

kifejezés a $(\mathcal{M}_n^{+,1}, G^{(n),f})_{n\in\mathbb{N}^+}$ monoton metrikák egy családját generálja. Továbbá a momoton metrikák minden családja előáll a

$$G^{(n,f)} : \mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0 \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}^0 \to \mathbb{R} \qquad (D, X, Y) \mapsto K_D^{(n,f)}(X, Y)$$

formában, valamely alkalmas f függvénnyel.

Többek között az alábbi operátormonoton függvények generálnak monoton metrikát.

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{SM}}(X) &= \frac{1+x}{2} & f_{\mathrm{LA}}(X) &= \frac{2x}{1+x} \\
f_{\mathrm{KM}}(X) &= \frac{x-1}{\log x} & f_{\mathrm{K1}}(X) &= \frac{2(x-1)^2}{(1+x)\log^2 x} \\
f_{\mathrm{K2}}(X) &= \frac{2(x-1)\sqrt{x}}{(1+x)\log x} & f_{\mathrm{P1}}(X) &= \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta - 1)(x^{1-\beta} - 1)} \quad \beta \in \left]0, 1\right[
\end{aligned}$$

Fontos megjegyezni az operátormonoton függvények által (1) képlettel generált metrika jól értelmezhető a pozitív mátrixok $\mathcal{M}_n^+$ terén a

$$G^{(n,f)} : \mathcal{M}_n^+ \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}} \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}} \to \mathbb{R} \qquad (D, X, Y) \mapsto G_D^{(n,f)}(X, Y)$$
$$G_D^{(n,f)}(X, Y) = \mathrm{Tr}(X(R_D^{\frac{1}{2}} f(L_D R_D^{-1}) R_D^{\frac{1}{2}})^{-1}(Y))$$

képlettel. Az $\mathcal{M}_n^+$ tér egy részsokasága, az egységnyomú mátrixok halmaza, az állapottér. Ezen a téren diagonális állapotban a monoton metrika egyszerűen meghatározható az alábbi tétel szerint.

2.2. Tétel. *[1] Tekintsük az $(\mathcal{M}_n^+, G)$ sokaságot, ahol a G monoton metrikát az f függvény generálja. Minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $m(x, y) = \dfrac{1}{yf\left(\frac{x}{y}\right)}$. Legyen a $D \in \mathcal{M}_n^+$ állapot $D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk}$ alakú.*

$$\text{Ha } 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k < l \le n, \text{ akkor: } \quad \begin{cases} G_D(H_{ij}, H_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl} 2m(\lambda_i, \lambda_j) \\ G_D(F_{ij}, F_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl} 2m(\lambda_i, \lambda_j) \\ G_D(H_{ij}, F_{kl}) = 0, \end{cases}$$
$$\text{ha } 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n, \text{ akkor: } \quad G_D(H_{ij}, F_{kk}) = G_D(F_{ij}, F_{kk}) = 0,$$
$$\text{ha } 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le n, \text{ akkor: } \quad G_D(F_{ii}, F_{kk}) = \delta_{ik} 4m(\lambda_i, \lambda_i) \tag{2}$$

teljesül.

2.3. Mátrixfüggvények deriválása

2.17. Definíció. *Legyen $f : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ és $\rho \in \mathrm{IntDom}(f)$. Ekkor $(\mathrm{D}f)(\rho) : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_m$ az a lineáris leképezés, amire*

$$\lim_{X \to 0} \frac{f(\rho + X) - f(\rho) - (\mathrm{D}f)(\rho)(X)}{\|X\|} = 0$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|$ az operátornormát jelöli.

Mivel véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens, ezért a definícióban bármely normát jelölheti $\|\cdot\|$, azonban itt most operátornormaként fogjuk használni.

Példák mátrixfüggvények deriválására.

1. Legyen $f : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n$, $f(A) = A^2$. Ekkor minden $A, X \in \mathrm{M}_n$ esetén

$$f(A + X) - f(A) = A^2 + AX + XA + X^2 - A^2.$$

Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}f)(A)X = AX + XA$ teljesül. Valóban, ugyanis

$$\lim_{X\to 0}\left\|\frac{f(A+X)-f(A)-(Df)(A)X}{\|X\|}\right\| = \lim_{X\to 0}\frac{\|X^2\|}{\|X\|} \le \lim_{X\to 0}\frac{\|X\|^2}{\|X\|} = 0.$$

2. Jelölje G_n az $n\times n$-es komplex elemű invertálható mátrixok halmazát és legyen $i : G_n \to G_n$, $i(\rho) = \rho^{-1}$. Megmutatható, hogy ekkor minden $X \in \mathrm{M}_n$ esetén

$$(\mathrm{D}i)(\rho)(X) \;=\; -\rho^{-1}X\rho^{-1}$$

teljesül.

