TDK-dolgozat

Holló László

A Galilei-csoportok projektív ábrázolásai

Témavezető Dr. Andai Attila
Egyetemi adjunktus
BME Matematika Intézet
Analízis Tanszék

2010

Tartalomjegyzék

Előszó

Köszönettel tartozom a TDK-dolgozat megírásában nyújtott ösztönző segítségért, valamint a dolgozat átnézéséért Andai Attilának.

Bevezetés

A kvantummechanika első axiómája [1] kimondja, hogy egy fizikai állapotnak egyértelműen megfelel egy absztrakt Hilbert-tér projektor-hálójának egy eleme, második axiómája pedig kimondja, hogy minden fizikai mennyiség megfeleltethető egy ezen a projektor-hálón ható önadjungált operátornak. Amennyiben meg akarjuk tudni, hogy a fizikai téridő egy adott matematikai modelljében egy elemi részecske milyen tulajdonságokkal rendelkezik, ábrázolnunk kell a téridő-modell szimmetriacsoportját egy Hilbert-tér projektor-hálóján. Ezt az eljárást nevezzük projektív ábrázolásnak.

A TDK-dolgozatomban a téridő nemrelativisztikus modeljét vizsgálom, azaz a téridő invariáns a Galilei-transzformációk alatt. Ezen matematikai model szimmetriacsoportját nevezzük Galilei-csoportnak. A TDK-dolgozatomban azokat az eseteket fogom vizsgálni, amikor a téridő idődimenziója egy, és a térdimenziója pedig legalább négy.

A huszadik század eleje óta ismert tény, hogy a három térdimenziós nemrelativisztikus kvantummechanikában minden elemi részecskét két paraméterrel jellemezhetünk, az egyik a részecske tömege, ami egy pozitív valós szám, a másik pedig a részecske spinje, ami egy félegész szám. Sokáig azt gondoltuk, hogy a két térdimenziós eset a három térdimenziós eset megszorítása kétdimenziós mozgásra, tehát minden elemi részecskét csak a tömeg és a spin jellemez. Grigore 1996-ban megjelent cikkében megadta a két térdimenziós Galilei-csoport irreducibilis projektív ábrázolásait, amiből kiderült, hogy egy elemi részecskének van egy harmadik jellemző paramétere, egy saját belső mágneses fluxusa, amit azóta kísérletileg is igazoltak.

A négy és több térdimenziós eset azonban azóta is nyitott kérdés maradt. Miután kiderült, hogy a két és a három térdimenziós eset alapjaiban különbözik, egyáltalán semmi garancia nincs arra nézve, hogy magasabb térdimenziók hasonló viselkedést mutassanak, mint a három térdimenziós eset. A TDK-dolgozatomban megmutatom, hogy a három és a magasabb térdimenziós esetek ugyanarra a végeredményre vezetnek, viszont némileg eltérő módon.

A dolgozatomban tehát meg fogom adni a négy és több térdimenziós Galilei csoport összes folytonos irreducibilis projektív ábrázolását. Ennek érdekében az 1. felyezetben áttekintünk néhány fontosabb, és a dolgozatomban használt ábrázoláselméleti fogalmat és tételt [2], [4] és [5] alapján. Ennek a fejezetnek egyik legfontosabb konklúziója az lesz, hogy a csoport projektív ábrázolásai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a csoport Lie-algebráján értelmezett úgynevezett kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályainak. Továbbá, ha már ismerjük a kommutátor-kociklusok kohomológia-osztályait, akkor a projektív ábrázolás megkapható a Galilei-csoport centrális kibővítésének unitér ábrázolásaiból. Az unitér ábrázolások pedig Mackey tétele értelmében mind megkaphatóak az inukált ábrázolások módszerével.

[1] A Neumann-féle axima-renszert tekintjk

A 3. fejezetben [2] alapján bemutatásra kerül maga az ábrázolandó csoport, a nemrelativisztikus téridő szimmetria-csoportja.

A 4. fejezet a vízválasztó a három eset, a két-, a három-, illetve a magasabb térdimenziós esetek között. Ebben a fejezetben keresem meg a kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályait, amik indexelik az irreducibilis projektív ábrázolásokat, tehát indexelik a lehetséges elemi részecskéket is. Három térdimenzió esetén [2] -ben levezetésre kerül, hogy minden kohomológia-osztály egyetlen μ pozitív valós számmmal indexelhető és megmutatható, hogy ez maga a tömeg. A spin pedig a csoport cetrális kibővítésének unitér ábrázázolása során jön ki. Két térdimenzió esetén [3] alapján azonban már nem egy, hanem három számmal indexelhetők a kommutátor-kociklusok, és ezek lesznek a tömeg, egy saját impulzusmomentum és egy belső mágneses fluxus. Tehát két- és három térdimenzió esetén a spin eredete is különbözik. A négy és több térdimenzós esetben eltérő számolási módszerrel kapok hasonló végeredményt mint három térdimenzióban, a kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályait egyelten μ paraméter indexeli. Később megmutatom, hogy ez maga a tömeg.

A 5. felyezetben először elkészítem a Galilei csoport centrális kibővítését, majd megadom ennek az összes irreducibilis ábrázolását az impulzustérben. Miután kissé meglepő módon a három és a több térdimenziós esetben ugyanazt kaptam a kommutátor-kociklusok kohomológia-osztályaira, így ebben a fejezetben már nem meglepő, hogy a három és a több térdimenziós esetben a kibővített csoport unitér ábrázolásai hasonlóak. Az eltértés a két eset között a forgáscsoport ábrázolása, míg három térdimenzió esetén az $SU(2)$ csoport ábrázolásaiból származik a spin, addig magasabb dimenziókban az $SO(n)$ fedőcsoportjának ábrázolásaira lenne szükség. A nulla-spinű ábrázolás esetén megadom a valós térbeli projektív ábrázolásait a Galilei-csoportoknak.

A 6. felyezetben az eredmények fizikai konklúzióit mutatom meg. Lényegében három kiemelkedően fontos fizika eredményt kapunk meg. Az első fontos eredmény az, hogy a Galilei-csoport összes irreducibilis folytonos projektív ábrázolását visszavezetjük egy kompakt Lie-csoport, az $SO(n)$ fedőcsoportjának unitér ábrázolásaira, ami minden n esetén ismert. A fedőcsoport trivilis ábrázolása esetén meg is adtuk a valós térbeli ábrázolásokat. Második fontos eredmény az, hogy a négy és több térdimenziós nemrelativisztikus kvantummechanikában minden elemi részecske két paraméterrel jellemezhető, az egyik egy poztív valós szám, a tömeg, a másik pedig az $SO(n)$ fedőcsoportjának ábrázolásából adódó kvantumszám. A harmadik fontos eredmény pedig az, hogy csupán a kvantummechanika két axiómáját kihasználva a téridő szimmetriájából levezetjük a Schrödinger-egyenletet, azaz hogy egy fizikai állapot időfejlődéséért a teljes energia felelős.

1. Csoportok ábrázolása, projektív ábrázolás

1.1. Definíció. Legyen G egy csoport. Azt mondjuk, hogy γ a G csoport ábrázolása egy X halmazon, ha $\gamma\colon G \to S_X$ csoporthomomorfizmus, ahol S_X jelöli az X halmaz önmagára történő bijektív transzformációinak csoportját.

Legyen γ ábrázolása a G csoportnak az X halmazon. Ekkor

- az X halmazt a γ *ábrázolás terének* nevezzük;
- minden $g \in G$ esetén a $\gamma(s)\colon X \to X$ bijekciót az s csoportelem *ábrázoló operátorának* nevezzük.

1.2. Definíció.

- Azt mondjuk, hogy γ *topologikus ábrázolása* a G csoportnak az X topologikus téren, ha minden $s \in G$ esetén a $\gamma(s)\colon X \to X$ ábrázoló operátor folytonos.
- Azt mondjuk, hogy V *lineáris ábrázolása* a G csoportnak az E vektortéren, ha minden $s \in G$ esetén a $V(s)\colon E \to E$ ábrázoló operátor lineáris.
- Azt mondjuk, hogy V *unitér ábrázolása* a G csoportnak a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, és V olyan ábrázolása a G csoportnak a $\mathcal{H}$ halmazon, amelyre minden $s \in G$ esetén $V(s)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ábrázoló operátor lineáris izometria. Ekkor $V(s)$ unitér.

1.3. Definíció. Legyen V_1 illetve V_2 unitér ábrázolása a G csoportnak a $\mathcal{H}_1$ illetve $\mathcal{H}_2$ Hilbet-téren. Ekkor

$$C(V_1; V_2) := \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2) \mid \forall s \in G : V_2(s) \circ u = u \circ V_1(s)\}$$

halmazt a V_1 *és* V_2 *ábrázolásokat összekötő folytonos lineáris operátorok halmazának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a V_1 és V_2 unitér ábrázolások *unitér ekvivalensek*, ha $C(V_1; V_2)$ tartalmaz unitér operátort.

1.4. Definíció. Ha γ ábrázolása a G csoportnak az X halmazon, akkor egy $H \subseteq X$ halmazt γ-*invariánsnak* nevezünk, ha minden $s \in G$ esetén $\gamma(s)\langle H\rangle \subseteq H$ teljesül.

1.5. Definíció. Legyen V unitér ábrázolása a G csoportnak a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Azt mondjuk, hogy

- V *algebrailag irreducibilis*, ha $\mathcal{H} \neq \{0\}$ és $C(V;V) = \mathbb{C} \cdot id_{\mathcal{H}}$, vagyis csak azok a $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ folytonos lineáris operátorok kötik össze V-t önmagával, amelyek az identikus operátor számszorosai;

- V *geometriailag irreducibilis*, ha $\mathcal{H} \neq \{0\}$ és minden $F \subseteq \mathcal{H}$ zárt V-invariáns lineáris altérre $F = \{0\}$ vagy $F = \mathcal{H}$ teljesül.

