BME Matematikai Intézet

Analízis Tanszék

Lovas Attila

Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából

TDK dolgozat

Témavezető: Dr. Andai Attila
egyetemi docens

2012

Kivonat

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció naív olvasata szerint két fizikai mennyiséget nem lehet egyszerre tetszőleges pontossággal mérni. Ennek (pontosabban a Schrödinger által élesített változatának) a matematikai megfelelője, hogy a két mennyiség kovarianciamátrixának a determinánsára adható egy alsó becslés. Ezt Robertson még 1934-ben több fizikai mennyiségre általánosította. Fél évszázaddal később már alkalmazás közelébe került Robertson-eredménye. A kvantumszámítógép fizikai megvalósíthatósága a határozatlansági relációk kutatásának egyik fő mozgatórugója lett. Az utóbbi évtizedben kiderült, hogy az egyenlőtlenségben szereplő alsó becslés nagymértékben javítható bizonyos operátormonoton függvények segítségével (Gibilisco, Imparato, Isola: A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle, 2007.). A dolgozatban a Gibilisco által adott becslésnél egy élesebb becslést adunk, továbbá megmutatjuk, hogy mind a fizikai mennyiségek kovarianciamátrixa, mind az általunk megadott alsó korlát természetes módon származtatható az állapottér geometriájából. A geometriai kapcsolat lényege abban áll, hogy az állapottéren a kvantum Fisher-információk (Riemann-metrikák) bizonyos operátormonoton függvényekkel indexelhetők, és a kovariancia mátrix determinánsa illetve az általunk adott alsó becslés az állapottér egy pontja feletti érintőtéren lévő vektorok belső szorzatával van kapcsolatban. Vagyis a határozatlansági reláció mindkét oldalán az állapottér geometriáját meghatározó Riemann-metrika szerepel, az egyenlőtlenség arra vezethető vissza, hogy különböző metrikákat tekintünk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Werner Heisenberg azóta híressé vált határozatlansági-elvét gondolat kísérletekből és a Bohr-féle posztulátumokból származtatta 1927-ben heurisztikus meggondolások segítségével [1]. A Heisenberg-féle határozatlansági-elv eredeti formájában azt mondta ki, hogy egy részecske helyét és impulzusát egyszerre nem lehet tetszőleges pontossággal megmérni. Amennyiben Δx [m] jelöli a helymérés bizonytalanságát, $\Delta p \left[\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}\right]$ pedig az impulzus mérés bizonytalanságát, akkor

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h, \quad \text{ahol} \quad h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \tag{1.1}$$

a Planck-állandó. Meg kell jegyeznünk, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági-elv ebben a formájában csupán egy *elv* és nem tétel.

A Heisenberg határozatlansági-elvet még ugyanebben az évben E. H. Kennard és Hermann Weyl fogalmazta meg korrektül és bizonyította be [2]. A Kennard és Weyl által bizonyított változat a hely és impulzus szórásának (σ_x, illetve σ_p) szorzatára szolgáltat alsó becslést (1.2).

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \tag{1.2}$$

Kennard és Weyl becslését 1929-ben Robertson általánosította tetszőleges fizikai mennyiségekre [3].

A történeti áttekintést ebben a pontban rövid időre félbeszakítjuk, hogy néhány, a továbbiakban nélkülözhetetlen fogalmat definiáljunk. Ebben a dolgozatban csak olyan kvantummechanikai rendszereket vizsgálunk, melyek leírhatók véges dimenziós komplex Hilbert-terek segítségével. Ilyen rendszer például valamely nemrelativisztikus részecske spin része [4].

1.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyen $\mathcal{H}_n$ egy rögzített n-dimenziós Hilbert-tér.

1. Az $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett 1 nyomú, önadjungált, pozitív lineáris operátorokat *állapotoknak* nevezzük. Az állapotok összességét *állapottérnek* hívjuk, ezt $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ jelöli.

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n),\ D \geq 0,\ D = D^+,\ \text{Tr}(D) = 1 \right\}$$

2. Az $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett önadjungált operátorokat *fizikai mennyiségeknek* vagy *obszerválibiliseknek* nevezzük. A fizikai mennyiségek összességét jelölje $\mathcal{M}_{n,sa}$.

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n),\ D = D^+ \right\}$$

3. Az állapottér egy zárt konvex halmaz az $(\mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n), \mathbb{R})$ vektortérben. Ennek a halmaznak az extremális [1] pontjait hívjuk *tiszta állapotoknak*, a többi pontot pedig *kevert állapotoknak* nevezzük.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a fizikai mennyiségek vektorteret alkotnak a valós számtest felett. Ha D egy állapot, akkor a fizikai mennyiségek vektorterén bevezethető egy belső szorzás, melyet a

$$\mathcal{M}_{n,sa} \times \mathcal{M}_{n,sa} \ni (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(DAB) \tag{1.3}$$

leképezés definiál. A szokásos módon bizonyítható, hogy az így bevezetett skaláris szorzás teljesíti a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, vagyis tetszőleges A, B fizikai mennyiségekre és minden D állapotra fennáll a következő (1.4) egyenlőtlenség.

$$\mathrm{Tr}(DA^2)\mathrm{Tr}(DB^2) \geq |\mathrm{Tr}(DAB)|^2 = \mathrm{Tr}(DAB)\mathrm{Tr}(DBA) \tag{1.4}$$

Az A fizikai mennyiség *várható értékét* a $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapotban az

$$\mathbb{E}_D A := \mathrm{Tr}(DA) \tag{1.5}$$

kifejezéssel definiáljuk. A valószínűségszámításból ismert kovariancia fogalmát

$$„\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y”$$

szeretnénk általánosítani nemkommutatív esetre. A kovariancia operációtól elvárjuk, hogy szimmetrikus legyen. Ezt a követelményt az 1.2. definícióval bevezetett kovariancia teljesíti.

1.2. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy rögzített állapot. Az A és B fizikai mennyiségek *kovarianciáját* a D állapotban az (1.6) formula adja meg.

$$\mathrm{Cov}_D^s(A, B) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)\right) - \mathrm{Tr}(DA)\mathrm{Tr}(DB) \tag{1.6}$$

Az A fizikai mennyiség *varianciáját* a D állapotban a

$$\mathrm{Var}_D(A) := \mathrm{Cov}_D^s(A, A) \tag{1.7}$$

formulával definiáljuk. A felső indexben szereplő s betűvel arra szeretnénk utalni, hogy a most bevezetett kovariancia szimmetrikus a változóiban. Az irodalomban a $\mathrm{Cov}_D^s(A, B)$ kovarianciát *szimmetrizált* kovarianciának is nevezik [18].

A Robertson által 1929-ben bizonyított határozatlansági reláció ezek után a következőképpen hangzik.

[1] Egy konvex halmazbeli elemet abban az esetben nevezünk *extremálisnak*, ha nem áll elő két különböző konvex halmazbeli elem nem triviális konvex kombinációjaként.