3. Legyen $s : \mathcal{M}_n^{+,1} \to \mathcal{M}_n^{+,1}$, $s(\rho) = \sqrt{\rho}$. Megmutatjuk, hogy minden $\rho \in \mathcal{M}_n^{+,1}$ és $X \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ esetén

$$(\mathrm{D}s)(\rho)(X) = \left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(X).$$

Tekintsük az 1. példában definiált $f(\rho) = \rho^2$ függvényt. Ekkor nyilván minden $\rho \in \mathcal{M}_n^{+,1}$ esetén

$$\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{\rho} = \rho,$$

vagyis $s \cdot s = \mathrm{id}$. Ennek mindkét oldalát deriválva a ρ pontban az $X \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ irányba

$$(\mathrm{D}s)(\rho)(X)\cdot\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}\cdot(\mathrm{D}s)(\rho)(X) = X$$

adódik, amit a

$$(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})(\mathrm{D}s)(\rho)(X) = X$$

formában is felírhatunk. Ez pedig a bizonyítandó formulát adja vissza.

2.4. Az állapottér felbontása

Az invertálható 2×2-es blokk-mátrixok pozitivitása jellemezhető az alábbi módon.

1. Lemma. *Legyen*

$$\rho = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix},$$

ahol D_1 és D_2 invertálható mátrixok. Ekkor $\rho > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $D_2 > 0$ és $D_1 - CD_2^{-1}C^* > 0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $D_1 > 0$ és $D_2 - C^*D_1^{-1}C > 0$.

Legyen $\rho \in \mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ az alábbi alakú.

$$\rho = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$$

A $D = D_1 + D_2$ mátrix pozitív definit mátrixok összege, tehát pozitív definit, valamint $\mathrm{Tr}D = \mathrm{Tr}D_1 + \mathrm{Tr}D_2 = \mathrm{Tr}\rho = 1$ miatt egységnyomú, vagyis $D \in \mathcal{M}_n^{+,1}$.

Az $A = D_1 - D_2$ mátrixról annyit tudunk, hogy önadjungált és

$$D_1 = \frac{1}{2}(D + A) > 0 \qquad D_2 = \frac{1}{2}(D - A) > 0$$

teljesül rá, amiből

$$-D < A < D$$

adódik, vagyis

$$-I < D^{-1/2} A D^{-1/2} < I.$$

Legyen

$$\mathcal{E}_n = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) |\ X = X^*,\ -I < X < I\}.$$

Bevezetve a $Z = D^{-1/2} A D^{-1/2}$ változót $Z \in \mathcal{E}_n$ adódik.

Ez a gondolatmenet megfordítható. Ha $Z \in \mathcal{E}_n$ és $D \in \mathcal{M}_n^{+,1}$, akkor a

$$D_1 = \frac{1}{2}(D + D^{1/2} Z D^{1/2}) > 0 \qquad D_2 = \frac{1}{2}(D - D^{1/2} Z D^{1/2}) > 0$$

mátrixok lehetnek egy $\rho \in \mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ állapot bal felső és jobb alsó blokk-mátrixai.

A 1 Lemma értelmében

$$D_1 > C D_2^{-1} C^* \qquad D_2 > C^* D_1^{-1} C$$

teljesül, amiből $D_1, D_2 > 0$ miatt

$$\begin{aligned} I >& D_1^{-1/2} C D_2^{-1} C^* D_1^{-1/2} = \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)\left(D_2^{-1/2} C^* D_1^{-1/2}\right) \\ &= \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)\left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)^* \\ I >& D_2^{-1/2} C^* D_1^{-1} C D_2^{-1/2} = \left(D_2^{-1/2} C^* D_1^{-1/2}\right)\left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right) \\ &= \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)^*\left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

Bevezetve az $X = D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}$ jelölést az

$$I > X^* X \qquad I > X X^*$$

egyenleteket kapjuk.

2. Lemma. *Legyen X tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Ekkor*

$$I > X^* X \quad \leftrightarrow \quad \|X\| < 1$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|$ a mátrix operátornomáját jelöli.

Vezessük be

$$\mathcal{B}_1(n) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) | \ \|X\| < 1\}$$

jelölést. Tehát $\mathcal{B}_1(n)$ jelöli az állapottér azon mátrixait, melyeknek az operátornormája kisebb mint 1.

Ezek alapján $X = D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \in \mathcal{B}_1(n)$.

Megfordítva ezt a gondolatmenetet, ha $X \in \mathcal{B}_1(n)$, akkor $C = D_1^{1/2} X D_2^{1/2}$ lehet azon blokk-mátrix 12 eleme, melynek 11 eleme D_1 és a 22 eleme D_2.

2.3. Tétel. *Tekintsük a $\varphi : \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n) \to \mathcal{M}_{2n}^+$*

$$\varphi(D, A, X) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{D}(1+A)\sqrt{D} & (\sqrt{D}(1+A)\sqrt{D})^{1/2} X (\sqrt{D}(1-A)\sqrt{D})^{1/2} \\ (\cdot)^* & \sqrt{D}(1-A)\sqrt{D} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

függvényt, ahol a mátrix 21 eleme az 12 elem adjungáltja. Ekkor φ diffeomorfizmus a $\mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ és a $\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ sokaság között. Továbbá φ megszorítása az $\Omega = \mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ halmazra

$$\varphi|_{\Omega} : \mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n) \to \mathcal{M}_{2n}^{+,1}$$

szintén diffeomorfizmus.