1.1. Tétel. *A V unitér ábrázolása a G csoportnak a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, pontosan akkor algebrailag irreducibilis, ha geometriailag irreducibilis.*

1.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér, és $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ projekcióinak halmaza. Ekkor a projekciók és a zárt alterek között megadható egy α egy-egyértelmű megfeleltetés. Minden $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ esetén $\alpha\colon P \mapsto Ran\,P$, és egy zárt altérhez α^{-1} az erre az altérre vetítő projekciót rendeli hozzá. A $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ halmazon értelmezzük az $\wedge$ és a $\vee$ műveletet a következő képpen. Minden $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ esetén*

$$\begin{aligned} P \wedge Q &= \alpha^{-1}(Ran\,P \cap Ran\,Q), \\ P \vee Q &= \alpha^{-1}(\overline{Ran\,P \cup Ran\,Q}). \end{aligned}$$

Az $\wedge$ és $\vee$ művelettel ellátva $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ háló lesz.

1.6. Definíció. Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ projektorainak halmazát az $\wedge$ és a $\vee$ művelettel ellátotva a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér projektorhálójának nevezzük.

1.7. Definíció. Legyen G csoport, és e az egységeleme. Legyen $\mathcal{H}$ egy kettőnél nagyobb dimenziós Hilbert tér, és jelölje $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ennek projektorhálóját. A G csoport *projektív ábrázolása* egy $A\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$ csoporthomomorfizmus, melyre minden $g, h \in G$ esetén

$$A_g \circ A_h = A_{gh}. \tag{1.1}$$

1.3. Tétel. *(Wigner) Ha $A \in Aut(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$ és a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér dimenziója kettőnél nagyobb, akkor létezik egy egységnyi abszolútértékű szorzó erejéig meghatározott U*

unitér vagy antiunitér operátor, ami A-t generálja. Ha A a G csoport projektív ábrázolása, akkor minden $g \in G$ csoportelemhez létezik egy egységnyi abszolútértékú szorzó erejéig meghatározott U_g unitér vagy antiunitér operátor, melyre

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1} \tag{1.2}$$

teljesül minden $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ esetén. Ha G összefüggő Lie-csoport, akkor minden U_g unitér operátor.

Jelölje $\mathbb{T}$ az egységnyi abszolútértékű számok halmazát.

Legyen $A\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$ a G csoport egy projektív ábrázolása egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, és legyen $U\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ az A ábrázolást generáló unitér vagy antiunitér operátor. Legyen $U_e := I$, így a csoportszorzás (1.1) alapján minden $g, h \in G$ esetén

$$U_g U_h = \omega(g,h) U_{gh}, \tag{1.3}$$

ahol $\omega\colon G \times G \to \mathbb{T}$. Ekkor (1.2) alapján az asszociativitást felhasználva kapjuk az alábbi relációt minden $f, g, h \in G$ esetén.

$$\omega(e,e) = 1 \tag{1.4}$$

$$\omega(g,h)\omega(gh,f) = \omega(h,f)\omega(g,hf) \tag{1.5}$$

1.8. Definíció. Legyen G csoport. Egy $\omega\colon G \times G \to \mathbb{T}$ függvényt, ami rendelkezik az (1.4) és az (1.5) tulajdonsággal *unitér kociklusnak* nevezünk. Két unitér kociklus ω és ω' *kohomológ egymással*, ha létezik egy olyan $\tau : G \to \mathbb{T}$ függvény, melyre minden $g, h \in G$ esetén

$$\omega'(g,h) = \omega(g,h)\frac{\tau(g)\tau(h)}{\tau(gh)}.$$

Két unitér kociklus *gyengén kohomológ*, ha ω és ω' vagy $\overline{\omega}$ és ω' kohomológ, ahol a $\overline{\omega}$ jelöli az ω szám komplex konjugáltját.

1.4. Tétel. *A G csoport unitér kociklusainak halmazán a (gyenge) kohomológia ekvivalenciarelációt határoz meg.*

1.9. Definíció. A G csoport unitér kociklusainak halmazán az egymással (gyengén) kohomológ unitér kociklusok ekvivalenvia-osztályainak összességét (gyenge) *kohomológia-osztálynak* hívjuk.

Megmutatható, hogy ha G Lie-csoport, akkor minden unitér kociklus kohomológ egy olyan ω unitér kociklussal, amelyre $\omega(g, g^{-1}) = 1$ teljesül minden $g \in G$ esetén, valamint $\omega(g, h) = 1$ ha g és h ugyanannak az egyparaméteres részcsoportnak az egységelem egy alkalmas környezetébe eső elemei. Az ilyen unitér kociklust lokálisan kanonikus unitér kociklusnak nevezzük.

1.10. Definíció. Az (U, ω) párt a G csoport $\mathcal{H}$ Hilbert-téren megvalósított *sugárábrázolásának* hívjuk, ha ω a G unitér kociklusa, és U a csoporton értelmezett olyan leképezés, mely minden $g \in G$ elemhez $\mathcal{H}$ egy U_g unitér operátorát rendeli úgy, hogy $U_e = I$ és (1.3) teljesülnek.

1.11. Definíció. Egy G csoport (U, ω) sugárábrázolása *hű*, ha $g \neq h$ esetén U_g nem számszorosa U_h-nak; *irreducibilis*, ha nincs nemtriviális altér, amely minden U_g-re invariáns. Az (U, ω) és (U', ω') sugárábrázolás *ekvivalens*, ha létezik olyan V unitér vagy antiunitér leképezés és $\tau \colon G \to \mathbb{T}$ úgy, hogy a

$$VU_g = \tau(g)U'_gV$$

összefüggés teljesül, azaz következésképpen ω és ω' gyengén kohomológ.

1.12. Definíció. Egy G Lie-csoport (U, ω) sugárábrázolását *folytonosnak* nevezzük, ha a ω analitikus az egységelem egy környezetében, és a $g \mapsto U_g$ hozzárendelés erősen folytonos.

Láttuk tehát, hogy egy sugárábrázolás egyértelműen meghatároz egy projektív ábrázolást, egy projetív ábrázolást viszont több sugárábrázolás is adhat. Viszont két sugárábrázolás akkor vezet ugyanarra a projektív ábrázolásra, ha ekvivalensek, vagyis, ha ω és ω' gyengén kohomológ. A G csoport minden projektív ábrázolása egyértelműen meghatároz egy őt generáló unitér ábrázolást és az ehhez tartozó unitér kociklusok egy gyenge kohomológia-osztályát, valamint minden unitér ábrázolás és a hozzá tartozó unitér kociklusok egy gyenge kohomológiaosztálya egyértelműen meghatározza a G csoport egy projektív ábrázolását.

A kvantummechanikában szükség van egy adott csoport összes gyengén irreducibilis folytonos projektív ábrázolására. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy ω lokálisan analitikus. Mivel a projektív ábrázolások szempontjából csak az unitér kociklusok gyenge kohomológiaosztályai lényegesek, így feltehetjük, hogy ω az egységelem környezetében analitikus, lokálisan kanonikus unitér kociklus.

1.13. Definíció. Legyen G összefüggő Lie-csoport $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája, és $[\cdot,\cdot]$ a kommutátor. Egy $\kappa\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ bilineáris, antiszimmetrikus zárt $(\kappa([a,b],c)+\kappa([c,a],b)+\kappa([b,c],a)=0)$ függvényt a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra *kommutátor kociklusának* nevezzük. A κ és κ' kommutátor kociklus *kohomológ egymással*, ha létezik olyan $\eta:\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ lineáris függvény, amelyre minden $a,b\in\mathfrak{g}$ esetén

$$\kappa'(a,b)=\kappa(a,b)+\eta([a,b]).$$

Két kommutátor kociklus *gyengén kohomológ*, ha κ és κ' vagy $-\kappa$ és κ' kohomológ.

1.5. Tétel. *Legyen G egy Lie-csoport, és jelölje $\mathfrak{g}$ a csoport Lie algebráját. Minden $a\in\mathfrak{g}$ elem esetén létezik egy $\varepsilon>0$ paraméter, és egy ehhez egy egyértelműen meghatározott $\rho_a\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to G$ folytonos leképezés, mely egyparaméteres részcsoportot határoz meg, és melyre $\dot{\rho_a}(0)=a$ teljesül. A jelölések egyszerűsítése végett, alkalmasan kicsi $t\in\mathbb{R}$ paraméter esetén a továbbikban a $\rho_a(t)$ értékét a $[ta]$ szimbólummal jelöljük.*

1.6. Tétel. *Egy-egyértelmű megfeleltetés létezik egy G Lie-csoport lokális kociklusainak (gyenge) kohomolgia-osztályai és a csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebrájának kommutátor kociklusainak (gyenge) kohomológiaosztályai között. A megfeleltetést a*

$$\kappa(a,b)=-i\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\log\Big(\omega([ta][tb],[-ta][-tb])\omega([ta],[tb])\omega([-ta],[-tb])\Big) \tag{1.6}$$

összefüggés adja meg, ahol $a,b\in\mathfrak{g}$ és a $t\mapsto[ta]$ a G-beli a irányú egyparaméteres részcsoportot jelöli.

Tehát a G csoport minden projektív ábrázolása egyértelműen meghatároz egy őt generáló unitér ábrázolást és az ehhez tartozó kommutátor kociklusok egy gyenge kohomológia-osztályát, valamint minden unitér ábrázolás és a hozzá tartozó kommutátor kociklusok egy gyenge kohomológiaosztálya egyértelműen meghatározza a G csoport egy projektív ábrázolását.

1.14. Definíció. Legyen G csoport, és ω a G unitér kociklusa. Ekkor legyen G_ω az a csoport, melynek alaphalmaza $G\times\mathbb{T}$, és a csoportszorzás

$$(g,\lambda)(h,\mu):=(gh,\omega(g,h)\lambda\mu). \tag{1.7}$$

1.7. Tétel. *Legyen (U,ω) a G Lie-csoport sugárábrázolása. Ekkor az*

$$U^{\omega}_{(g,\lambda)} := \lambda^{-1}U_g \qquad (g,\lambda) \in G \times \mathbb{T}$$

formulával meghatározott U^{ω} a G_{ω} csoport unitér ábrázolását adja. Fordítva, ha $(g,\lambda) \mapsto V_{(g,\lambda)}$ a G_{ω} csoport unitér ábrázolása, amelyre igaz, hogy minden $\lambda \in \mathbb{T}$ elemre

$$V_{e,\lambda} = \lambda^{-1}\, id \tag{1.8}$$

teljesül, akkor bevezetve az $U_g := V_{g,1}$ jelölést az $U : g \mapsto U_g$ formulával meghatározott leképezéssel (U,ω) a G csoport sugárábrázolása. Továbbá

$$V_{(g,\lambda)} = \lambda^{-1}U_g \tag{1.9}$$

teljesül minden $g \in G$ és minden $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén.