1.3. Tétel (Robertson, 1929). Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizika mennyiségek, $D \in \mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ pedig egy tetszőleges állapot, akkor az A és B obszervábilisek varianciájára a következő becslés érvényes:

$$\mathrm{Var}_D(A)\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(D[A,B])|^2 \tag{1.8}$$

A Robertson-féle határozatlansági relációt 1930-ban Ervin Schrödinger egy kovariancia taggal javította meg [5]. A Schrödinger-féle határozatlansági reláció az 1.3. tétel jelöléseivel felírva a következő alakot ölti:

$$\mathrm{Var}_D(A)\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(D[A,B])|^2 + \mathrm{Cov}_D(A,B)^2 \tag{1.9}$$

Bizonyítás. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ pedig egy állapot. Vezessük be az

$$A_0 := A - I\,\mathrm{Tr}\,DA \tag{1.10}$$

$$B_0 := B - I\,\mathrm{Tr}\,DB \tag{1.11}$$

centrált fizikai mennyiségeket. Az A_0 és B_0 obszervábilisekre felírt (1.4) Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség ekvivalens az A és B fizikai mennyiségekre felírt (1.9) egyenlőtlenséggel. **Q.E.D.**

1.4. Következmény. Az (1.9) egyenlőtlenség a D-variancia definícióját felhasználva a következő determináns-egyenlőtlenség formájában írható fel.

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}^s_D(A,A) & \mathrm{Cov}^s_D(A,B) \\ \mathrm{Cov}^s_D(B,A) & \mathrm{Cov}^s_D(B,B) \end{pmatrix} \geq$$

$$\geq \det\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[A,A]) & -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[A,B]) \\ -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[B,A]) & -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[B,B]) \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Az (1.12) egyenlőtlenséget 1934-ben Robertson több fizikai mennyiség együttesére is általánosította [6]. Amennyiben $\{A_k\}_{k=1}^N$ fizikai mennyiségek véges rendszere, D pedig egy állapot érvényes a

$$\det\left(\left[\mathrm{Cov}^s_D(A_k, A_l)\right]_{k,l=1\ldots,N}\right) \geq \det\left(\left[-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[A_k,A_l])\right]_{k,l=1\ldots,N}\right) \tag{1.13}$$

determináns-egyenlőtlenség. A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán egy antiszimmetrikus mátrix determinánsa áll, ezért páratlan számú fizikai mennyiségre az (1.13) egyenlőtlenség jobb oldala zérus.

2. Az állapottér geometriája

Ebben a fejezetben rövid betekintést adunk az állapottér geometriájába. Ez a többszempontból is gyümölcsöző tárgyalásmód lesz segítségünkre a határozatlansági relációk kutatásában elért újabb eredmények bemutatásánál, illetve ennek segítségével segítségével fogunk geometriai értelmezést tulajdonítani a határozatlansági relációk különböző oldalain szereplő kifejezések is. Az Olvasó a fejezetben felhasznált differenciálgeometriai fogalmak jelentős részét az [7] műben találhatja meg.

2.1. Az állapottér mint Riemann-sokaság

Az előző fejezetben említettük, hogy egy elegendően nagy N természetes számra az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér egy konvex zárt halmaz az $\mathbb{R}^N$ vektortérben. A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett belső szorzás folytonosságából adódóan az állapottér belsejét pontosan azok az állapotok alkotják, melyekhez szigorúan pozitív lineáris operátorok tartoznak, ezért ezt a halmazt $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$-al fogjuk jelölni. Az állapottér belseje egy összefüggő nyílt halmaz, melyet kizárólag kevert állapotok alkotnak.

2.1. Állítás. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$-al jelölt belseje ellátható egy közönséges sima sokaság struktúrával. Az így kapott sima sokaságot jelölje szintén $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$.

Bizonyítás. Az állapottér belsejét egyetlenegy térképpel fogjuk lefedni. A koordinátázást komplex állapotokra mutatjuk meg, a valós állapotok koordinátázása hasonlóképpen történik.

Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ egy állapot és $\{e_i\}_{i=1}^n$ a $\mathcal{H}_n$ n-dimenziós Hilbert-tér egy bázisa. A

$$\circledcirc : \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \tag{2.1}$$

diadikus szorzás értelmezése:

$$(\forall u, v, w \in \mathcal{H}_n) \quad w \mapsto u \circledcirc v(w) := u\langle v, w\rangle \tag{2.2}$$

Vezessük be az

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(e_k \circledcirc e_l + e_l \circledcirc e_k) \quad \text{és} \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(e_k \circledcirc e_l - e_l \circledcirc e_k) \tag{2.3}$$

$(1 \leq k < l \leq n)$ operátokokat. Vegyük a következő

$$\phi : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to \mathbb{R}^{n^2-1} \quad D \mapsto \phi(D) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\phi(D) := (&\mathrm{Tr}\, De_1 \circledcirc e_1, \dots, \mathrm{Tr}\, De_{n-1} \circledcirc e_{n-1}, \mathrm{Tr}\, De_1 \vee e_2, \dots, \mathrm{Tr}\, De_1 \vee e_n, \\ &\dots, \mathrm{Tr}\, De_{n-1} \vee e_n, \mathrm{Tr}\, De_1 \wedge e_2, \dots, \mathrm{Tr}\, De_1 \wedge e_n, \dots, \mathrm{Tr}\, De_{n-1} \wedge e_n)\end{aligned} \tag{2.5}$$

leképezést. Ellenőrizhető, hogy ez egy kölcsönösen egyértelmű inverzével együtt folytonos leképezés, tehát homeomorfizmus az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ tér és $\mathbb{R}^{n^2-1}$ egy összefüggő nyílt halmaza köztött. **Q.E.D.**

2.2. Megjegyzés. Ha vesszük a D állapot mátrixreprezentációját, akkor a $e_i \vee e_j$ leképezések felelnek meg a D mátrix valós részének, az $e_i \wedge e_j$ leképezések pedig a képzetes résznek. Így a valós állapotok koordinátázása annyiban tér el a komplex állapotok koordinátázásától, hogy a $e_i \wedge e_j$ leképezéseket kihagyjuk. Az állapottér fenti térképezését szokás *kanonikus koordinátázásnak* is nevezni.

2.3. Definíció. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ sokaságon egy $g \in T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \vee T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ (2,1)-típusú sima tenzormezőt *Riemann-metrikának* nevezünk, ha tetszőleges

$$X : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to T\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$$

sima vektormező esetén a

$$g(X,X) : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to \mathbb{R}$$

függvény nemnegatív és $(\forall p \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}) \quad g(X,X)(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = 0$.

2.4. Állítás. Egy tetszőleges $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ állapot felett a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér izomorf a nulla nyomú fizikai mennyiségek $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ valós számtest feletti vektorterével.

Bizonyítás. Az érintőtér azon meghatározását vesszük alapul, mely az érintővektorokat a sokaságban haladó sima görbék ekvivalencia osztályaiként adja meg, ahol az ekvivalencia reláció az elsőrendű érintkezés.

Legyen $\gamma : (-1,1) \to \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sima görbe, melyre $\gamma(0) = D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$. A Tr művelet lineáris funkcionál, ezért

$$\mathrm{Tr}\, \dot{\gamma}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathrm{Tr}(\gamma(t) - \gamma(0)) = 0 \tag{2.6}$$

teljesül, azaz $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{M}^0_{n,sa}$. A $T_D\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ érintőtér vektorai $(D, \dot{\gamma}(0))$ alakú párokkal reprezentálhatók és minden ilyen párra igaz, hogy a második elem $\mathcal{M}^0_{n,sa}$-beli elem, ezért rögzített $D \in \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ esetén a $T_D\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ érintőtér beágyazható a $\mathcal{M}^0_{n,sa}$ vektortérbe.