A $\varphi : \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n) \to \mathcal{M}_{2n}^+$ leképezés minden $(\rho, A, X) \in \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ pontban indukál egy

$$\varphi_{*\rho} : T_\rho \mathcal{M}_n^+ \times T_A \mathcal{E}_n \times T_X \mathcal{B}_1(n) \to T_{\varphi(\rho,A,X)} \mathcal{M}_{2n}^+$$

leképezést, amely lineáris vektortér izomorfizmus. Az érintőtereket mátrixterekkel azonosítva a fenti leképezés a

$$\varphi_{*\rho} : \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}} \times \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}} \times \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_{2n,sa}$$

formában is felírható. Ahhoz, hogy bázist adhassunk meg az érintőtérben szükségünk lesz a az alábbi speciális mátrixokra. Jelölje E_{ij} azt a mátrixot, melynek az ij eleme 1, a többi pedig 0, továbbá legyen

$$F_{ij} = E_{ij} + E_{ji} \qquad \text{és} \qquad H_{ij} = \mathrm{i}E_{ij} - \mathrm{i}E_{ji}.$$

Minden $\rho \in \mathcal{M}_n^+$ és $A \in \mathcal{E}_n$ esetén a $T_\rho \mathcal{M}_n^+$ és a $T_A \mathcal{E}_n$ terek egy bázisát adja az $(F_{ij})_{1 \le i \le j \le n}, (H_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ vektorrendszer; továbbá minden $X \in \mathcal{B}_1(n)$ esetén $T_X \mathcal{B}_1(n)$ egy bázisát adja az $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}, (\mathrm{i}E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ vektorrendszer. Természetesen ezen terek dimenziószáma kiadja $T_{\varphi(\rho,A,X)} \mathcal{M}_{2n}^+$ dimenzióját

$$n^2 + n^2 + 2n^2 = (2n)^2.$$

3. Új eredmények

3.1. Monoton metrikák unitér invarianciája

A $D \in \mathcal{M}_n^+$ operátor sajátértékeinek a halmazát jelölje $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Mivel $0 < D$, vagyis D minden sajátértéke pozitív, ezért az $L_D R_D^{-1}$ operátornak is pozitív minden sajátértéke, ugyanis

$$\mathrm{Sp}(L_D R_D^{-1}) = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \lambda_n\right\}.$$

Mivel $0 < x$ esetén $f(x) \neq 0$, ezért a $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ függvény bevezetésével

$$G_D^{n,f}(X,Y) = \mathrm{Tr}\left(X(R_D^{\frac{-1}{2}} h(L_D R_D^{-1}) R_D^{\frac{-1}{2}})(Y)\right)$$

adódik a metrikára, amit a

$$G_D^{n,f}(X,Y) = \mathrm{Tr}\left(X\left(h(L_D R_D^{-1})(Y D^{-1/2})\right) D^{-1/2}\right)$$

alakban is felírhatunk. Tetszőleges U unitér mátrix és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned}
\left(L_{UDU^*} R_{UDU^*}^{-1}\right)^n (UYU^*(UDU^*)^{-1/2}) &= \left(L_{UDU^*} R_{UDU^*}^{-1}\right)^n (UYD^{-1/2}U^*) = \\
&= \left(L_{UD^nU^*} R_{UD^nU^*}^{-1}\right) (UYD^{-1/2}U^*) = UD^nU^*UYD^{-1/2}U^*UD^{-n}U^* = \\
&= U(D^nYD^{-1/2}D^{-n})U^* = U\left((L_{D^n} R_{D^n}^{-1})(YD^{-1/2})\right)U^* = \\
&= U\left((L_D R_D^{-1})^n (YD^{-1/2})\right)U^*
\end{aligned}$$

adódik.

Mivel a $h(L_D R_D^{-1})$ operátor meghatározásához csak az $L_D R_D^{-1}$ operátor sajátértékeiben kell ismerni a h függvény értékeit, ezért rögzített d esetén a h függvény helyettesíthető egy olyan $p(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$ polinommal, melyre

$$\forall x \in \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \lambda_n\right\}: \qquad h(x) = p(x)$$

teljesül. Ekkor viszont a fenti formula alapján

$$
\begin{aligned}
h\left(L_{UDU^*}R^{-1}_{UDU^*}\right)(UYU^*(UDU^*)^{-1/2}) &= p\left(L_{UDU^*}R^{-1}_{UDU^*}\right)(UYU^*(UDU^*)^{-1/2}) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k \left(L_{UDU^*}R^{-1}_{UDU^*}\right)^k (UYU^*(UDU^*)^{-1/2}) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k U\left((L_D R_D^{-1})^k (YD^{-1/2})\right)U^* = \\
&= U\left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_k (L_D R_D^{-1})^k\right)(YD^{-1/2})\right)U^* = U\left(p\left(L_D R_D^{-1}\right)(YD^{-1/2})\right)U^* = \\
&= U\left(h\left(L_D R_D^{-1}\right)(YD^{-1/2})\right)U^*
\end{aligned}
$$

teljesül. Ebből viszont a metrika unitér invarianciája adódik az alábbi egyenlőségek alapján.