1.8. Tétel. *Egy G csoport $\tilde{G}$ univerzális fedőcsoportjának folytonos projektív ábrázolásai között megtaláljuk a G csoport összes folytonos projektív ábrázolását.*

Tehát elegendő a csoport helyett annak univerzális fedőcsoportjának projektív ábrázolásait meghatároznunk, és kiválogatni a csoport projektív ábrázolásait.

A 1.7 tétel értelmében pedig, amennyiben ismerjük egy G csoport unitér kociklusait, akkor G sugárábrázolása visszavezethető egy másik csoport unitér ábrázolására, ami egy egyszerűbb feladat. Ennek elméletével foglalkozunk a következő fejezetben.

2. Unitér ábrázolások

2.1. Csoporthatás

2.1. Definíció. Legyen S_M az M halmaz bijektív transzformációinak a csoportja és G egy tetszőleges csoport. A *G csoport hatása* az M halmazon egy $T\colon G \to S_M;\, g \mapsto T_g$ leképezés amely rendelkezik a

$$\begin{aligned} T_e x &= x \\ T_a T_b x &= T_{ab} x \end{aligned}$$

tulajdonságokkal minden $x \in M$ és $a,b \in G$ elemre. A (G,M,T) hármast *transzformációcsoportnak* nevezzük.

2.2. Definíció. Legyen (G, M, T) transzformációcsoport.

- Az M halmaz *fixpontjainak halmaza* az $M^G = \{x \in M \mid T_g x = x, \ \forall \ g \in G\}$ halmaz.

- Az $x_0 \in M$ *pont stabilizátora* vagy az x_0 *ponthoz tartozó kiscsoport* a $G_{x_0} = \{g \in G \mid T_g x_0 = x_0\}$ halmaz, melyről egyszerűen belátható, hogy csoport.

- Az M halmazon értelmezünk egy $\sim$ relációt, $x \sim y \Leftrightarrow \exists \ g \in G\colon \ x = T_g y$. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

- Az M halmaz ekvivalenciaosztályait hívjuk *pályáknak* vagy *orbitoknak*. Minden $x \in M$ pont egyetlen pálya eleme, melyre a $G(x) = \{T_g x \in M \mid g \in G\}$ jelölést használjuk.

- Egy transzfomációcsoportot *tranzitívnak* hívunk, ha M egyetlen pályából áll.

2.3. Definíció. Egy (G, M, T) transzformációcsoportot *topologikus transzformáció-csoportnak* nevezünk, ha G topologikus csoport, M topologikus tér, $T\colon G \to \mathrm{Hom}(M)$, és a $(g, x) \mapsto T_g x$ leképezés folytonos, ahol $Hom(M)$ jelöli az $M \to M$ homeomorfizmusok halmazát.

A továbbiakban a topologikus transzformációcsoportok egy speciális osztályára lesz szükségünk. Nevezetesen a továbbiakban feltesszük, hogy mind a G topologikus csoport, mind az M topologikus tér lokálisan kompakt, teljesen metrizálható és eleget tesz a második megszámlálhatósági axiómának.

2.4. Definíció. Legyen (G, M, T) tranzitív topologikus transzformációcsoport, és $x_0 \in M$. Egy $c\colon M \to G$ függvényt x_0 ponthoz tartozó *Borel metszet-függvénynek* nevezünk, ha

$$T_{c(x)} x_0 = x \qquad \forall \ x \in M$$

és c Borel-mérhető függvény az M és G topologikus terek között

2.1. Tétel. *Ha (G, M, T) tranzitív topologikus csoport, akkor minden $x \in M$ ponthoz létezik Borel metszetfüggvény.*

2.2. Tétel. *(Stone) Legyen G egy Lie-csoport és $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája. Legyen $[ta]$ a G csoport egy egyparaméteres részcsoportja, valamint U ennek egy folytonos unitér ábrázolása egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik egy $H \in \mathcal{H}$ önadjungált operátor úgy, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$U_t = e^{itH}$$

teljesül.

2.2. Féldirekt szorzat

2.5. Definíció. Legyen A és H csoport, és továbbá

$$t\colon H \to \mathrm{Aut}(A) \qquad h \mapsto t_h$$

csoporthomomorfizmus. A H és A csoport *féldirekt szorzata* a t leképezésre nézve a $G = H \times_t A$ szimbólummal jelölt csoport, melynek elemei (h, a) párokból állnak, és a csoportműveletet a

$$(h, a)(h', a') = (hh', at_h(a'))$$

összefüggés adja meg. Ha A és H topologikus csoportok, és $t \in Hom(H, \mathrm{Aut}(A))$ olyan, hogy

$$t'\colon H \times A \to A \qquad (h, a) \mapsto t_h(a)$$

leképezés folytonos, akkor a $H \times_t A$ féldirektszorzatot a szorzattopológiával ellátva *topologikus féldirektszorzatnak* nevezzük.

Ha A és H szeparált, lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport, valamint A kommutatív, akkor *speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzatról* beszélünk.

2.6. Definíció. Az A topologikus csoport *folytonos unitér karaktereinek a halmaza* a

$$\hat{A} = \{f\colon A \to \mathbb{T} \mid f \text{folytonos homomorfizmus}\} \tag{2.10}$$

halmaz.

Az $\hat{A}$ halmaz a pontonkénti szozással csoporttá tehető. Ezen a csoporton a kompakt halmazon történő uniform konvergencia topológiát ad meg, erre a topológiára nézve a csoportműveletek folytonosak, azaz $\hat{A}$ topologikus csoport.

2.3. Tétel. *Az $\hat{\mathbb{R}^n}$, mint topologikus csoport izomorf $\mathbb{R}^n$ topologikus csoporttal, azonban mivel nincs közöttük kitűntetett bijekció, ezért a $\mathbb{P}^n = \hat{\mathbb{R}^n}$ jelölést használjuk.*

Továbbá, ha $\mathbb{T}$ jelöli az egységnyi abszolútértékű komplex számok csoportját, akkor $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$, és $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Legyen $G = H \times_t A$ a H és A topologikus csoportok topologikus féldirekt szorzata. Ekkor H hatása a $\hat{A}$ csoporton a

$$Q\colon H \to \mathrm{Aut}(\hat{A}) \qquad h \mapsto Q_h$$

leképezés, melyet a

$$Q_h\hat{a} := \hat{a} \circ t_{h^{-1}} \qquad \forall\, h \in H\ \hat{a} \in \hat{A}$$

egyenlőség definiál. Ekkor $(H, \hat{A}, Q)$ hármast a *$H \times_t A$ féldirekt szorzathoz rendelt transzformációcsoportnak* nevezzük.

2.3. Megengedett hatos

2.7. Definíció. Legyen Z egy lokálisan kompakt T_2 topologikus tér. Jelölje $C_0(Z, \mathbb{C})$ a *$Z \to \mathbb{C}$ folytonos, kompakt tartójú függvények terét.* Egy $\mu\colon C_0(Z, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ függvényt *Radon-mértéknek* nevezünk, ha

(i) lineáris;

(ii) pozitív, azaz minden $f \in C_0(Z, \mathbb{R})$, $f \geq 0$ függvény esetén $\mu(f) \geq 0$;

(iii) Minden $K \subseteq Z$, K kompakt halmazra létezik olyan $C_K \in \mathbb{R}^+$ szám úgy, hogy minden $f \in C_0(Z, \mathbb{C})$ esetén, ha $\mathrm{Supp}(f) \subseteq K$, akkor $|\mu(f)| \leq C_k \cdot \|f\|_\infty$.

Ha $f \in C_0(Z, \mathbb{C})$ és μ Radon-mérték, akkor $\mu(f)$ helyett gyakran $\int_Z f(p)d\mu(p)$ alakot írunk, ahol $\mathrm{Supp}(f)$ jelöli az f függvény tartóját.

2.8. Definíció. Legyen $G = H \times_t A$ speciális lokálisan kompakt féldirekt szorzat. Az

$$(Z, \mu, \varphi, a_0, c_{a_0}, m)$$

rendszert *megengedett hatosnak* nevezünk, ha

(1) Z egy lokálisan kompakt H pálya az $\hat{A}$ csoportban,

(2) μ nem nulla Radon-mérték a Z pályán,

(3) $\varphi\colon H \times Z \to \mathbb{R}_0^+$ olyan folytonos függvény, hogy minden $h \in H$ és minden $f \in C_0(Z, \mathbb{C})$ esetén

$$\int_Z \varphi(h^{-1}, p) f(p) d\mu(p) = \int_Z f(Q_h p) d\mu(p)$$

teljesül,

(4) $a_0 \in Z$ pont a Z pályán,

(5) c_{a_0} egy a_0 ponthoz tartozó Borel metszet-függvény,

(6) m a G_{a_0} kiscsoportnak folytonos unitér ábrázolása egy $\mathcal{K}$ Hilbert téren.

Legyen X egy lokálisan kompakt, T_2-tér, μ pozitív mérték X-en, $\mathcal{K}$ komplex Hilberttér és jelölje $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ a normát $\mathcal{K}$-n. Ekkor

$$\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{K}) := \left\{ f\colon X \to \mathcal{K} \mid f \text{mérhető} \int_X \|f\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\mu(x) < +\infty \right\}$$

komplex lineáris tér és a

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{K}) \to \mathbb{R}^+ \quad f \mapsto \|f\| := \sqrt{\int_X \|f\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\mu(x)}$$

félnormával ellátva teljes prehilbert-tér $\mathbb{C}$ felett. Az $\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathcal{K})$-hoz asszociált Hilbertteret jelöljük $L^2(X, \mu, \mathcal{K})$-val.