Most legyen $A \in \mathcal{M}^0_{n,sa}$ tetszőleges és vegyük a $t \mapsto \gamma(t) := D + tA$ görbét. Az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa} \subseteq \mathbb{R}^{n^2-1}$ halmaz nyílt és γ folytonos, ebből következik, hogy $\exists \varepsilon > 0$, melyre a γ görbe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumra való megszorítása teljes egészében az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságban halad. A $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ leképezés lineáris, ezért sima, $\gamma(0) = D$ és $\dot{\gamma}(0) = A$. Az $\mathcal{M}^0_{n,sa}$ lineáris tér tehát nemcsak beágyazható a $T_D\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ érintőtérbe, hanem izomorf is vele. **Q.E.D.**

2.5. Következmény. Az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságon adott Riemann-metrikáknak bijektíven megfeleltethetők azok a

$$K : \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa} \times \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \times \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \to \mathbb{C} \quad (D, A, B) \mapsto K_D(A, B) \tag{2.7}$$

leképezések, melyek teljesítik a következő két feltételt:

1. Tetszőleges rögzített $D \in \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ esetén a

$$K_D : \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \times \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \to \mathbb{C}$$

$(A, B) \mapsto K_D(A, B)$ leképezés skaláris szorzás.

2. Tetszőleges rögzített $A \in \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa}$ esetén a

$$K_{(.)}(A, A) : \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa} \to \mathbb{C}$$

$D \mapsto K_D(A, A)$ leképezés sima.

Az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságon adott Riemann-metrikákra ezentúl kétféleképpen is gondolhatunk. Egyrészt ha az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságot absztrakt sokaságként kezeljük, akkor a Riemann-metrikákra tekinthetünk a 2.3. definíció szerinti értelemben. Másfelől pedig ha az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságra úgy tekintünk, mint mátrixokra, akkor egy Riemann-metrikára gondolhatunk úgy is, mint egy (2.7) alakú leképezésre, mely az 1. és 2. feltételeket teljesíti.

Az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sima sokaság a megadott metrikától függően többféleképpen tehető Riemann-sokasággá. Vehetjük például az (1.3) formulával megadott pontonként változó skaláris szorzás visszahúzottját, ez Riemann-metrikát definiál az $\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ sokaságon, de akár vehetjük az 1.2. definícióval bevezetett kovarianciát visszahúzottját is, ez is egy Riemann-metrika.

2.2. Operátormonoton függvények és mátrixközepek

A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér egy $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)$ lineáris leképezéséről abban az esetben mondjuk, hogy *pozitív* ($A \geq 0$), ha az A leképezéshez asszociált kvadratikus alak pozitív szemidefinit. Ezek után tetszőleges A és B lineáris operátorokra értelmezhető egy

$$„\geq" \subset \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \times \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)$$

reláció.

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \tag{2.8}$$

Az így értelmezett relációval a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér lineáris operátorai részbenrendezett halmazt alkotnak. Vizsgálható tehát a „$\geq$" reláció és az operátorokon értelmezett függvények viszonya.

2.6. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény *operátormonoton*, ha

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall A, B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B) \tag{2.9}$$

teljesül.

Egy $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ operátormonoton függvényt *szimmetrikusnak* nevezünk, ha fennáll az

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.10}$$

egyenlőség. Egy f operátormonoton függvény *normált*, ha az $x = 1$ pontra folytonosan kiterjeszthető és $f(1) = 1$ teljesül.

A szimmetrikus, normált operátormonoton függvények összességét $\mathcal{F}_{op}$-al jelöljük. Az $\mathcal{F}_{op}$ halmaz két fontos részhalmaza:

$$\mathcal{F}_{op}^{(r)} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\} \text{ és } \mathcal{F}_{op}^{(n)} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\} \tag{2.11}$$

2.7. Megjegyzés. Az, hogy egy $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény operátor monoton vagy sem nincs összefüggésben azzal, hogy az f függvény „milyen gyorsan növekszik" [2] például az exponenciális függvény nem operátormonoton, az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény pedig igen.

[2] Mondjuk azt, hogy az f függvény „gyorsabban növekszik", mint a g függvény, ha $f - g$ szigorú monoton növő.

2.8. Példa. Az alábbi függvények mindegyike szimmetrikus és normált operátormonoton függvény:

$$x \mapsto \frac{1+x}{2}, \ \forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \ x \mapsto \frac{2x^{\frac{1+\alpha}{2}}}{1+x^{2\alpha}}, \ x \mapsto \frac{x-1}{\log x}$$

2.9. Definíció. Jelölje $\mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér pozitív lineáris operátorainak halmazát. Egy $m : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \times \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ folytonos függvényt *mátrixközépnek* nevezünk, ha teljesíti a következő feltételeket.

1. $m(A, A) = A$,
2. $m(A, B) = m(B, A)$,
3. $A \leq B \Rightarrow A \leq m(A, B) \leq B$,
4. $(\forall P \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad Pm(A, B)P^* \leq (PAP^*, PBP^*)$,

A mátrixközepek halmazát az $\mathcal{M}_{op}$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Az operátormonoton függvények és a mátrixközepek kapcsolata szoros, erről szól a következő tétel [8].

2.10. Tétel (Ando, Kubo). Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények halmaza ($\mathcal{F}_{op}$) és a mátrixközepek halmaza ($\mathcal{M}_{op}$) közt. Egy ilyen megfeleltetés ad meg a

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{op})(\forall A, B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+) \quad m_f(A, B) := A^{\frac{1}{2}} f\left(A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

kifejezés.

2.11. Példa. Az $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ operátorok számtani, mértani és harmonikus közepei rendre:

$$A \nabla B := \frac{1}{2}(A+B) \quad A \# B := A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) B^{\frac{1}{2}} \quad A!B := 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

Ando és Kubo a [8] közleményükben írták le, hogy a mátrixközepek között a számtani közép a legnagyobb és a harmonikus közép a legkisebb. Érdekességként érdemes megemlíteni, hogy egyenlőre nem ismeretes olyan formula, mellyel három mátrix mértani középét ki lehetne számítani.

2.3. Kvantum Fisher információk

2.12. Definíció. A $T : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_m)$ lineáris leképezést *pozitív* leképezésnek mondjuk, ha pozitív operátor T általi képe pozitív operátor.

Egy k természetes számra az $\mathcal{A} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)$ elemhez rendeljük hozzá az $[\mathcal{A}]^i_j = A^i_j \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)$ $i, j = 1, \ldots, k$ blokkmátrixot. Egy

$$T : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_m)$$

lineáris leképezést akkor nevezzük *teljesen pozitív* leképezésnek, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a

$$T^{(k)} : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_m) \quad A^i_j \mapsto T^{(k)}\left(A^i_j\right) = T(A^i_j) \tag{2.13}$$

leképezés pozitív leképezés.

2.13. Definíció. Egy $T : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_m)$ leképezést *sztochasztikus leképezésnek* hívunk, ha teljesen pozitív és felcserélhető a Tr művelettel.

2.14. Definíció. Riemann sokaságok egy $\left(\mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}, K^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ családját *monoton metrika családnak* nevezzük, ha tetszőleges m, n természetes számokra és minden

$$T : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_m)$$

sztochasztikus leképezésre bármely $D \in \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ állapotban teljesül az

$$(\forall A \in \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa}) \quad K^{(m)}_{T(D)}(T(A), T(A)) \leq K^{(n)}_D(A, A) \tag{2.14}$$

egyenlőtlenség. A monoton metrika családok tagjait *kvantum Fisher információknak* hívjuk.