$$
\begin{aligned}
&G^{n,f}_{UDU^*}(UXU^*, UYU^*) = \\
&\quad \mathrm{Tr}\left(UXU^*\left(h(L_{UDU^*}R^{-1}_{UDU^*})(UYU^*(UDU^*)^{-1/2})\right)(UDU^*)^{-1/2}\right) = \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left(UXU^*\left(U\left(h\left(L_D R_D^{-1}\right)(YD^{-1/2})\right)U^*\right)(UDU^*)^{-1/2}\right) = \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left(UX\left(h\left(L_D R_D^{-1}\right)(YD^{-1/2})\right)D^{-1/2}U^*\right) = \\
&\quad = \mathrm{Tr}\left(X\left(h\left(L_D R_D^{-1}\right)(YD^{-1/2})\right)D^{-1/2}\right) = \\
&\quad = G^{n,f}_D(X,Y)
\end{aligned}
$$

Eredményünket az alábbi tételben foglalhatjuk össze.

3.1. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\mathcal{M}_n^+$ sokaságon minden $G^{n,f}$ monoton metrikára minden $D \in \mathcal{M}_n^+$ pontban és minden $X, Y \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ érintővektorra minden U $n \times n$-es unitér mátrixra*

$$G^{n,f}_{UDU^*}(UXU^*, UYU^*) = G^{n,f}_D(X,Y)$$

teljesül.

Ezek alapján elég diagonális D állapotokban ismerni a metrika értékeit.

3.2. A φ függvény deriválása

A következőkben a 2.3 tételben szereplő mátrixfüggvények deriváltjait fogjuk kiszámolni. Ehhez a függvényeket kisebb egységekre osztjuk, majd ezeket a kisebb részeket deriváljuk a különböző változók szerint, majd ezekből képezzük a teljes függvény deriváltját.

Először adott $A \in \mathcal{E}_n$ mellett tekintsük az

$$f_1 : \mathcal{M}_n^+ \to \mathcal{M}_n^+ \qquad \rho \mapsto \sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}$$

függvényt.

A mátrixfüggvények deriválása során az olyan jól ismert deriválási szabályok, mint például az összetett vagy szorzat függvény deriválási szabályai érvényben maradnak.

Ezek alapján az f_1 függvény ρ szerinti deriváltja a $V_\rho \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ irányban a következőképp számolható.

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}f_1)(\rho)(V_\rho) = &\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right)(1+A)\sqrt{\rho}+ \\ &+ \sqrt{\rho}(1+A)\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

Most adott $\rho \in \mathcal{M}_n^+$ esetén definiáljuk az alábbi függvényt.

$$f_2 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{M}_n^+ \qquad A \mapsto \sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}$$

Az f_2 függvényben az A szerinti deriváltban a ρ változók konstansnak tekinthetők, így ebben az esetben nem kell szorzat függvényt deriválni. Az f_2 függvény $V_A \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ iránymenti deriváltja

$$(\mathrm{D}f_2)(A)(V_A) = \sqrt{\rho}V_A\sqrt{\rho}. \tag{5}$$

Legyen $\alpha_1 : \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n) \to \mathcal{M}_n^+$ a

$$\alpha_1(\rho, A, X) = \sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}$$

függvény.

Ekkor α_1 függvény deriváltja a különböző változók szerinti deriváltak összegeként megkapható

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\alpha_1)(\rho, A, X)(V_\rho, V_A, V_X) = &\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right)(1+A)\sqrt{\rho}+ \\ &+ \sqrt{\rho}(1+A)\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right) + \sqrt{\rho}V_A\sqrt{\rho},\end{aligned}$$

ahol $V_\rho, V_X \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ és $V_X \in \mathrm{M}_n$.

Az

$$\alpha_2 : \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n) \to \mathcal{M}_n^+ \qquad (\rho, A, X) \mapsto \sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}$$

függvény deriváltja az α_1 függvény deriváltjához hasonlóan számolható, vagyis minden $V_\rho, V_X \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ és $V_X \in \mathrm{M}_n$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\alpha_2)(\rho, A, X)(V_\rho, V_A, V_X) = &\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right)(1-A)\sqrt{\rho} + \\ &+ \sqrt{\rho}(1-A)\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(V_\rho)\right) - \sqrt{\rho}V_A\sqrt{\rho}.\end{aligned}$$

Eddig meghatároztuk a (3) képletben szereplő mátrix 11 és 22 elemének a deriváltját. Most az 12 elemét deriváljuk különböző változók szerint.