2.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{H} := L^2(Z, \mu, \mathcal{K})$. Ekkor a féldirekt szorzat folytonos unitér ábrázolása az adott hatos által*

$$U\colon (H \times_t A) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad (h, a, f) \mapsto U_{(h,a)}(f)$$

$$\big(U_{(h,a)}(f)\big)(p) =$$
$$= p(a)\sqrt{\varphi(h^{-1}, p)}\, m\big(c_{a_0}(a_0)\big) m\big(c_{a_0}(p)^{-1}\, h\, c_{a_0}(Q_{h^{-1}}p)\big) m\big(c_{a_0}(a_0)\big)^{-1} f\big(Q_{h^{-1}}p\big)$$

alakú, ahol $a \in A$, $h \in H$, $f \in \mathcal{H}$, $p \in Z \subset \hat{A}$.

Speciálisan, ha $h = e_H$*, akkor az ábrázoló operátor*

$$\big(U_a(f)\big)(p) = p(a)f(p). \tag{2.11}$$

Az ábrázolás alakja sokat egyszerűsödik, ha μ *egy* H*-invariáns mérték a* Z *pályán, ugyanis ekkor* $\varphi(\cdot,\cdot) = 1$*; valamint, ha a* $c_{a_0}(a_0) = e_H$ *is teljesül, akkor az ábrázoló operátor*

$$\big(U_{(h,a)}(f)\big)(p) = p(a)m\big(c_{a_0}(p)^{-1}\, h\, c_{a_0}(Q_{h^{-1}}p)\big)f(Q_{h^{-1}}p) \tag{2.12}$$

lesz.

Tehát a megengedett hatos megtalálásával meg tudjuk adni a csoport unitér ábrázolását. A következő néhány tétel ezen ábrázolások ekvivalenciájával foglalkozik.

2.5. Tétel. *Legyen* $H \times_t A$ *topologikus féldirekt szorzatnak* $(Z_1, \mu_1, \varphi_1, c_{a_1}, m_1)$ *és* $(Z_2, \mu_2, \varphi_2, c_{a_2}, m_2)$ *két megengedett hatosa. Az ezek által generált ábrázolások akkor és csak akkor unitér ekvivalensek, ha létezik olyan* (g, V) *pár, mellyel*

(i) $g \in H$ *és* $ga_1 = a_2$

(ii) $V : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *olyan unitér operátor, hogy*

$$m_2(ghg^{-1}) = V \circ m(h) \circ V^{-1}$$

teljesül minden $h \in H_{a_1}$ *kiscsoportbeli elemre.*

2.6. Tétel. *Legyen* $H \times_t A$ *topologikus féldirekt szorzatnak* $(Z_1, \mu_1, \varphi_1, c_{a_1}, m_1)$ *egy megengedett hatosa. Legyen*

$$Z_{-1} := \{p \in \hat{A} \mid p^{-1} \in Z\}, \qquad p_{-1} := p_1^{-1},$$
$$c_{p_{-1}} \colon Z_{-1} \to H, \qquad c_{p_{-1}}(p) := c_{p_1}(p^{-1}).$$

Jelöljön μ_{-1} *egy nemnulla, pozitív,* H*-kváziinvariáns mértéket* Z_{-1}*-en a következő tulajdonságokkal: van hozzá* $\varphi\colon H \times Z_{-1} \to \mathbb{R}^+$ *melyre* $h\mu_{-1} = \varphi_{-1}(h^{-1}, \cdot)\mu_{-1}$ *teljesül minden* $h \in H$ *esetén. Ekkor*

$$(Z_{-1}, \mu_{-1}, \varphi_{-1}, p_{-1}, c_{p_{-1}}, m_{-1})$$

a féldirekt szorzat megengedett hatosa, valamint, ha m_1 *és* m_{-1} *ábrázolások antiunitér ekvivalensek, akkor a két megengedett hatos által generált ábrázolások is antiunitér ekvivalensek.*

2.7. Tétel. *(Mackey) Legyen $H \times_t A$ topologikus féldirekt szorzat. Tegyük fel, hogy minden $\hat{A}$-beli H-pálya lokálisan kompakt, és tegyük fel, hogy létezik az $\hat{A}$ topologikus térben olyan Borel-halmaz, amely az $\hat{A}/H$ faktorhalmaznak teljes reprezentáns rendszere. Ekkor a $H \times_t A$ minden komplex, szeparábilis Hilbert-térbeli folytonos unitér irreducibilis ábrázoláshoz létezik $H \times_t A$-nak olyan megengedett hatosa, mely által generált Hilbert-térbeli ábrázolás az adott ábrázolással unitér ekvivalens.*

2.4. Fourier-transzformáció

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített, és minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén vezessük be a

$$\chi_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \qquad x \mapsto e^{i\langle p,x\rangle}$$

függvényt, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ feletti euklideszi skaláris szorzást. Legyen továbbá F egy rögzített komplex Hilbert-tér. Jelölje a Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}^n$-en.

Ha $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$, akkor minden $p \in \mathbb{R}^n$-re $f\chi_p, f\chi_{-p} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$ és az

$$\mathcal{F}f \colon \mathbb{R}^n \to F; \quad p \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p} d\mu_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle p,x\rangle} d\mu_n(x),$$
$$\overline{\mathcal{F}}f \colon \mathbb{R}^n \to F; \quad p \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{p} d\mu_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle p,x\rangle} d\mu_n(x),$$

függvények folytonosak, végtelenben eltűnők, továbbá

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_{\mu_n,1} \qquad \left\|\overline{\mathcal{F}}f\right\|_\infty \le \|f\|_{\mu_n,1}$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|_\infty$ a sup-normát az $\mathbb{R}^n \to F$ korlátos függvények terén.

2.9. Definíció. Az $\mathcal{F}f$ (illetve az $\overline{\mathcal{F}}f$) függvényt az f *Fourier-transzformáltjának* (illetve *konjugált Fourier-transzformáltjának*) nevezzük.

2.8. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$ és $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, \mathbb{C})$, akkor*

$$f(\mathcal{F}g), (\mathcal{F}f)g, f(\overline{\mathcal{F}}g), (\overline{\mathcal{F}}f)g \in f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F),$$

továbbá

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathcal{F}g) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f) g d\mu_n, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(\overline{\mathcal{F}}g) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathcal{F}}f) g d\mu_n.$$

2.9. Tétel. *(Fourier-féle inverziós tétel) Ha* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$ *olyan függvény, hogy* $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$*, akkor* $\overline{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$ *és*

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f)$$

teljesül $\mathbb{R}^n$*-en* μ_n*-majdnem mindenütt.*

2.10. Tétel. *(Plancherel) Legyen* F *egy komplex Hilbert-tér. Egyértelműen léteznek olyan*

$$\mathbb{F}, \overline{\mathbb{F}} \colon L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F) \to L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$$

unitér operátorok, amelyekre minden $f \colon \mathbb{R}^n \to F$ *kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvény esetében* $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathcal{F}f)^\bullet$ *és* $\overline{\mathbb{F}}(f^\bullet) = (\overline{\mathbb{F}}f)^\bullet$ *teljesül, ahol* $f^\bullet$ *jelöli az* f *függvénnyel* μ*-majdnem mindenütt egyenlő függvények ekvivalencia-osztályát. Ekkor az* $\mathbb{F}$ *unitér operátort az* $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n, F)$ *Hilbert-tér feletti* Fourier-transzformációnak *nevezzük.*

3. A csoport

A továbbiakban egyetlen speciális csoporttal, az n térdimenziós ($n \geq 4$) Galilei-csoporttal foglalkozunk. A csoport, mint halmaz

$$G \cong SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

és a szorzási szabály pedig $R, R' \in SO(n)$, $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})(R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}') = (RR', \tau + \tau', R\mathbf{v}' + \mathbf{v}, R\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \tau'\mathbf{v})$$

alakú, ami éppen a Galilei-transzformációnak felel meg. A csoport egy $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ elemének az inverze

$$(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})^{-1} = (R^{-1}, -\tau, -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}(t\mathbf{v} - \mathbf{u}))$$

lesz. A csoport féldirekt szorzat szerkezetű; legyen $A = \{(1, \tau, \mathbf{0}, \mathbf{u})\} \subset G$ és $H = \{(R, 0, \mathbf{v}, \mathbf{0})\} \subset G$. Ekkor $t\colon H \to \mathrm{Aut}(A)$ a H csoporthatása az A csoporton

$$t_{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{0})}(1, \tau, \mathbf{0}, \mathbf{u}) = (1, \tau, \mathbf{0}, R\mathbf{u} + \tau\mathbf{v})$$

alakú lesz.

A csoport felírható az $(n+2) \times (n+2)$ mátrix-csoport részcsoportjaként. Ugyanis, ha $R \in SO(n)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, akkor ezeket

$$\begin{pmatrix} R & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

módon mátrixba rendezve, és ezt ellátva a szokásos mátrix-szorzással éppen a Galilei-csoporttal izomorf csopotot kapunk.

A Galilei-csoport topologikus csoport, hiszen topológiát ad meg rajta az $\mathbb{R}^k$ ($k = \binom{n}{2} + n + n + 1$) szokásos topológiája. Továbbá Lie-csoport is, hiszen a szorzás és az inverz-képzés is differenciálható.

4. A csoport kommutátor kociklusai és unitér kociklusai

Az 1.6 tétel és következménye értelmében a csoport kommutátor-kociklusainak gyenge kohomológia-osztályai indexelik a lehetséges elemi részecskéket. A fejezet első részében tehát megkeresem a kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályait. Ennek végeredménye az lesz, hogy minden gyenge kohomológia-osztályt egyetlen pozitív valós μ paraméter indexel, amiről később memutatjuk, hogy maga a tömeg. A számolás során sokszor ki fogjuk használni 1.13 definícióban szereplő kommutátor-kociklusok három tulajdonságát, a bilinearitást, az antiszimmetriát valamint a zártságot. Ennek segítségével meg fogjuk keresni azt a 1.13 definícióban szereplő, gyenge kohomológiát megadó η függvényt, ami minden kommutátor-kociklushoz megadja azt a vele gyengén kohomológ kommutátor-kociklust, amit már csupán a μ paraméter jellemez

A fejezet második fele az unitér kociklusok megadásáról fog szólni. A 1.6 tétel értelmében a kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályai bijekcióban állnak az unitér kociklusok gyenge kohomológia-osztályaival. A kommutátor kociklusok gyenge kohomológia-osztályaiból reprezentáns elemnek az imént megkeresett, egyetlen μ paraméterrel indexelhető kommutátor-kociklust választjuk. Ehhez fogunk megadni egy reprezentánst az unitér kociklusok gyenge kohomológia-osztályaiból. Erre azért van szükség, mert a 1.7 tétel értelmében a Galilei-csoport sugárábrázolásai megkaphatók a csoport centrális kibővítésének unitér ábrázolásaiból. A kibővített csoport megadásához pedig szükség van az unitér kociklusok gyenge kohomológia-osztályainak ismeretére.