Az operátormonoton függvények és a monoton metrika családok között szoros kapcsolat mutatható ki, erről szól Petz osztályozási tétele [9]. Vezessük be az $L_{n,D}, R_{n,D} \in \mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n))$ operátorokat, melyek a $D \in \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa}$ operátorral való bal, illetve jobb oldali kompozíciót szimbolizálják.

$$(\forall D \in \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa})(\forall A \in \mathcal{H}_n) \quad L_{n,D}(A) := DA \quad R_{n,D} := AD \tag{2.15}$$

Ezekkel a jelölésekkel a monoton metrika családok Petz-féle klasszifikációs tétele így szól.

2.15. Tétel (Petz, 1996). A monoton metrikacsaládok és a szimmetrikus operátormonoton függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ilyen bijekciót például a következő módon lehet megadni.

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{op}) \quad K^{(n),f} : \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa} \times \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \times \mathcal{M}^{(0)}_{n,sa} \to \mathbb{C} \quad (D, A, B) \mapsto K^{(n),f}_D(A, B) \tag{2.16}$$

$$K^{(n),f}_D(A, B) = \mathrm{Tr}\left[A \circ \left(R^{\frac{1}{2}}_{n,D} f(L_{n,D} R^{-1}_{n,D}) R^{\frac{1}{2}}_{n,D}\right)^{-1} \circ B\right] \tag{2.17}$$

Az így definiált megfeleltetés egy adott f operátormonoton függvényhez egy jól meghatározott $(K^{(n),f}, \mathcal{M}^{(1)+}_{n,sa})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton metrika családot rendel és minden monoton metrikacsalád előállítható ezen a módon egy alkalmas $f \in \mathcal{F}_{op}$ operátormonoton függvény segítségével.

Az $f \in \mathcal{F}_{op}$ operátormonoton függvényhez az (2.16) formula által rendelt $K^{(n),f}_D(\cdot,\cdot)$ kvantum Fisher információ jelölésére a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D,f}$ szimbólumot is alkalmazhatjuk.

2.16. Példa. Az $f(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{x} + 1)^2$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvényhez asszociált monoton metrika család tagjait *Wigner-Yanase* metrikáknak nevezik.

Tetszőleges $\beta \in [-1, 2] \setminus \{0, 1\}$ számra szimmetrikus, normált operátormonoton függvényt határoz meg a $f_\beta(x) = \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta-1)(x^{1-\beta}-1)}$ hozzárendelés. Az ezen függvénycsalád tagjaihoz metrikákat *Wigner-Yanase-Dyson* metrikáknak hívják.

2.17. Megjegyzés. Jogosan vetődhet fel a kérdés, hogy az eddigi vizsgálódásaink során csupán az állapottér belsejét néztük és a tiszta állapotokról nem mondtunk semmit. Az egész $\mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ állapottér egy peremes sokaság struktúrával látható el. A tiszta állapotok az $\partial\mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ perem részhalmazát alkotják. Petz monoton metrikák radiális kiterjeszthetőségéről [9] szóló tétele értelmében igaz, hogy egy $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D,f}$ kvantum Fisher információ pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha $f \in \mathcal{F}^{(r)}_{op}$, azaz $f(0) \neq 0$.

3. XXI. századi eredmények

A határozatlansági relációk kutatásának történeti áttekintése ebben a fejezetben zárul. Azokat a modern eredményeket mutatjuk be, melyek kutatásaink kiinduló pontját képezték.

Az állapottér differenciálgeometriai eszközökkel történő tanulmányozása az 1990-es évek elején vált általánosan elterjedté. Petz tétele a monoton metrika családok klasszifikációjáról fordulópontot jelentett a határozatlansági relációk kutatásában [9, 10, 11, 12]. Innentől fogva nyertek geometriai tartalmat a határozatlansági relációk jobb oldalán álló mennyiségek, bár erre a felismerésre majdnem egy évtizedet kellett várni. Az első olyan közlemény, melyben a fizikai mennyiségek kovarianciájának becslésére kvantum Fisher információkat alkalmaznak a Luo és Zhang szerzőpároshoz köthető [13].

Luo és Zhang egy a Robertson (1.13) determináns-egyenlőtlenségéhez hasonló formájú egyenlőtlenséget (3.1) sejtett meg [13] és bizonyított be speciálisan a Wigner-Yanase metrikára (lásd.: 2.16. példa) és $N = 2$ fizikai mennyiségre [14, 15].

3.1. Tétel. Legyenek $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek és $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy tetszőleges állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ pedig egy operátormonoton függvény. Ebben az esetben érvényes az alábbi egyenlőtlenség.

$$\det\left([\mathrm{Cov}_D^s(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}\right) \geq \det\left(\left[\frac{f(0)}{2}\langle i[D, A_k], i[D, A_l]\rangle_{D,f}\right]_{k,l=1,\dots,N}\right) \tag{3.1}$$

3.2. Definíció. Legyen $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvény. Az $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek *kvantum f-kovarianciáját* egy $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapotban az alábbi kifejezés definiálja.

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A, B) := \frac{f(0)}{2}\langle i[D, A], i[D, B]\rangle_{D,f} \tag{3.2}$$

A kvantum f-kovariancia kifejezés helyett a továbbiakban ahol nem szükséges az f operátormonoton függvénytől való függést kihangsúlyozni egyszerűen csak *kvantum kovarianciát* írunk. Az irodalmakban az A és B fizikai mennyiségek kvantum kovarianciáját általában $\mathrm{Qov}_{D,f}(A, B)$ jelöli [18, 19, 20]. Az általunk használt jelöléssel azt szeretnénk kihangsúlyozni, hogy a kvantum kovariancia egy – bizonyos értelemben vett – antiszimmetrizált kovariancia. A 4. fejezetben tisztázzuk, hogy a szimmetrizált és az antiszimmetrizált kovariancia elnevezés pontosan mit takar. Látni fogjuk, hogy a Cov^s közönséges szimmetrizált kovariancia csak egy a sokféle szimmetrizált kovariancia közül.

A 3.1 tételt Wigner-Yanase-Dyson metrikára Kosaki [16] és a Yanagi, Furuichi, Kuriyama hármas [17] bizonyította egymástól függetlenül. A 3.1 tételt általános $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvényre Gibilisco és Isola sejtette meg és írta le a [18] cikkben. A valós, $N = 3$ esetre Gibilisco, Imparato és Isola közölt bizonyítást [19], ugyanebben a közleményben szerepel az alábbi tétel bizonyítatlanul, sejtésként kimondva.

3.3. Tétel. Legyenek $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy tetszőleges állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények. Ilyen feltételek mellett igaz az, hogy ha

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \tag{3.3}$$

teljesül, akkor fennáll az

$$\det\left([\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\ldots,N}\right) \geq \det\left([\mathrm{Cov}_{D,g}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\ldots,N}\right) \tag{3.4}$$

egyenlőtlenség.

Andai A. a 3.1. tételnél és Gibilisco 3.3. tételénél erősebb állításokat fogalmazott meg és bizonyított be [20]. Bizonyítás rendkívül szellemes és egyszerű, lényegében az általánosított Brunn–Minkowski egyenlőtlenséget használja fel. Andai tételeit bizonyítás nélkül közöljük, a bizonyításokat az Olvasó a [20] közleményben találhatja meg.