Legyen $A \in \mathcal{E}_n$ és $X \in \mathcal{B}_1(n)$ rögzített és tekintsük a

$$g_1 : \mathcal{M}_n^+ \to \mathrm{M}_n \qquad \rho \mapsto (\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2}$$

függvényt. A könnyebb és nyomonkövethetőbb számítások miatt a g_1 függvényt bontsuk fel a és b részekre a következőképpen.

Legyen $a = \sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}$ és $b = \sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}$. Ekkor a szorzat és az összetett függvény deriválási szabályait felhasználva a következőt kapjuk tetszőleges $V_\rho \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ mátrixra.

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}a)(\rho)(V_\rho) =& (L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1+A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1+A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)) \\ (\mathrm{D}b)(\rho)(V_\rho) =& (L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1-A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1-A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho))\end{aligned}$$

Mivel

$$(\mathrm{D}g_1)(\rho)(V_\rho) = (\mathrm{D}a)(\rho)(V)_\rho X b + a X (\mathrm{D}b)(\rho)(V_\rho),$$

ezért az előbbiekben kiszámolt deriváltak alapján

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}g_1)(\rho)(V_\rho) = & [(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1+A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1+A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho))]X\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}} + \\ &+ \sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}\, X\, [(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1-A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1-A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho))]\end{aligned}$$

adódik.

Most legyen $\rho \in \mathcal{M}_n^+$ és $X \in \mathcal{B}_1(n)$ rögzített, valamint legyen

$$g_2 : \mathcal{E}_n \to \mathrm{M}_n \qquad A \mapsto (\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2}.$$

A g_2 függvény deriváltját a g_1 függvényhez hasonló módon számolhatjuk, vagyis tetszőleges $V_A \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}g_2)(A)(V_A) =& \Big[(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(\sqrt{\rho}(V_A)\sqrt{\rho})\Big] X \sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}} + \\ &+ \sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}} X \left[(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(\sqrt{\rho}(-V_A)\sqrt{\rho})\right].\end{aligned}$$

Végül adott $\rho \in \mathcal{M}_n^+$ és $A \in \mathcal{E}_n$ esetén legyen

$$g_3 : \mathcal{B}_1(n) \to \mathrm{M}_n \qquad X \mapsto (\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2}.$$

Mivel g_3 függvényben a tényezők között csak egy helyen szerepel az X változó így az X szerinti deriváltját könnyen megkaphatjuk tetszőleges $V_X \in \mathrm{M}_n$ mátrixra.

$$(\mathrm{D}g_3)(X)(V_X) = (\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} V_X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2}$$

A g_1, g_2 és g_3 függvény deriváltjából összerekhatjuk a (3) képletben szereplő mátrix 12 elemének a deriváltját. Ha

$$\alpha_3 : \mathcal{M}_n^+ \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)\, \mathrm{M}_n \qquad (\rho, A, X) \mapsto (\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2},$$

akkor az α_3 függvény deriváltját előbbiekben kiszámolt segédfüggvények deriváltjainak összegeként kapjuk. Vagyis minden $V_\rho, V_A \in \mathrm{M}_{n,\mathrm{sa}}$ és $V_X \in \mathrm{M}_n$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\alpha_3)&(\rho, A, X)(V_\rho, V_A, V_X) = (\mathrm{D}g_1)(\rho)(V_\rho) + (\mathrm{D}g_2)(A)(V_A) + (\mathrm{D}g_3)(X)(V_X) = \\ =&[(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1+A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1+A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho))] X \sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}} + \\ &+ \sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}\, X\, [(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(((L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho)\cdot \\ &\cdot (1-A)\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho}(1-A)(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}})^{-1}(V_\rho))] \\ &[(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(\sqrt{\rho}(V_A)\sqrt{\rho})] \cdot X \sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}} + \\ &+ \sqrt{\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho}}\, X\, [(L_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}} + R_{\sqrt{\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho}}})^{-1}(\sqrt{\rho}(-V_A)\sqrt{\rho})] \\ &(\sqrt{\rho}(1+A)\sqrt{\rho})^{1/2} X (\sqrt{\rho}(1-A)\sqrt{\rho})^{1/2}.\end{aligned}$$

3.3. A felbontásban szereplő komponenseken indukált metrika

A 3.1 tétel alapján elég diagonális alappontokban ismerni a monoton metrikát, akkor már minden egyéb pontban kiszámolható. Diagonális állapotot pontosan akkor kapunk, ha ρ és A diagonális, valamint $X = 0$. Tehát ha ilyen pontokban ismerjük a metrikát, akkor már bármely más pontban is meghatározható az értéke. A továbbiakban tegyük fel, hogy ρ és A diagonális a

$$\rho_{ij} = \delta_{ij}\rho_i \qquad A_{ij} = \delta_{ij}A_i$$

mátrixelemekkel, valamint $X = 0$.