4.1. A kommutátor kociklusok

4.1. Tétel. *Az n térdimenziós Galilei-csoport kohomológia-osztályai egyetlen paraméterrel indexelhetők $n \geq 4$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen κ a csoport egy tetszőleges kommutátor kociklusa. Meg fogunk adni egy κ' kommutátor kociklusát a csoportnak, amely gyengén kohomológ a κ kommutátor kociklussal, valamint $\kappa'(B_i, D_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ kivételével az összes többi helyen felvett értéke nulla. Továbbá meg fogjuk mutatni, hogy $\kappa'(B_i, D_i) = \mu$ $(\mu \in \mathbb{R}^+)$ az i indextől függetlenül. A gyenge kohomológiát megadó lineáris függvényt jelölje η, azaz $\tilde{\kappa}(\cdot, \cdot) = \kappa(\cdot, \cdot) + \eta([\cdot, \cdot])$.

Legyen A_{ij} az SO(n) azon infinitezimális generátora, azaz

$$(A_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il} \qquad 1 \leq i, j \leq n \quad 1 \leq k, l \leq n+2$$

ahol δ_{kl} a Kronecker-szimbólum. Számunkra azok az A_{ij} mátrixok számítanak, ahol $1 \leq i < j \leq n$, de a számítások egyszerűbb alakban való felírhatósága érdekében értelmeztük ellenkező esetben is $A_{ij} = -A_{ji}$ összefüggéssel.

Az eltolások infinitezimális generátora legyen B_i, a két koordinátarendszer közötti áttérés infinitezimális generátorát jelölje D_i, valamint az időfejlődés infinitezimális generátora legyen F, vagyis

$$\begin{aligned} (B_i)_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{l,n+2} \qquad 1 \leq i \leq n, \\ (D_i)_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{l,n+1} \qquad 1 \leq i \leq n, \\ (F)_{kl} &= \delta_{k,n+1}\delta_{l,n+2}. \end{aligned}$$

Ekkor egyszerű számolással igazolhatók a következő kommutációs relációk

$$\begin{aligned} [A_{ij}, A_{jk}] &= A_{ik}, \\ [A_{ij}, B_j] &= B_i, \\ [A_{ij}, D_j] &= D_i, \\ [D_i, F] &= B_i, \end{aligned}$$

és az összes többi kommutátor nulla. Ezek közül most belátunk egyet, a többi hasonló módon megy.

$$\begin{gathered} ([A_{ij}, B_t])_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{js} - \delta_{jk}\delta_{is})(\delta_{ts}\delta_{l,n+2}) - (\delta_{tk}\delta_{s,n+2})(\delta_{is}\delta_{jl} - \delta_{js}\delta_{il}) = \\ = \delta_{ik}\delta_{jt}\delta_{l,n+2} - \delta_{jk}\delta_{it}\delta_{l,n+2} - \delta_{tk}\delta_{i,n+2}\delta_{jl} + \delta_{tk}\delta_{j,n+2}\delta_{il} = \begin{cases} 0 \text{ ha } t \neq i, t \neq j, \\ (B_j)_{kl} \text{ ha } t = i, \\ (-B_i)_{kl} \text{ ha } t = j\ . \end{cases} \end{gathered}$$

Vagyis i és j is legfeljebb n lehet, így az utolsó két tag nullát ad. Tehát a kommutátor akkor nem lesz csak nulla, ha $t = i$ vagy $t = j$. Mivel $A_{ij} = -A_{ji}$, így elég csak a $t = j$ esetet vizsgálni, ez pedig éppen a fenti kommutátor-relációt adja vissza.

A fent definiált mátrixok bázisát képezik a Lie-algebrának, így elég csak ezek kommutátor kociklusának kohomológia-osztályait vizsgálni.

Először vizsgáljuk SO(n) kommutátor kociklusait. Ha az i, j, k és l indexek mind különbözőek, akkor

$$\begin{gathered} \kappa(A_{ij}, A_{kl}) = \kappa([A_{ik}, A_{kj}], A_{kl}) = -\kappa([A_{kj}, A_{kl}], A_{ik}) - \kappa([A_{kl}, A_{ik}], A_{kj}) = \\ = \kappa(A_{jl}, A_{ik}) - \kappa(A_{li}, A_{kj}), \end{gathered}$$

másfelől viszont

$$\begin{gathered} \kappa(A_{ij}, A_{kl}) = \kappa([A_{il}, A_{lj}], A_{kl}) = -\kappa([A_{lj}, A_{kl}], A_{il}) - \kappa([A_{kl}, A_{il}], A_{lj}) = \\ = \kappa(-A_{ik}, -A_{jl}) - \kappa(-A_{kj}, -A_{li}) = -\kappa(A_{jl}, A_{ik}) - \kappa(A_{li}, A_{kj}). \end{gathered}$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$$\kappa(A_{ij}, A_{kl}) = 0,$$

ha az összes index különbözik. Viszont ekkor $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$, és mivel $\eta\,(0) = 0$, így a κ-val kohomológ κ'-re is teljesük a $\kappa\,(A_{ij}, A_{kl}) = 0$.

Definiáljuk η értékeit az összes A-ra. Legyen

$$\begin{aligned}
\eta\,(A_{ij}) &:= \quad -\kappa\,(A_{i,i+1}, A_{i+1,j}) && 1 \le i \le n-2, \quad i+1 < j;\\
\eta\,(A_{i,i+1}) &:= \quad -\kappa\,(A_{i+1,i+2}, A_{i,i+2}) && 1 \le i \le n-1;\\
\eta(A_{n-1,n}) &:= \quad -\kappa(A_{n,1}, A_{n-1,1}).
\end{aligned}$$

Ezzel az összes A mátrixon definiáltuk η-t. Ezzel a definicióval elértük, hogy

$$\begin{aligned}
\kappa'\,(A_{i,i+1}, A_{i+1,j}) &= 0, \quad \text{ha } 1 \le i \le n-2 \text{ és } i+1 < j,\\
\kappa'\,(A_{i+1,i+1}, A_{i,i+2}) &= 0, \quad \text{ha } 1 \le i \le n-1.\\
\kappa'(A_{n,1}, A_{n-1,1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg κ' értékeit a többi A mátrix-páron. Már láttuk, hogy ha a mátrixoknak nincs egyező indexük, akkor a kommutátor kociklusuk nullával egyenlő. További egyszerűsítő feltevéseket tehetünk.

- Feltehető, hogy a két egyező index az első változó második, illetve a második változó első indexe, ugyanis ellenben $A_{ij} = -A_{ji}$ cserével ilyen alakra hozható. Vizsgálandó tehát $\kappa'\,(A_{ij}, A_{jk})$.

- Feltehető továbbá, hogy $k \le i$, ugyanis ellenkező esetben

$$\kappa'\,(A_{ij}, A_{jk}) = \kappa'\,(A_{ji}, A_{kj}) = -\kappa'\,(A_{kj}, A_{ji})\,.$$

- Megállapíthatjuk továbbá, hogy $i \ne k$, ugyanis ebben az esetben az antiszimmetria miatt lesz $\kappa'\,(A_{ij}, A_{ij}) = 0$.

Ezekkel az egyszerűsítő feltételekkel az alábbi eseteket kell megvizsgálnunk.

1. Ha $j = i+1$, így $k > i+1$ ekkor éppen a már fent leírt egyenletet kapjuk, miszerint
$$\kappa'\,(A_{i,i+1}, A_{i+1,k}) = \kappa\,(A_{i,i+1}, A_{i+1,k}) + \eta\,(A_{ik}) = 0.$$

2. Ha $j \ne i+1$ és $k > i+1$, akkor
$$\begin{aligned}
\kappa'\,(A_{i,j}, A_{j,k}) = \kappa\,(A_{i,j}, A_{j,k}) + \eta\,([A_{ij}, A_{jk}]) = \kappa\,([A_{i,i+1}, A_{i+1,j}]\,, A_{j,k}) + \eta\,(A_{ik}) =\\
= -\kappa\,([A_{i+1,j}, A_{i,i+1}]\,, A_{i,i+1}) - \kappa(\underbrace{[A_{j,k}, A_{i,i+1}]}_{0}, A_{i+1,j}) + \eta\,(A_{ik}) =\\
= -\kappa\,(A_{i+1,k}, A_{i,i+1}) - \kappa\,(A_{i,i+1}, A_{i+1,k}) = 0.
\end{aligned}$$

3. Ha $j \ne i+1$ és $k = i+1$, akkor

- $j \neq i+2$ esetén

$$\begin{gathered}\kappa'\left(A_{i,j}, A_{j,i+1}\right) = -\kappa\left(A_{ij}, A_{i+1,j}\right) - \eta\left(\left[A_{ij}, A_{i+1,j}\right]\right) = \\ = -\kappa\left(\left[A_{i,i+2}, A_{i+2,j}\right] A_{i+1,j}\right) + \eta(A_{i,i+1}) = \\ = \kappa(0, A_{i+2,j}) + \kappa(\underbrace{[A_{i+2,j}, A_{i+1,j}]}_{-A_{i+2,i+1}}, A_{i,i+2}) - \kappa\left(A_{i+1,i+2}, A_{i,i+2}\right) = 0,\end{gathered}$$

- $j = i+2$ esetén

$$\begin{gathered}\kappa'\left(A_{i,i+2}, A_{i+1,i+2}\right) = \kappa\left(A_{i,i+2}, A_{i+1,i+2}\right) + \eta(\underbrace{[A_{i,i+2}, A_{i+1,i+2}]}_{-A_{i,i+2}}) = \\ = \kappa\left(A_{i,i+2}, A_{i+1,i+2}\right) + \kappa\left(A_{i+1,i+2}, A_{i,i+2}\right) = 0.\end{gathered}$$

Tehát $n \geq 4$ esetén az SO(n) minden kommutátor kociklusa az azonosan nulla függvénnyel kohomológ.