3.4. Tétel (Andai). Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények, melyek a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \tag{3.5}$$

feltételt kielégítik. Az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ nem azonosan zérus fizikai mennyiségek véges rendszerére definiáljuk a kovariancia és kvantum kovariancia mátrixokat a követkző módon.

$$[\mathrm{Cov}_D^s]_j^i := \mathrm{Cov}_D^s(A_i, A_j) \tag{3.6}$$

$$[\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}]_j^i := \mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_i, A_j) \tag{3.7}$$

I. Ekkor igazak a következő kijelentések:

$$\det(\mathrm{Cov}_D^s) \geq \det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) + \det(\mathrm{Cov}_D^s - \mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) + R(D,f,N) \quad (3.8)$$

$$\det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) \geq \det(\mathrm{Cov}_{D,g}^{as}) + \det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as} - \mathrm{Cov}_{D,g}^{as}) + R(D,f,g,N) \quad (3.9)$$

A fenti formulákban szereplő $R(D,f,N)$ és $R(D,f,g,N)$ járulékos tagokat a következő, binomiális tételre emlékeztető összefüggések adják meg.

$$R(D,f,N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left[\det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as})\right]^{\frac{k}{N}} \left[\mathrm{Cov}_D^s - \mathrm{Cov}_{D,f}^{as}\right]^{\frac{N-k}{k}} \quad (3.10)$$

$$R(D,f,g,N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left[\mathrm{Cov}_{D,g}^{as}\right]^{\frac{k}{N}} \left[\mathrm{Cov}_{D,f}^{as} - \mathrm{Cov}_{D,g}^{as}\right]^{\frac{N-k}{k}} \quad (3.11)$$

II. Az alábbi három kijelentés egymással ekvivalens:

i. $\det(\mathrm{Cov}_D^s) = \det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as})$

ii. $\det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) = \det(\mathrm{Cov}_{D,g}^{as})$

iii. Az $\{A_k\}_{k=1}^N$ fizikai mennyiségek lineárisan összefüggő vektorrendszert határoznak meg az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben.

A következő tétel az előző tételt állítását adja vissza a $t = \frac{1}{2}$ paraméter választás mellett.

3.5. Tétel (Andai). Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények, melyek a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \quad (3.12)$$

feltételt kielégítik. Az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ nem azonosan zérus fizikai mennyiségek véges rendszerére a 3.4. tételben leírt módon defniáljuk a Cov_D^s kovariancia és a $\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}$, illetve $\mathrm{Cov}_{D,g}^{as}$ kvantum kovariancia mátrixokat. Ekkor a $t \in [0,1]$ paraméter minden lehetséges értékére fennáll a

$$\det(t\,\mathrm{Cov}_D^s + (1-2t)\,\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) \geq (1-t)^N \det(\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) + \\ + t^N \det(\mathrm{Cov}_D^s - \mathrm{Cov}_{D,f}^{as}) + R(D,f,N,t) \quad (3.13)$$

és a

$$\det(t \operatorname{Cov}^{as}_{D,f} + (1-2t)\operatorname{Cov}^{as}_{D,g}) \geq (1-t)^N \det(\operatorname{Cov}^{as}_{D,g}) + \\ + t^N \det(\operatorname{Cov}^{as}_{D,f} - \operatorname{Cov}^{as}_{D,g}) + R(D,f,g,N,t) \quad (3.14)$$

egyenlőtlenség az

$$R(D,f,N,t) = \\ = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t)\sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}^{as}_{D,f})}\right)^k \left(t\sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}^{s}_{D} - \operatorname{Cov}^{as}_{D,f})}\right)^{N-k} \quad (3.15)$$

$$R(D,f,g,N,t) = \\ = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t)\sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}^{as}_{D,g})}\right)^k \left(t\sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}^{as}_{D,f} - \operatorname{Cov}^{as}_{D,g})}\right)^{N-k} \quad (3.16)$$

járulékos tagokkal.

3.6. Megjegyzés. A bemutatott tételekben a szimmetrikus normált operátormonoton függvények mindegyikéről kikötöttük, hogy a nullában nemnulla értéket vesznek fel. Ez a feltétel azért kellett, mert pontosan azokat a kvantum Fisher információkat lehet kiterjeszteni radiálisan az $\mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ állapottér peremére, melyek nullában el nem tűnő szimmetrikus, normált operátormonoton függvények segítségével származtathatók (lásd.: 2.17. megjegyzés).

4. Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából

Ezt és az ezt követő fejezetet saját eredményeink bemutatásának szenteljük. Gibilisco a [18] cikkében hívta fel a figyelmet arra, hogy (3.1) és (3.4) határozatlansági relációk különböző oldalain álló mennyiségeknek geometriai tartalma van. Ezekre a mennyiségekre úgy tekintett, mint az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ vektorokhoz asszociált térfogatra.

Pongyolán szólva a (3.1) formula jobb oldalán álló mennyiségekre gondolhatunk úgy, hogy a fizikai mennyiségeket a sűrűségoperátorral való kommutálás levetíti az állapot feletti érintőtérre, a determináns pedig a kapott érintővektorok által kifeszített térfogatot adja meg. A jobb oldalak jól illeszkednek a geometriai képbe. Nem ez a helyzet a baloldalon szereplő szimmetrizált kovarianciával, mivel első ránézésre a determináns szemléletes geometriai jelentésén kívül konkrét tartalma nincs (pl.: $N = 1$ fizikai mennyiségre). Úgy véljük, hogy a szimmetrizált kovarianciát nem párosították megfelelő geometriai interpretációval, Gibilisco sem adta meg a konkrét jelentését, csupán annyit állítottak, hogy a szimmetrikus kovariancia is térfogatként értelmezhető (lásd: a [18], 1.3 formula).

A 4.1. alfejezetben megmutatjuk, hogy a szimmetrizált kovariancia is kvantum Fisher információból származik, továbbá bevezetjük a szimmetrizált kovarianciák családját.

A 4.2. alfejezetben a határozatlansági relációkkal kapcsolatos bizonyítások kettősségéről lebbentjük le a fátylat azáltal, hogy rávilágítunk arra, hogy a kovarianciák tulajdonképpen metrikák, a határozatlansági relációk pedig a metrikák indexfüggvényei között fennálló rendezésre visszavezethető determináns-egyenlőtlenségek.

A 4.3. alfejezetben bevezetjük a kevert kovariancia fogalmát és segítségével adunk egy eddigieknél jobb alsó becslést a közönséges szimmetrikus kovarianciára.

4.1. Kovarianciák és metrikák kapcsolata

A $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ metrika –értelmezésénél fogva– invariáns a D állapot unitér transzformációival szemben, ezért mindig feltehetjük, hogy a D sűrűségoperátor mátrixa diagonális mátrix és a metrika értékeit elegendő meghatározni az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortér egy alkalmas bázisán.

4.1. Lemma. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,n}$ sajátértékekkel, az $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ vektorrendszer pedig legyen a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokból képzett ortonormált bázis a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren.

Jelölje $e_k \vee e_l$ $(1 \leq k \leq n)$ és $e_k \wedge e_l$ $(1 \leq k < l \leq n)$ azokat az operátorokat, melyeket a 2.1. állítás bizonyítása során vezettünk be.

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(e_k \circledcirc e_l + e_l \circledcirc e_k) \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(e_k \circledcirc e_l - e_l \circledcirc e_k) \tag{4.1}$$

Nyilvánvaló, hogy ezek az operárorok együttesen az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortér egy bázisát adják ki.

Legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ az $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény által generált monoton mertika. Ekkor a fenti bázisvektorok D pontbeli belső szorzatára a következő megállapítások érvényesek.

1. Ha $1 \leq i < j \leq n$ és $1 \leq k < l \leq n$, akkor

   $$\begin{aligned} \langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f} &= \tfrac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2m_f(\lambda_i,\lambda_j)} \\ \langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} &= \tfrac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2m_f(\lambda_i,\lambda_j)} \\ \langle e_i \wedge e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} &= 0 \end{aligned}$$

   teljesül.