A metrika kiszámolásához az alábbi, könnyen ellenőrizhető, egyenlőségeket fogjuk használni. Ha η pozitív diagonális mátrix az $\eta_{ij} = \delta_{ij}\eta_i$ mátrixelemekkel, akkor

$$\begin{aligned}
\left(L_{\sqrt{\eta}} + R_{\sqrt{\eta}}\right)^{-1}(E_{ij}) &= \frac{1}{\sqrt{\eta_i} + \sqrt{\eta_j}} E_{ij} \\
E_{ij}\eta &= \eta_j E_{ij} \\
\eta E_{ij} &= \eta_i E_{ij} \\
F_{ij}\eta + \eta F_{ij} &= (\eta_i + \eta_j) F_{ij} \\
H_{ij}\eta + \eta H_{ij} &= (\eta_i + \eta_j) H_{ij}
\end{aligned}$$

Először meghatározzuk $(\mathrm{D}\varphi)(\rho, A, 0)(E_{ij}, 0, 0)$ értékét. A $(\mathrm{D}\varphi)(\rho, A, 0)(E_{ij}, 0, 0)$ blokkmátrix 11 elemét $(\mathrm{D}f_1)(\rho)(E_{ij})$ adja meg, ami a (4) képlet alapján az alábbi módon határozható meg.

$$\begin{aligned}
&\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(E_{ij})\right)(1+A)\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}(1+A)\left(\left(L_{\sqrt{\rho}} + R_{\sqrt{\rho}}\right)^{-1}(E_{ij})\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} E_{ij}(1+A)\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}(1+A)\frac{1}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} E_{ij} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}\left((1+A_i)\sqrt{\rho_i} + (1+A_j)\sqrt{\rho_j}\right) E_{ij} = \\
&= \left(1 + \frac{A_i\sqrt{\rho_i} + A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}\right) E_{ij}
\end{aligned}$$

A $(\mathrm{D}\varphi)(\rho, A, 0)(E_{ij}, 0, 0)$ blokkmátrix 12 és 21 eleme 0, mivel $X = 0$. A 22 elem pedig az 11 elemből kapható A előjelének megváltoztatásával.

Ezek alapján

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(F_{ij},0,0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(1+\frac{A_i\sqrt{\rho_i}+A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j}}\right)F_{ij} & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{A_i\sqrt{\rho_i}+A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j}}\right)F_{ij}\end{pmatrix} \\
(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(H_{ij},0,0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(1+\frac{A_i\sqrt{\rho_i}+A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j}}\right)H_{ij} & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{A_i\sqrt{\rho_i}+A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j}}\right)H_{ij}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Most $(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,E_{ij},0)$ értékét számoljuk ki. A $(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,E_{ij},0)$ blokkmátrix 11 elemét $(\mathrm{D}f_2)(A)(E_{ij})$ adja meg, ami az (5) képlet alapján az alábbi módon határozható meg.

$$\sqrt{\rho}E_{ij}\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho_i\rho_j}E_{ij}$$

A $(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,E_{ij},0)$ blokkmátrix 12 és 21 eleme szintén 0, mivel $X=0$. A 22 elem pedig az 11 elemnek a (-1)-szerese. Vagyis

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,F_{ij},0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\rho_i\rho_j}F_{ij} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\rho_i\rho_j}F_{ij}\end{pmatrix} \\
(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,H_{ij},0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\rho_i\rho_j}H_{ij} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\rho_i\rho_j}H_{ij}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Végül $(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,0,E_{ij})$ értéke az eddigiek alapján

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,0,E_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}E_{ij} \\ \sqrt{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}E_{ji} & 0\end{pmatrix} \\
&(\mathrm{D}\varphi)(\rho,A,0)(0,0,\mathrm{i}E_{ij}) = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sqrt{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}E_{ij} \\ -\mathrm{i}\sqrt{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}E_{ji} & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

A $\varphi : \mathcal{M}_n^{+,1}\times\mathcal{E}_n\times\mathcal{B}_1(n)\to\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ leképezés minden $(\rho,A,X)\in\mathcal{M}_n^{+,1}\times\mathcal{E}_n\times\mathcal{B}_1(n)$ pontban indukál egy

$$\varphi_{*\rho} : T_\rho\mathcal{M}_n^{+,1}\times T_A\mathcal{E}_n\times T_X\mathcal{B}_1(n)\to T_{\varphi(\rho,A,X)}\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$$

leképezést, amely lineáris vektortér izomorfizmus. Ahhoz, hogy bázist adhassunk meg az érintőtérben szükségünk lesz a az alábbi speciális mátrixokra. Jelölje E_{ij} azt a mátrixot, melynek az ij eleme 1, a többi pedig 0, továbbá legyen

$$F_{ij} = E_{ij} + E_{ji} \qquad \text{és} \qquad H_{ij} = \mathrm{i}E_{ij} - \mathrm{i}E_{ji}.$$