Vizsgáljuk az E_n^+ Euklideszi csoport kommutátor kociklusainak kohomológia-osztályait. Két megfigyeléssel kezdjük.

1. Mivel $[B_i, B_j] = 0$, így

$$\kappa'\left(B_i, B_j\right) = \kappa'\left(\left[A_{ik}, B_k\right] B_j\right) = -\kappa'(\underbrace{[B_k, B_j]}_{0} A_{ik}) - \kappa'(\underbrace{[B_j, A_{ik}]}_{0} B_k) = 0.$$

2. Amennyiben i, j és k indexek különbözőek, akkor az l indexet ezektől különbözőnek választva

$$\kappa'\left(A_{ij}, B_k\right) = \kappa'\left(\left[A_{il}, A_{lj}\right] B_k\right) = -\kappa'(\underbrace{[B_k, A_{il}]}_{0} A_{lj}) = -\kappa'(\underbrace{[A_{lj}, B_k]}_{0} A_{il}) = 0$$

adódik.

Ezek után definiáljuk η értékét minden B-re

$$\begin{aligned}\eta\left(B_{i+1}\right) &:= \kappa\left(A_{i,i+1}, B_i\right) \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ \eta(B_1) &:= \kappa(A_{n,1}, B_n).\end{aligned}$$

Így már csak azt kell megvizsgálni, amikor B indexe egyezik A valamelyik indexével. Feltehető, hogy ez A első indexe, $\kappa'\left(A_{ij}, B_i\right)$. Az alábbi eseteket kell vizsgálnunk.

- Legyen $j = i+1$. Ekkor

$$\begin{gathered}\kappa'\left(A_{i,i+1}, B_i\right) = \kappa\left(A_{ij}, B_i\right) + \eta\left(\left[A_{i,i+1}, B_i\right]\right) = \kappa\left(A_{ij}, B_i\right) + \eta\left(B_{i+1}\right) = \\ = \kappa\left(A_{ij}, B_i\right) + \eta\left(\left[A_{i,i+1}, B_i\right]\right) - \kappa\left(A_{ij}, B_i\right) + \eta\left(\left[A_{i,i+1}, B_i\right]\right) = 0.\end{gathered}$$

- Legyen $j \neq i+1$, ekkor

$$\begin{aligned}\kappa'(A_{ij}, B_i) &= \kappa(A_{ij}, B_i) + \eta([A_{ij}, B_i]) = \kappa([A_{i,j-1}, A_{j-1,j}], B_i) + \eta(-B_j) = \\ &= -\kappa(\underbrace{[B_i, A_{i,j-1}]}_{B_{j-1}}, A_{j-1,j}) - \kappa(\underbrace{[A_{j-1,j}, B_i]}_{0}, A_{i,j-1}) + \eta([A_{j-1,j}, B_{j-1}]) = \\ &= -\kappa(B_{j-1}, A_{j-1,j}) + \eta([A_{j-1,j}, B_{j-1}]) = \kappa'(A_{j-1,j}, B_{j-1}) = 0\end{aligned}$$

  adódik, ahol az utolsó egyenlőségben az előző pont eredményét használtuk fel.

Tehát E_n^+ minden kommutátor kociklusa a nullával kohomológ.

A fent leírtak igazak maradnak akkor is, ha a B mátrixok helyébe a D mátrixokat helyettesítjük be, hiszen ugyanúgy kommutálnak egymással és az A mátrixokkal is.

Vizsgáljuk az F mátrixszal vett kommutátor kociklusokat.

- Az antisszimetria miatt $\kappa'(F, F) = 0$.
- Az s indexet az i és j indexektől különbözőnek választva $\kappa'(A_{ij}, F) = \kappa'([A_{is}, A_{sj}] F) = -\kappa'([A_{sj}, F] A_{is}) - \kappa'([F, A_{is}] A_{sj}) = 0$.
- Továbbá $\kappa'(B_i, F) = \kappa'([A_{ij}, B_j] F) = -\kappa'([B_j, F] A_{ij}) - \kappa'([F, A_{ij}] B_j) = 0$.
- Végül $\kappa'(D_i, F) = \kappa'([A_{ij}, D_j] F) = -\kappa'([D_j, F] A_{ij}) - \kappa'([F, A_{ij}] D_j) = 0$.

Tehát már csak a κ' kommutátor kociklus B és D mátrixokon felvett értékeit kell vizsgálni. Mivel κ antiszimmetrikus, így elég $\kappa'(B_i, D_j)$ értékét vizsgálni.

- Ha $i \neq j$, akkor a k indexet ezektől különbözőnek választva $\kappa'(B_i, D_j) = \kappa'([A_{ik}, B_k] D_j) = -\kappa'([D_j, A_{ik}] B_k) - \kappa'([B_k, D_j] A_{ik}) = 0$.
- Ha $k \neq i$, akkor $\kappa'(B_i, D_i) = \kappa'([A_{ik}, B_k] D_i) = -\kappa'([D_i, A_{ik}] B_k) - \kappa'([B_k, D_i] A_{ik}) = \kappa'(B_k, D_k)$.

Legyen tehát $\kappa'(B_i, D_i) := \mu$, minden $1 \leq i \leq n$ esetén, ahol $\mu \in \mathbb{R}$. Megmutatjuk, hogy erre a paraméterre mindig szükség lesz. Ehhez az kell, hogy akárhogyan is írjuk fel B_i-t és D_i-t kommutátorként, a kommutátor-kociklusok zártságát kihasználva azonosságot kapunk. Tehát három lehetőség van.

1. Kihaszálva a $[A_{ij}, B_j] = B_i$ relációt $\kappa'(B_i, D_i) = \kappa'([A_{ij}, B_j], D_i) = -\kappa'([D_i, A_{ij}], B_j) - \kappa'([B_j, D_i], A_{ij}) = -\kappa'(D_j, B_j)$.
2. Kihaszálva a $[D_i, F] = B_i$ relációt $\kappa'(B_i, D_i) = \kappa'([D_i, F], D_i) = -\kappa'([D_i, D_i], F) - \kappa'([F, D_i], D_i) = -\kappa'(-B_i, D_i)$.

3. Kihasználva a $[A_{ij}, D_j] = D_i$ relációt
$\kappa'(B_i, D_i) = \kappa'(B_i, [A_{ij}, D_j]) = \kappa'([D_j, A_{ij}], B_i) =$
$= -\kappa'([A_{ij}, B_i], D_j) - \kappa'([B_i, D_j], A_{ij}) = -\kappa'(-B_j, D_j)$.

Tehát mind a három lehetőség azonosságra vezetett, így az n térdimenziós Galilei-csoport kommutátor-kociklusainak kohomológiaosztályai egyetlen $\mu \in \mathbb{R}$ indexel jellemezhetőek, a gyenge kohomológiaosztályok (amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz) pedig egyetlen $\mu \in \mathbb{R}^+$ indexszel.

□

4.2. Unitér kociklusok

4.2. Tétel. *Az n térdimenziós Galilei csoport kommutátor kociklusainak μ-vel indexelt kohomológiaosztályaihoz tartozó unitér kociklus*

$$\omega_\mu((R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}), (R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}')) = e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u}, R\mathbf{v}' \rangle - \langle \mathbf{v}, R\mathbf{u}' \rangle + \tau' \langle \mathbf{v}, R\mathbf{v}' \rangle)}. \tag{4.13}$$

Bizonyítás. A fenti definícióval megadott függvény akkor lesz unitér kociklus, ha (1.4) és (1.5) alapján minden $g, h, f \in G$ esetén teljesülnek a

$$\begin{aligned} \omega_\mu(e, e) &= 1, \\ \omega_\mu(g, h)\omega_\mu(gh, f) &= \omega_\mu(h, f)\omega_\mu(g, hf) \end{aligned}$$

relációk, ahol e a G csoport egységeleme. Ezek egyszerű helyettesítéssel ellenőrizhetők. Az (1.4) egyenletbe helyettesítéssel $\omega_\mu((1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})) = e^{\frac{i\mu}{2}(0-0+0)} = 1$ adódik. Legyen

$$\begin{aligned} g &= (R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ h &= (R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}'), \\ f &= (R'', \tau'', \mathbf{v}'', \mathbf{u}''), \end{aligned}$$

ekkor

$$\begin{aligned} gh &= (RR', \tau + \tau', \mathbf{v} + R\mathbf{v}', \mathbf{u} + R\mathbf{u}' + \tau'\mathbf{v}), \\ hf &= (R'R'', \tau' + \tau'', \mathbf{v}' + R'\mathbf{v}'', \mathbf{u}' + R'\mathbf{u}'' + \tau''\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Ekkor az (1.5) egyenlőség jobb oldala

$$\omega_\mu(g, h)\omega_\mu(gh, f) =$$
$$= e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u}, R\mathbf{v}' \rangle - \langle \mathbf{v}, R\mathbf{u}' \rangle + \tau' \langle \mathbf{v}, R\mathbf{v}' \rangle + \langle R\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \tau'\mathbf{v}, RR'\mathbf{v}'' \rangle - \langle R\mathbf{v}' + \mathbf{v}, RR'\mathbf{u}'' \rangle + \tau'' \langle R\mathbf{v}' + \mathbf{v}, RR'\mathbf{v}'' \rangle)} =$$
$$= e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u}, R\mathbf{v}' \rangle - \langle \mathbf{v}, R\mathbf{u}' \rangle + \tau' \langle \mathbf{v}, R\mathbf{v}' \rangle + \langle \mathbf{u}', R'\mathbf{v}'' \rangle + \langle \mathbf{u}, RR'\mathbf{v}'' \rangle + \tau' \langle \mathbf{v}, RR'\mathbf{v}'' \rangle - \langle \mathbf{v}', R'\mathbf{u}'' \rangle - \langle \mathbf{v}, RR'\mathbf{u}'' \rangle}.$$
$$\cdot e^{\tau'' \langle \mathbf{v}', R'\mathbf{v}'' \rangle + \tau'' \langle \mathbf{v}, RR'\mathbf{v}'' \rangle)},$$