2. Ha $1 \leq i < j \leq n$ és $1 \leq k \leq n$, akkor

   $$\langle e_i \wedge e_j, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = \langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = 0$$

   teljesül.

3. Ha $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq k \leq n$, akkor

   $$\langle e_i \vee e_i, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = \frac{\delta_{ik}}{m_f(\lambda_i, \lambda_i)}$$

   teljesül.

A fenti összefüggésekben m_f az f szimmetrikus, normált operátormonoton függvényhez asszociált mátrixközepet jelöli.

Bizonyítás. A lemmát magát nem bizonyítjuk be, csak a bizonyításában kulcsfontosságú szerepet játszó ötletet osztjuk meg az Olvasóval. A bizonyítás egyébként a [21] közleményben szerepel. A Riesz–Dunford-féle operátorkalkulus értelmében ha Γ_1 és Γ_2 a D sűrűségoperátor spektrumát egyszeresen megkerülő folytonos, zárt görbe, akkor fennáll az alábbi összefüggés.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)})(\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,sa})(\forall f \in \mathcal{F}_{(op)}^{(r)})$$
$$\langle A, B\rangle_{D,f} = \mathrm{Tr}\, \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} m_f^{-1}(z_1, z_2) A(z_1 I - D)^{-1} B(z_2 I - D)^{-1} \, \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \tag{4.2}$$

Q.E.D.

Innentől fogva a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-térnek mindig egy olyan $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ bázisát vesszük, melyben a sűrűségoperátor mátrixa diagonális.

4.2. Tétel. Legyenek $A \in \mathcal{M}_{n,sa}$ és $B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ centrált fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,n}$ sajátértékekkel. Legyen $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ az A és B operátorok mátrixa a D operátor sajátvektorokból álló ortonormált bázisban. Ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény, akkor $\langle A, B\rangle_{D,f}$ kiszámítására a következő összefüggés érvényes.

$$\langle A, B\rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} A_l^k B_k^l \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \tag{4.3}$$

Bizonyítás. Az A és B operátorok kifejtett alakja $\mathcal{M}_{n,sa}$ szokásos bázisában az alábbi.

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k^k e_k \vee e_k + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \Re e A_l^k e_k \vee e_l + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \Im m A_l^k e_k \wedge e_l \tag{4.4}$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} B_k^k e_k \vee e_k + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \Re e B_l^k e_k \vee e_l + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \Im m B_l^k e_k \wedge e_l \tag{4.5}$$

A metrika bilinearitását alkalzzuk a előbbi lemmánkban kapott formulákat figyelembe véve.

$$\langle A, B\rangle_{D,f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + 2 \sum_{1\le k<l\le n} \frac{\Re e(A_l^k B_l^k) + \Im m(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1\le k,l\le n \\ k\neq l}} \frac{\Re e(A_l^k B_l^k) + \Im m(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \tag{4.6}$$

Az A és B operátorok önadjungáltak, ezért igaz az alábbi.

$$\begin{aligned}A_l^k B_k^l &= \Re e A_l^k \Re e B_k^l - \Im m A_l^k \Im m B_k^l + i(\Re e A_l^k \Im m B_k^l + \Im m A_l^k \Re e B_k^l) = \\ &= \Re e A_l^k \Re e B_l^k + \Im m A_l^k \Im m B_l^k - \underbrace{i(\Re e A_l^k \Im m B_l^k - \Im m A_l^k \Re e B_l^k)}_{\text{antiszimmetrikus a } k \text{ és } l \text{ indexekben}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

Az m_f függvény változóiban szimmetrikus, ezért az (4.6) formulába a

$$\Re e(A_l^k B_l^k) + \Im m(A_l^k B_l^k) \rightarrowtail A_l^k B_k^l$$

helyettesítést elvégezve a formula igaz marad.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle_{D,f} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1 \le k,l \le n \\ k \ne l}} \frac{\Re e(A_l^k B_l^k) + \Im m(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1 \le k,l \le n \\ k \ne l}} \frac{A_l^k B_k^l}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} = \sum_{k,l=1}^{n} A_l^k B_k^l \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}\end{aligned} \tag{4.8}$$

Q.E.D.

4.3. Következmény. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot.

I. Legyen $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Számítsuk ki az A és B fizikai mennyiségek kvantum f-kovarianciáját (*antiszimmetrizált f-kovarianciáját*) a D állapotban (4.3) formula segítségével.

   Legyen A és B mátrixa $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$. A számításokban Einstein-konvenciót haszálunk, azaz az egy szorzaton belül előforduló azonos alsó és felső indexekre automatikusan összegzünk.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{as}_{D,f}(A,B) &= \frac{f(0)}{2}\langle i[D,A], i[D,B]\rangle_{D,f} = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}[DA-AD]^k_l[DB-BD]^l_k = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}(D^k_iA^i_l - A^k_iD^i_l)(D^l_jB^j_k - B^l_jD^j_k) = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}(A^i_lD^k_iD^l_jB^j_k - A^i_lD^k_iD^j_kB^l_j - A^k_iD^i_lD^l_jB^j_k + A^k_iD^i_lD^j_kB^l_j) = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}(A^k_lB^l_k\lambda_k\lambda_l - A^k_lB^l_k(\lambda_k)^2 - A^k_lB^l_k(\lambda_l)^2 + A^k_lB^l_k\lambda_k\lambda_l) = \\
&= \frac{f(0)(\lambda_k+\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}A^k_lB^l_k \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

II. Ha $X, Y \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)$ operátorok, akkor $\{X,Y\} := XY + YX$. Legyen $f \in \mathcal{F}^{(r)}_{op}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Definiáljuk az A, B fizikai mennyiségek *szimmetrizált f-kovarianciáját* a D állapotban az

$$\mathrm{Cov}^{s}_{D,f}(A,B) := \frac{f(0)}{2}\langle \{D,A\}, \{D,B\}\rangle_{D,f} \qquad (4.10)$$

formulával. Most pedig számítsuk ki ténylegesen az A, B fizikai mennyiségek *szimmetrizált f-kovarianciáját* az (4.3) formula segítségével. Legyen A és B mátrixa $[A^k_l]_{k,l=1,\ldots,n}$ és $[B^k_l]_{k,l=1,\ldots,n}$. A számításokban itt is az Einstein-konvenciót haszáljuk.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{s}_{D,f}(A,B) &= \frac{f(0)}{2}\langle \{D,A\}, \{D,B\}\rangle_{D,f} = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}[AD+DA]^k_l[BD+DB]^l_k = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}(A^k_iD^i_l + D^k_iA^i_l)(B^l_jD^j_k + D^l_jB^j_k) = \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}\cdot \\
&\cdot \left(A^k_iD^i_lD^j_kB^l_j + A^k_iD^i_lD^l_jB^j_k + D^k_iA^i_lB^l_jD^j_k + D^k_iA^i_lD^l_jB^j_k\right) = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}\left(A^k_lB^l_k\lambda_l\lambda_k + A^k_lB^l_k(\lambda_l)^2 + A^k_lB^l_k(\lambda_k)^2 + A^k_lB^l_k\lambda_k\lambda_l\right) = \\
&= \frac{f(0)(\lambda_k+\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}A^k_lB^l_k \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy mit ad vissza a kapott formula az

$$f = \frac{1+x}{2}$$

szimmetrikus, normált operátormonoton függvényre.

$$\mathrm{Cov}^s_{D,f}(A,B) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}(\lambda_k+\lambda_l)^2}{2\frac{\lambda_k+\lambda_l}{2}} A^k_l B^l_k = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\lambda_k+\lambda_l}{2} A^k_l B^l_k \tag{4.12}$$

Amit kaptunk az pontosan megegyezik az A és B fizikai mennyiségek közönséges szimmetrizált kovarianciájával (lásd: [20]).