Minden $\rho \in \mathcal{M}_n^{+,1}$ és $A \in \mathcal{E}_n$ esetén a $T_\rho \mathcal{M}_n^{+,1}$ és a $T_A \mathcal{E}_n$ terek egy bázisát adja az $(F_{ij})_{1 \le i \le j \le n}, (H_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ vektorrendszer; továbbá minden $X \in \mathcal{B}_1(n)$ esetén $T_X \mathcal{B}_1(n)$ egy bázisát adja az $(F_{ij})_{1 \le i,j \le n}, (H_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ vektorrendszer. Természetesen ezen terek dimenziószáma kiadja $T_{\varphi(\rho,A,X)} \mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ dimenzióját

$$(n^2 - 1) + n^2 + 2n^2 = (2n)^2 - 1.$$

A $D = \varphi(\rho, A, 0)$ állapot diagonális az $\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ térben, blokkmátrix alakban számolva az 11 elemének ii eleme $\lambda_i = \dfrac{\rho_i(1 + A_i)}{2}$ és a 22 elemének ii eleme $\lambda_i' = \dfrac{\rho_i(1 - A_i)}{2}$

Legyen $\eta_{ij} = \dfrac{A_i \sqrt{\rho_i} + A_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}$. Ekkor a 2.2 tétel alapján kiszámolhatjuk a (6), a (7) és a (8) képleben szereplő blokk-mátrixok G^f metrika szerinti belső szorzatát, melyek a visszahúzott metrika komponenseit adják. A nem nulla mátrixszorzatok az alábbiak.

$$\begin{aligned}
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(F_{ij},0,0)\right) &= \frac{1}{4}(1+\eta_{ij})^2 G_D(F_{ij},F_{ij}) + \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\eta_{ij})^2 G_D(F_{(n+i)(n+j)}, F_{(n+i)(n+j)} = \\
&= \frac{(1+\eta_{ij})^2}{2} m(\lambda_i,\lambda_j) + \frac{(1-\eta_{ij})^2}{2} m(\lambda_i',\lambda_j') \\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0),(0,F_{ij},0)\right) &= \frac{1}{4}\rho_i\rho_j G_D(F_{ij},F_{ij}) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\rho_i\rho_j G_D(F_{(n+i)(n+j)}, F_{(n+i)(n+j)} = \\
&= \frac{\rho_i\rho_j}{2} m(\lambda_i,\lambda_j) + \frac{\rho_i\rho_j}{2} m(\lambda_i',\lambda_j') \\
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,F_{ij},0)\right) &= \frac{1}{4}\sqrt{\rho_i\rho_j}(1+\eta_{ij}) G_D(F_{ij},F_{ij}) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\sqrt{\rho_i\rho_j}(1-\eta_{ij}) G_D(F_{(n+i)(n+j)}, F_{(n+i)(n+j)} = \\
&= \frac{\sqrt{\rho_i\rho_j}(1+\eta_{ij})}{2} m(\lambda_i,\lambda_j) - \frac{\sqrt{\rho_i\rho_j}(1-\eta_{ij})}{2} m(\lambda_i',\lambda_j') \\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,0,E_{ij}),(0,0,E_{ij})\right) &= \frac{1}{4}\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j) G_D(F_{i(n+j)}, F_{i(n+j)}) = \\
&= \frac{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}{2} m(\lambda_i,\lambda_j').
\end{aligned}$$

Ezen eredményünket az alábbi tételben foglaljuk össze.

3.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ olyan operátormonoton függvény, mely monoton metrikát generál. Legyen $\rho \in \mathcal{M}_n^{+,1}$ diagonális a $\rho_{ij} = \delta_{ij}\rho_i$ elemekkel és $A \in \mathcal{E}_n$ diagonális az $A_{ij} = \delta_{ij}A_i$. Vezessük be a $\lambda_i = \dfrac{\rho_i(1+A_i)}{2}$, a $\lambda_i' = \dfrac{\rho_i(1-A_i)}{2}$ és az $\eta_{ij} = \dfrac{A_i\sqrt{\rho_i} + A_j\sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j}}$ jelölést, továbbá legyen $m(x,y) = \dfrac{1}{yf\left(\frac{x}{y}\right)}$. Jelölje G^* az $\mathcal{M}_{2n}^{+,1}$ téren az f függvény által meghatározott monoton metrikának a visszahúzását az $\mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ térre. Ekkor a $(\rho, A, 0) \in \mathcal{M}_n^{+,1} \times \mathcal{E}_n \times \mathcal{B}_1(n)$ pontban G^* értékeit értékei a mátrixegységekből álló bázisban az alábbiak.*
1. A nemnulla értékek valós mátrixokon a következők.

$$
\begin{aligned}
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(F_{kl},0,0)\right) &= \delta_{ik}\delta_{jl}\left(\frac{(1+\eta_{ij})^2}{2}m(\lambda_i,\lambda_j) + \frac{(1-\eta_{ij})^2}{2}m(\lambda_i',\lambda_j')\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0),(0,F_{kl},0)\right) &= \delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\rho_i\rho_j}{2}\left(m(\lambda_i,\lambda_j) + m(\lambda_i',\lambda_j')\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,F_{kl},0)\right) &= \delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\sqrt{\rho_i\rho_j}}{2}\left((1+\eta_{ij})m(\lambda_i,\lambda_j) - (1-\eta_{ij})m(\lambda_i',\lambda_j')\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,0,E_{ij}),(0,0,E_{kl})\right) &= \delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\rho_i\rho_j(1+A_i)(1-A_j)}{2}m(\lambda_i,\lambda_j').
\end{aligned}
$$