és bal oldala

$$\omega_\mu(h,f)\omega_\mu(g,hf) =$$
$$e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u}',R'\mathbf{v}''\rangle - \langle \mathbf{v}',R'\mathbf{u}''\rangle + \tau''\langle \mathbf{v}',R'\mathbf{v}''\rangle + \langle \mathbf{u},R(R'\mathbf{v}''+\mathbf{v}')\rangle - \langle \mathbf{v},R(R'\mathbf{u}''+\mathbf{u}'+\tau''\mathbf{v}')\rangle + (\tau'+\tau)\langle \mathbf{v},R(R'\mathbf{v}''+\mathbf{v}')\rangle)} =$$
$$= e^{\frac{i\mu}{2}(\langle \mathbf{u}',R\mathbf{v}''\rangle - \langle \mathbf{v}',R\mathbf{u}''\rangle + \tau''\langle \mathbf{v}',R\mathbf{v}''\rangle + \langle \mathbf{u},RR'\mathbf{v}''\rangle + \langle \mathbf{u},R\mathbf{v}'\rangle - \langle \mathbf{v},RR'\mathbf{u}''\rangle - \langle \mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle - \tau''\langle \mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle + \tau'\langle \mathbf{v},RR'\mathbf{v}''\rangle} \cdot$$
$$\cdot e^{\frac{i\mu}{2}(+\tau'\langle \mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle) + \tau''\langle \mathbf{v},RR'\mathbf{v}''\rangle + \tau''\langle \mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle)}.$$

A kettőt összevetve azonosságot kapunk. Tehát a (4.13) összefüggéssel definiált leképezés valóban kommutátor kociklus, ami lokálisan analitikus is. Tehát az (1.6) egyenlet alapján, ha minden $a,b\in\mathfrak{g}$ esetén (ahol $\mathfrak{g}$ jelöli a G csoport Lie-algebráját)

$$\tilde\kappa(a,b) := -i\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\log\big(\omega_\mu([ta][tb],[-ta][-tb])\omega_\mu([ta],[tb])\omega_\mu([-ta],[-tb])\big)\right),$$

akkor $\tilde\kappa$ kommutátor kociklust határoz meg, így $\tilde\kappa$ antiszimmetrikus lesz. Ezek az egyparaméteres részcsoportok pedig a mátrixos felírásban az alábbiak.

$$[tA_{ij}] = \left(\begin{array}{ccccccc|c|c} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \cos t && -\sin t &&&& \\ &&& \ddots &&&&& \\ && \sin t && \cos t &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& 1 && \\ \hline &&&&&&& 1 & \\ \hline &&&&&&&& 1 \end{array}\right) \qquad [tD_i] = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots && t & \\ &&& 1 && \\ \hline &&&& 1 & \\ \hline &&&&& 1 \end{array}\right)$$

$$[tB_i] = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& t \\ &&& 1 && \\ \hline &&&& 1 & \\ \hline &&&&& 1 \end{array}\right) \qquad [tF] = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& 1 && \\ \hline &&&& 1 & t \\ \hline &&&&& 1 \end{array}\right)$$

Ahol az indexeknek megfelelő sorokban és oszlopokban áll $\cos t$, $\sin t$ és t, a főátlóban a jelölt elemeken kívül csupa 1 áll, és a nem jelölt elemek pedig mind nullák. Mivel $\tilde\kappa$ antiszimmetrikus, így elég csak az (A_{ij},D_k), (A_{ij},B_k), (A_{ij},F), (D_i,B_j), (D_i,F) és (B_i,F) párokon felvett értékeit vizsgálni, és ezekről bizonyítani, hogy egyeznek az imént kiszámolt κ értékeivel.

Először is vegyük észre, hogy $\omega_\mu([ta],[tb]) = 1$ kivéve, ha $(a,b)=(D_i,B_i)$; ebben az esetben pedig $\omega_\mu([tD_i],[tB_i]) = \omega_\mu([-tD_i],[-tB_i]) = e^{-\frac{i\mu}{2}t^2}$. Továbbá $[ta][tb]$ és $[-ta][-tb]$ ugyanolyan alakú csoportelem, ezért $\omega_\mu([ta][tb],[-ta][-tb])$ akkor lesz 1-től különböző, ha $[ta][tb]$-ben van $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ vagy van $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ és $\tau\neq 0$.

Azonban $[tA_{ij}][tD_k]$ -ban $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ és $\tau = 0$, $[tA_{ij}][tB_k]$-ban $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $[tA_{ij}][tF]$-ban $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $[tB_i][tF]$-ban is $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ezekben az esetekben tehát

$$\tilde{\kappa}(A_{ij}, D_k) = \tilde{\kappa}(A_{ij}, B_k) = \tilde{\kappa}(A_{ij}, F) = -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \log 1 = 0.$$

Vizsgáljuk (D_i, F) esetét. A mátrixok szorzását elvégezve

$$[tD_i][tF] = \left(1, t, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad [-tD_i][-tF] = \left(1, t, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

adódik, és így $\tilde{\kappa}(D_i, F) = -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} e^{\frac{i\mu}{2}(-t^3 - t^3 - t^3)} = \frac{-2\mu}{2} \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2} = 0.$

Tehát már csak (D_i, B_j)-t kell vizsgálni. Ekkor

$$[tD_i][tB_j] = \left(1, 0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad [-tD_i][-tB_j] = \left(1, 0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -t \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ -t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Tehát, ha $i \neq j$ akkor $\omega_\mu([tD_i][tB_j], [-tD_i][-tB_j]) = 1$, ezért $\tilde{\kappa}(D_i, B_j) = 0$. Azonban, ha $i = j$, akkor

$$\begin{aligned} \omega([tD_i][tB_i], [-tD_i][-tB_i]) &= e^{\frac{i\mu}{2}(-t^2 + t^2)} = 1, \\ \omega([tD_i], [tB_i]) &= e^{\frac{-i\mu}{2} t^2}, \\ \omega([-tD_i], [-tB_i]) &= e^{\frac{-i\mu}{2} t^2}, \end{aligned}$$

és ez alapján

$$\tilde{\kappa}(D_i, B_i) = -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \log e^{\frac{-i\mu}{2} t^2} e^{\frac{-i\mu}{2} t^2} = -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} (-i\mu t^2) = -\mu.$$

Azaz minden $a, b \in \mathfrak{g}$-re $\tilde{\kappa}(a, b) = \kappa'(a, b)$ tehát a (4.13) összefüggéssel definiált ω_μ valóban az n térdimenziós Galilei csoporthoz tartozó unitér kociklus.

$\square$

5. Az n térdimenziós Galilei-csoport projektív ábrázolásai

5.1. A csoport

A 3. felyezetben bemutatásra került a négy és több térdimenziós Galilei-csoport szerkezete. Ennek projektív ábrázolásához viszont 1.7 tétel értelmében egy másik csoport, az 1.14 definícióban megadott G^μ kibővített csoport unitér ábrázolásait kell megadni. Ehhez szükséges az eredeti Galilei-csoport unitér kociklusainak ismerete, amely (4.13) szerint

$$\omega_\mu\left((R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}')\right)=e^{\frac{i\mu}{2}(\langle\mathbf{u},R\mathbf{v}'\rangle-\langle\mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle+\tau'\langle\mathbf{v},R\mathbf{v}'\rangle)}$$

alakú.

Így 1.14 definíció alapján a kibővített csoport

$$G^\mu=\{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)\ \mid R\in SO(n),\tau\in\mathbb{R},\mathbf{v},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n,\zeta\in\mathbb{T}\},$$

valamint a csoportszorzás a (1.7) definíciós egyenlőség alapján

$$\begin{gathered}(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)\,(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}',\zeta')=\\=(RR',\tau+\tau',R\mathbf{v}'+\mathbf{v},R\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\tau'\mathbf{v},\zeta\zeta'\omega_\mu\left((R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}')\right)).\end{gathered}$$

5.2. A kibővített csoport szerkezete

Legyen

$$A^\mu=\{(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{u},\zeta)\in G^\mu\mid\tau\in\mathbb{R},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n,\zeta\in\mathbb{T}\}$$

a tér- és időbeli eltoláscsoport, ami egy Abel-részcsoport. A továbbiakban ennek egy általános elemét jelölje $(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{u},\zeta)=(\tau,\mathbf{u},\zeta)$. Legyen továbbá

$$H^\mu=\{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{0},1)\in G^\mu\mid R\in SO(n),\mathbf{v}\in\mathbb{R}\}.$$

Ennek a csoportnak egy általános elemét a továbbiakban jelölje $(R,\mathbf{v},1)$. Ekkor tetszőleges G^μ-beli elem egyértelműen felbontható egy A^μ-beli és egy H^μ-beli elem szorzatára

$$\left(\tau,\mathbf{u},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}\right)(R,\mathbf{v},1)=(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)\tag{5.14}$$

módon. Továbbá a H^μ csoportnak van egy természetes hatása az A^μ csoporton.

$$\begin{aligned}t:H^\mu&\to\mathrm{Aut}\ A^\mu\\(R,\mathbf{v},1)&\mapsto t_{(R,\mathbf{v},1)}\\t_{(R,\mathbf{v},1)}(\tau,\mathbf{u},\zeta)&=\left(\tau,R\mathbf{u}+\tau\mathbf{v},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}(2\langle\mathbf{v},R\mathbf{u}\rangle+\tau\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle)}\right)\end{aligned}$$