4.4. Megjegyzés. Az (4.3) formulából egyébként visszakaptuk azt is, hogy a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ metrika pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha $f(0) \neq 0$.

4.2. Az általános határozatlansági reláció

Az általunk tanulmányozott határozatlansági relációkkal kapcsolatos bizonyításokban a [20, 18, 19] két állandó motívum bukkant fel. Az egyik az, hogy bizonyítanak az alsó becsléshez felhasznált kovariancia család tagjai közt valamilyen rendezést, ami kapcsolatban áll a kovariancia család tagjait indexelő függvények közti rendezéssel, a másik pedig az, hogy belátják azt, hogy a közönséges szimmetrizált kovariancia mindig nagyobb a becsléshez használt kovarianciánál.

Az előző alfejezetből megtudhattuk, hogy a közönséges szimmetrizált kovariancia csak egy példánya a szimmetrizált f-kovarianciák népes családjának, melynek tagjai a kvantum kovarianciákhoz hasonlóan monoton metrikákból származnak.

Ebben az alfejezetben arra világítunk rá, hogy a kovariancia egyben metrika is és a határozatlansági relációk mögött – bizonyos külső formák belső szorzatai megfeleltethető – determinánsok között fennálló egyenlőtlenségek bújnak meg, melyek a metrikákat indexelő függvények közti rendezésekre vezethetők vissza.

4.5. Állítás. Legyen $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sima függvény, mely változóiban szimmetrikus, $D \in \mathcal{M}^{(1)}_{n,sa}$ pedig legyen egy állapot $\{\lambda_k\}^n_{k=1}$ sajátértékekkel. Az A és B operárorok mátrixai a szokásos bázisunkban legyen $[A^k_l]_{k,l=1\dots,n}$ és $[B^l_k]_{k,l=1\dots,n}$. Ekkor a

$$(D,A,B) \mapsto \mathfrak{Cov}_{D,g}(A,B) := \sum_{k,l=1}^{n} A^k_l B^l_k g(\lambda_k,\lambda_l) \tag{4.13}$$

leképezés egy Riemann-metrikát ad meg.

Bizonyítás. Triviális. **Q.E.D.**

4.6. Lemma. Legyen A és B valós, szimmetrikus $n \times n$-es pozitív definit mátrixok. Ekkor a $t \in [0,1]$ paraméter tetszőleges értéke mellett igaz az

$$\det\left((1-t)A + tB\right)^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\det(A)^{\frac{1}{n}} + t\det(B)^{\frac{1}{n}} \tag{4.14}$$

általánosított Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A bizonyítás a [22] és a [23] cikkekben megtalálható. **Q.E.D.**

4.7. Tétel. Legyenek $g_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ és $g_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus függvények, melyekre

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \quad g_1(x,y) \geq g_2(x,y) \tag{4.15}$$

teljesül. Fizikai mennyiségek egy véges $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ rendszerére definiáljuk az alábbi mátrixot.

$$[\mathfrak{Cov}_{D,g_k}]^i_j = \mathfrak{Cov}_{D,g_k}(A_i, A_j) \quad k = 1,2 \tag{4.16}$$

I. Ilyen feltételek mellett igaz a következő egyenlőtlenség.

$$\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + R(D, g_1, g_2, N) \tag{4.17}$$

Az $R(D, g_1, g_2, N)$ járulékos tagot a következőképpen lehet megadni.

$$R(D, g_1, g_2, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1})]^{\frac{k}{N}} [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{N-k}{N}} \tag{4.18}$$

II. Ha $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\, g_1(x,x) = g_2(x,x)$, akkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek.

   i. $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$

   ii. Az $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek lineárisan összefüggő rendszert alkotnak az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben.

Bizonyítás. Ennek a tételnek a bizonyítására használható a 3.4. tétel [20] cikkben szereplő bizonyítása, emiatt a bizonyításunk pontosan a [20] cikkeben szereplő tétel bizonyítását követi.

Először megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix pozitív definit. Legyen $x \in \mathbb{C}^N$ és definiáljuk a

$$[C] := \sum_{k=1}^{N} x_k [A_k] \tag{4.19}$$

mátrixot.

$$\begin{aligned}
\langle x, \mathfrak{Cov}_{D,g_1} x \rangle &= \sum_{K,L=1}^{N} \overline{x_K} x_L \mathfrak{Cov}_{D,g_1}(A_K, A_L) = \\
&= \sum_{K,L=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{n} \overline{x_K} x_L g_1(\lambda_k, \lambda_l) [A_K]_l^k [A_L]_k^l = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} g_1(\lambda_k, \lambda_l) \overline{\left(\sum_{K=1}^{N} x_K [A_K]_l^k \right)} \left(\sum_{L=1}^{N} x_L [A_L]_k^l \right) = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} g_1(\lambda_k, \lambda_l) \left| [C]_l^k \right|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Nullát pontosan akkor kapunk, ha a fizikai mennyiségek mátrixai lineárisan összefüggnek. Ebben az esetben a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix nem pozizív definit, hanem csak pozitív szemidefinit, azaz van nulla sajátértéke, amiből következik, hogy determinánsa zérus.

Az előbbi gondolatmenet megismételhető a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}$ mátrixra is. Alkalmazva a 4.14 Brunn-Minkowski-egyenlőtlenséget $t = \frac{1}{2}$-re felírva az alábbit kapjuk.

$$\begin{aligned}
&[\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2} + (\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}))]^{\frac{1}{N}} \geq \\
&\qquad \geq [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{1}{N}} + [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{1}{N}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mindkét oldalt N-edik hatványra emelve kapjuk a tétel első részét. A második részhez a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix pozitív definitségéről, illetve pozitív szemidefinitségéről szóló előbbi megjegyzésünket használjuk fel.

Ha az $\{A_k\}_{k=1,\ldots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek mátrixai lineárisan összefüggők, akkor az imént említett megjegyzés értelmében $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = 0$ és $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) = 0$, vagyis $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$.

Ha $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$, akkor az előbb bizonyított egyenlőtlenségből

$$0 \leq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \tag{4.22}$$

következik, amit a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}$ mátrix pozitív szemidefinitségéből következő

$$0 \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \tag{4.23}$$

egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk az alábbit.

$$0 = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \tag{4.24}$$

Ez pedig maga után vonja az $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek lineáris összefüggőségét. **Q.E.D.**

4.8. Tétel. Az előző tétel feltételei mellett az alábbi egyenlőtlenség áll fenn.

$$\begin{aligned}&\det(t\mathfrak{Cov}_{D,g_1} + (1-2t)(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})) \geq \\ &\quad \geq (1-t)^N \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + t^N \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + R(D, g_1, g_2, N)\end{aligned} \tag{4.25}$$

Az $R(D, g_1, g_2, N, t)$ járulékos tagot ebben az esetben a következőképpen lehet megadni.

$$\begin{aligned}&R(D, g_1, g_2, N, t) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t)\sqrt[N]{\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1})}\right)^k \left(t\sqrt[N]{\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})}\right)^{N-k}\end{aligned} \tag{4.26}$$

Bizonyítás. Annyi a különbség az előző tétel bizonyításához képest, hogy az (4.14) általánosított Brunn–Minkowski-egyenlőtlenséget kell felhasználni. Ez a tétel a $t = \frac{1}{2}$ paraméter választással az előző tételt adja vissza. **Q.E.D.**

4.3. Kevert kovarianciák

4.9. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(n)}$ pedig egy szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Az A és B fizikai mennyiségek *kevert f-kovarianciáját* a D állapotban a

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{mix}(A, B) := -\frac{if(0)}{2} \langle [AD + iDA], [BD + iDB] \rangle_{D,f} \tag{4.27}$$

kifejezés adja meg.