2. A komplex mátrixegységek hasonlóan viselkednek mint a valósak.

$$
\begin{aligned}
G^*_{\rho,A,0}\left((H_{ij},0,0),(H_{kl},0,0)\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(F_{kl},0,0)\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,H_{ij},0),(0,H_{kl},0)\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0),(0,F_{kl},0)\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((H_{ij},0,0),(0,H_{kl},0)\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,F_{kl},0)\right)\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,0,\mathrm{i}E_{ij}),(0,0,\mathrm{i}E_{kl})\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((0,0,E_{ij}),(0,0,E_{ij})\right)
\end{aligned}
$$

3. Az összes többi mátrixegység belső szorzata 0.

$$
\begin{aligned}
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(H_{kl},0,0)\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,H_{kl},0)\right) = 0\\
G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,0,E_{ij})\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((F_{ij},0,0),(0,0,\mathrm{i}E_{ij})\right) = 0\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0),(0,H_{kl},0)\right) &= G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0,0),(0,0,E_{ij})\right) = 0\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,F_{ij},0),(0,0,\mathrm{i}E_{ij})\right) &= 0\\
G^*_{\rho,A,0}\left((0,0,E_{ij}),(0,0,\mathrm{i}E_{kl})\right) &= 0
\end{aligned}
$$

4. Konkluzió

A qubit-qubit rendszer esetén az összefonódottsági valószínűség meghatározásához az $\mathcal{M}_4^{+,1}$ téren való integrálást fel lehet bontani

$$\int\limits_{\mathcal{M}_4^{+,1}} \ldots \mathrm{d}(D) = \int\limits_{\mathcal{M}_2^{+,1}} \int\limits_{\mathcal{E}_2} \int\limits_{\mathcal{B}_1(2)} \ldots \mathrm{d}(X)\ \mathrm{d}(A)\ \mathrm{d}(\rho)$$

módon, ahol ráadásul a $\int\limits_{\mathcal{M}_2^{+,1}}$ integrál még el is hagyható [5]. A 3.2 tételből látszik, hogy a $\mathcal{B}_1(n)$ tér szerint szépen faktorizálható a szorzatmérték, és így az invariáns térfogati sűrűségfüggvény is, hiszen ez a térrész ortogonális a másik két érintőtérre, ezért a fenti felbontás használható lesz abban az esetben is, amikor az állapotteret monoton metrikával látjuk el.

A jelen dolgozat kereteit meghaladó távlati tervben szerepel, hogy az [5] publikációban részletesen leírt számolást végigvigyük tetszőleges monoton metrikára és így legalább a qubit-qubit rendszer esetén, fizikailag releváns térfogati mértékek szerint meg tudjuk mondani, hogy az állapotok hány százaléka összefonódott és ezzel részben meg tudjuk válaszolni Życzkowski 1998-ban feltett kérdését.

5. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a téma elsajátításához szükséges rengeteg külön elméleti foglalkozást, valamint a dolgozat megírásához nyújtott segítségét témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának.

Hivatkozások

[1] Attila Andai. *Information Geometry in Quantum Mechanics*. PhD thesis, BUTE, Applied Mathematics, 2003.

[2] Charles F. Dunkl and Paul B. Slater. Separability probability formulas and their proofs for generalized two-qubit X-matrices endowed with Hilbert–Schmidt and induced measures. *Random Matrices: Theory and Applications*, 4(04):1550018, 2015.

[3] Jianjia Fei and Robert Joynt. Numerical computations of separability probabilities. *Rep. Math. Phys.*, 78(2):177–182, 2016.

[4] Karol Życzkowski, Peres Horodecki, Anna Sanpera, and Maciej Lewenstein. Volume of the set of separable states. *Phys. Rev. A*, 58:883–892, Aug 1998.

[5] Attila Lovas and Attila Andai. Invariance of separability probability over reduced states in 4×4 bipartite systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(29):295303, 2017.

[6] Dénes Petz. Monotone metrics on matrix spaces. *Linear Algebra Appl.*, 244:81–96, 1996.

[7] Dénes Petz and Csaba Sudár. Geometries of quantum states. *J. Math. Phys.*, 37(6):2662–2673, 1996.

[8] Paul B. Slater. A concise formula for generalized two-qubit Hilbert–Schmidt separability probabilities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(44):445302, 2013.

[9] Paul B. Slater and Charles F. Dunkl. Generalized two-qubit whole and half Hilbert-Schmidt separability probabilities. *J. Geom. Phys.*, 90:42–54, 2015.