A 4.3. következményben leírt számításokat követve meghatározhatjuk a kevert kovarianciát explicit módon. A számításokat nem részletezzük, csak az eredményt adjuk meg.

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{mix}(A,B) := \sum_{k,l=1}^{n} A_l^k B_k^l \frac{f(0)(\lambda_k^2+\lambda_l^2)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} \tag{4.28}$$

Az Olvasónak szemet szúrhat, hogy a kevert kovariancia egyszerűen csak a szimmetrizált és antiszimmetrizált kovarianciák számtani közepe s mint ilyen csupán triviális becslést ad. A becslés ereje abban áll, hogy nem az

$$f(x) = \frac{1+x}{2}$$

függvényt választjuk a kevert kovariancia indexének. A 4.7 tétel szerint akkor kapjuk közönséges szimmetrizált kovariancia alsó becslését, ha az f függvény választásánál figyelembe vesszük a

$$(\forall x,y \in [0,1]) \quad \frac{f(0)(x^2+y^2)}{2m_f(x,y)} \le \frac{x+y}{2} \tag{4.29}$$

feltételt. A (4.29) feltétel az f függvényre a következőt adja.

$$(\forall x \in [0,1]) \quad \frac{1+x^2}{1+x} \le \frac{f(x)}{f(0)} \tag{4.30}$$

Ezt a feltételt sok szimmetrikus, normált operátormonoton függvény teljesíti. Teljesíti például a Wigner-Yanase-Dyson metrikát származtatható függvény is. Nyilvánvaló, hogy adott f függvény mellett ez a kvantumkovarianciánál jobb becslést ad. Becslésünk hátrány, hogy csak a (4.3) feltételt teljesítő függvények jöhetnek szóba.

5. Kitekintés

Most, hogy a kivonatban kitűzött programunkat teljes egészében végrehajtottuk mutatunk néhány utat, amelyeken későbbi kutatásainkat szeretnénk vinni.

5.1. Határozatlansági relációk asszimptotikája

A valószínűségszámítás, melyet a véges dimenziós mátrixokkal űzünk a klasszikus valószínűségszámítástól a kommutativitás hiányában tér el. Klasszikus valószínűségszámítás esetén a határozatlansági relációk jobb oldalán semmit mondó mennyiség, azonosan nulla áll.

Az antiszimmetrizált kovariancia a kommutátorok alkalmazása miatt az állapottal nem felcserélhető részeit hagyja csak meg az argumentumában szereplő fizikai mennyiségeknek. Logikus tehát azt feltételezni, hogy az antiszimmetrizált f-kovariancia az f operátormonoton függvényben és az állapotban egyenletesen legjobb becslése a közönséges szimmetrizált kovarianciának. Hiszen az antiszimmetrizált kovariancia épp a nemkommutatív, kvantumszerű részt ragadja ki.

A határozatlansági relációk bal oldala ezzel szemben éppen a szimmetrikus részt emeli ki. A szimmetrikus rész dimenziója a tér dimenziójához képest kevésbé gyorsan nő, mint az antiszimmetrikus részé. Érdekes lenne megvizsgálni, hogy a határozatlansági relációk jobb és bal oldala alkalmas normáló faktorral osztva hogyan viszonyul egymáshoz, amint a Hilbert-tér dimenziójával a végtelenhez tartunk.

5.2. A komplex kovariancia

Ha rátekintünk a különféle (szimmetrizált, antiszimmetrizált, kevert) kovarianciákat megadó kifejezésekre, akkor természetes általánosításként adódik a következő.

5.1. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(n)}$ pedig egy szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Az A és B fizikai mennyiségek *komplex f-kovarianciáját* a D állapotban a $\theta \in [0, 2\pi]$ paraméter érték mellett a

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{\mathbb{C}}(A,B) := -\frac{f(0)e^{i\theta}}{2}\left\langle [AD + e^{i\theta}DA], [BD + e^{i\theta}DB]\right\rangle_{D,f} \tag{5.1}$$

kifejezéssel definiáljuk.

A komplex kovariancia – mint ahogyan azt az elnevezés is sugallja – a megszokottól eltérően nem feltétlenül valós értékű. Felvehet komplex értéket is. Beszélhetünk tehát a komplex kovariancia fázisáról és amplitudójáról. Érdemes lenne vizsgálni, hogy a komplex kovarianciából különböző valós értékű függvények segítségével képzett valós mennyiségek milyen határozatlansági relációknak tesznek eleget. Be lehetne csempészni a θ paraméterbe is egy állapotfüggést. Intuitívan adódik a kép, hogy ez több szabadsági fokot eredményez, ezáltal javulhatnak a becsléseink.

Hivatkozások

[1] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198, 1927.

[2] Kennard, E. H., Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, *Zeitschrift für Physik* **44**, 326-352, 1927.

[3] Robertson, H. P., The uncertainty principle, *Phys. Rev.* **34**, 573-574, 1929.

[4] L. D. Landau, E. M. *Lifsic. Elméleti fizika III. - Kvantummechanika.* Tankönyvkiadó, Budapest. ISBN 963 17 3259 2 (1978)

[5] E. Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, *Bulgar. J. Phys.* **26**, 193-203, 2000, Translation of *Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect.* **19**, 296-303, 1930.

[6] Robertson, H. P., An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation, *Phys. Rev.* **46**, 794-801, 1934.

[7] Szenthe János, *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[8] Kubo, F. and Ando, T., Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246(3)**, 205-224, 1979/80.

[9] D. Petz and Cs. Sudár, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *J. Math. Phys.*, **37**, 2662-2663, 1996.

[10] F. Hiai, D. Petz and G. Toth. Curvature in the geometry of canonical correlation. *Studia Scientiarium Mathematicarum Hungarica* **32**, 235-249 (1996).

[11] D. Petz. Geometry of canonical correlation on the state space of quantum system. *J. Math. Phys.* **35**, 780-795 (1994).

[12] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer.

[13] S. Luo and Z. Zhang, An informational characterization of Schrödinger's uncertainty relations. *J. Statist. Phys.* **114**, 1557-1576, 2004.

[14] S. Luo and Q. Zhang, On skew information, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50**, 1778-1782, 2004.

[15] S. Luo and Q. Zhang, Correction to „On skew information" . *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4432, 2005.

[16] H. Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, *Internat. J. Math.* **16**, 629-645, 2005.

[17] K. Yanagi, S. Furuichi and K. Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation. *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4401-4404, 2005.

[18] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle. arXiv:math-ph/0706.0791v1, 2007.

[19] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. Uncertainty principle and quantum Fisher information II. arXiv:math-ph/0701062v3, 2007.

[20] Attila Andai. Uncertainty principle with quantum Fisher information. arXiv:math-ph/0707.1147v1, 2007.

[21] P.W. Michor, D. Petz, és A. Andai, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(2):199-212, 2000.

[22] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

[23] W. J. Firey, Some application of mean of convex bodies, *Pacific J. Math.* **14**, 53-60, 1964.