Rövid számolással meggyőződhetünk arról, hogy ez a hatás kompatibilis a G^μ csoport szorzásával. Tetszőleges $(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}')\in G^\mu$ esetén

$$
\begin{aligned}
&(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)\,(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}',\zeta') = \\
&= \left(\tau,\mathbf{u},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}\right)(R,\mathbf{v},1)\left(\tau',\mathbf{u}',\zeta' e^{-i\frac{\mu}{2}\langle\mathbf{u}',\mathbf{v}'\rangle}\right)(R',\mathbf{v}',1) = \\
&= \left(\tau,\mathbf{u},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}\right)\left(\tau',R\mathbf{u}'+\tau'\mathbf{v},\zeta' e^{-i\frac{\mu}{2}(\langle\mathbf{u}',\mathbf{v}'\rangle+2\langle\mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle+\tau'\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle)}\right)(RR',R\mathbf{v}'+\mathbf{v},1) = \\
&= (RR',\tau+\tau',R\mathbf{v}'+\mathbf{v},R\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\tau'\mathbf{v}, \\
&\qquad \zeta\zeta' e^{-i\frac{\mu}{2}(\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{u}',\mathbf{v}'\rangle+2\langle\mathbf{v},R\mathbf{u}'\rangle)} e^{i\frac{\mu}{2}(\langle R\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\tau'\mathbf{v},R\mathbf{v}'+\mathbf{v}\rangle-0+0)}\big) = \\
&= (RR',\tau+\tau',R\mathbf{v}'+\mathbf{v},R\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\tau'\mathbf{v},\zeta\zeta'\omega_\mu((R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta),(R',\tau',\mathbf{v}',\mathbf{u}',\zeta'))),
\end{aligned}
$$

ahol az első egyenlőségnél a két G^μ-beli elemet felbontottuk A^μ és H^μ csoportbeli elem szorzatára, a második egyenlőségnél pedig vettük a szorzat második tényezőjének hatását a harmadik tényezőre és alkalmaztuk a csoportszorzás szabályait. Eredményül pedig pont a fent definiált szorzási szabályt kaptuk meg, azaz a csoporthatás jól definiált. Ezzel a definícióval elértük azt, hogy a G^μ csoport féldirekt szorzat szerkezetű legyen.

5.3. Az A^μ csoport karakterei

Vizsgáljuk A^μ karaktereit, ezek (2.10) egyenlet szerint a $\hat{A}^\mu=\{A^\mu\to\mathbb{T}\}$ folytonos csoporthomomorfizmusok halmaza. Ekkor, mint topologikus csoportok $\hat{A}^\mu\cong\mathbb{P}\times\mathbb{P}^n\times\mathbb{Z}$. Így az $\hat{A}^\mu$ csoport egy általános eleme $(p_0,\mathbf{p},k)\in\hat{A}^\mu$ alakban írható, mely a

$$(p_0,\mathbf{p},k)\,(\tau,\mathbf{u},\zeta)=\zeta^k e^{i(p_0\tau+\langle\mathbf{u},\mathbf{p}\rangle)}$$

folytonos csoporthomomorfizmust reprezentálja.

Keressük meg H^μ adjungált hatását az $\hat{A}^\mu$ csoporton, vagyis azt a

$$Q: H^\mu\to \mathrm{Aut}\ \hat{A}^\mu$$

függvényt, melyre minden $h\in H^\mu$ és $\hat{a}\in\hat{A}^\mu$ esetén

$$Q_h\hat{a}:=\hat{a}\circ t_{h^{-1}}.$$

Mivel $(R,\mathbf{v},1)^{-1}=(R^{-1},-R^{-1}\mathbf{v},1)$, ezért ha $a\in A^\mu$, akkor

$$
\begin{aligned}
&t_{h^{-1}}(a)=t_{(R^{-1},-R^{-1}\mathbf{v},1)}(\tau,\mathbf{u},\zeta)= \\
&=\left(\tau,R^{-1}\mathbf{u}-\tau R^{-1}\mathbf{v},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\left(2\left\langle -R^{-1}\mathbf{v},R^{-1}\mathbf{u}\right\rangle+\tau\left\langle R^{-1}\mathbf{v},R^{-1}\mathbf{v}\right\rangle\right)}\right),
\end{aligned}
$$

és így

$$
\begin{aligned}
&(p_0,\mathbf{p},k)\left(\tau,R^{-1}\mathbf{u}-\tau R^{-1}\mathbf{v},\zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\left(2\left\langle -R^{-1}\mathbf{v},R^{-1}\mathbf{u}\right\rangle+\tau\left\langle R^{-1}\mathbf{v},R^{-1}\mathbf{v}\right\rangle\right)}\right)= \\
&=\zeta^k e^{-i\frac{\mu}{2}k(-2\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle+\tau\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle)} e^{i\left(\tau p_0+\left\langle R^{-1}\mathbf{u}-\tau R^{-1}\mathbf{v},\mathbf{p}\right\rangle\right)},
\end{aligned}
$$

ami alapján

$$Q_{(R,\mathbf{v},1)}\left(p_0,\mathbf{p},k\right)=\left(p_0-\langle\mathbf{v},R\mathbf{p}\rangle-\frac{1}{2}k\mu\left\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle,R\mathbf{p}+k\mu\mathbf{v},k\right).$$

5.4. Pályák és stabilzátorok $\hat{A}^\mu$ csoporton

A $\hat{A}^\mu$ csoporton értelmezett

$$\theta\colon\hat{A}^\mu\to\mathbb{R}\qquad(p_0,\mathbf{p},k)\mapsto\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+2k\mu p_0$$

függvény invariáns lesz a Q_h csoporthatásra, hiszen a $h=(R,\mathbf{v},1)$ elemmel transzformálva

$$\begin{gathered}\theta(Q_h(p_0,\mathbf{p},k))=\langle R\mathbf{p}+k\mu\mathbf{v},R\mathbf{p}+k\mu\mathbf{v}\rangle+2k\mu\left(p_0-\langle\mathbf{v},R\mathbf{p}\rangle-\tfrac{1}{2}k\mu\left\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle\right)=\\=\langle R\mathbf{p},R\mathbf{p}\rangle+2k\mu\left\langle\mathbf{v},R\mathbf{p}\right\rangle+k^2\mu^2\left\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle+2k\mu p_0-2k\mu\left\langle\mathbf{v},R\mathbf{p}\right\rangle-k^2\mu^2\left\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle=\\=\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+2k\mu p_0=\theta(p_0,\mathbf{p},k)\end{gathered}$$

adódik, ahol kihasználtuk, hogy R unitér. Tehát a

$$Z_{k,\rho}=\{(p_0,\mathbf{p},k)\,|\,\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+2k\mu p_0=\rho\}$$

halmaz invariáns a H^μ csoporthatására nézve, ha $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ és $\rho\in\mathbb{R}$ vagy ha $n=0$ és $\rho\in\mathbb{R}^+$. A $Z_{k,\rho}$ egy általános pontja $\left((2n\mu)^{-1}\left(\rho-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right),\mathbf{p},n\right)$. A $k\neq0$ esetban $Z_{k,\rho}$; valamint $\rho\neq0$ esetén $Z_{0,\rho}$ pálya lesz. Azonban $Z_{0,0}$ nem lesz pálya, viszont ennek minden pontja fix marad H^μ alatt.

Vegyünk egy reprezentáns elemet az egyik pályáról

$$a_{k,\rho}:=\left((2k\mu)^{-1}\rho,\mathbf{0},k\right).$$

Az ezen ponthoz tartozó Borel metszet-függvény $k\neq0$ esetén

$$c_{a_{k,\rho}}\left(\left((2k\mu)^{-1}\left(\rho-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right),\mathbf{p},k\right)\right)=\left(1,(k\mu)^{-1}\mathbf{p},1\right)\in H^\mu,$$

ugyanis

$$\begin{gathered}Q_{\left(1,(k\mu)^{-1}\mathbf{p},1\right)}\left((2k\mu)^{-1}\rho,\mathbf{0},k\right)=\\=\left((2k\mu)^{-1}\rho-\left\langle(k\mu)^{-1}\mathbf{p},1\cdot\mathbf{0}\right\rangle-\tfrac{1}{2}k\mu\left\langle(k\mu)^{-1}\mathbf{p},(k\mu)^{-1}\mathbf{p}\right\rangle,1\cdot\mathbf{0}+k\mu\,(k\mu)^{-1}\mathbf{p},k\right)=\\=\left(\left((2k\mu)^{-1}\left(\rho-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right),\mathbf{p},k\right)\right).\end{gathered}$$

Az $a_{k,\rho}$ pontbeli stabilizátor, $k\neq0$ esetén éppen a forgáscsoport, mivel

$$Q_{(R,\mathbf{v},1)}\left((2k\mu)^{-1}\rho,\mathbf{0},k\right)=\left((2k\mu)^{-1}\rho-\frac{1}{2}k\mu\left\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle,k\mu\mathbf{v},k\right),$$

ami csak $\mathbf{v}=0$ esetén hagyja helyben a $\left((2k\mu)^{-1}\rho,\mathbf{0},k\right)$ pontot.

5.5. A mérték

Rögzített $k \neq 0$ esetén a

$$\begin{aligned}\xi : \mathbb{P}^n &\to Z_{k,\rho} \\ \mathbf{p} &\mapsto \left((2k\mu)^{-1}(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle), \mathbf{p}, k\right)\end{aligned}$$

leképezés egy homeomorfizmus, tehát a pálya lokálisan kompakt, valamint a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ komponenseket tekinthetjük koordinátáknak a $Z_{k,\rho}$ pályán.

A $d\mathbf{p}$ Lebesgue-mérték egy H^μ invariáns mérték lesz a $Z_{k,\rho}$ pályán, hiszen ez invariáns a forgatásokra

$$Q_{(R,\mathbf{0},1)}(p_0, \mathbf{p}, 1) = (p_0, R\mathbf{p}, k),$$

valamint az eltolásokra

$$Q_{(1,\mathbf{v},1)}(p_0, \mathbf{p}, 1) = \left(p_0 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}\rangle - \frac{1}{2}k\mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle, \mathbf{p} + k\mu\mathbf{v}, k\right).$$

5.6. Sugárábrázolásra vezető pályák kiválasztása

Ha U a G^μ csoport $Z_{k,\rho}$ pályájához tartozó irreducibilis ábrázolás, akkor U hat a $Z_{k,\rho}$ -ból egy adott véges dimenziós $\mathcal{K}$ Hilbert-térre képző függvények $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}, d\mathbf{p})$ Hilbert-terén. Viszont (1.8) alapján G^μ-nek csak azon unitér ábrázolásai határozzák meg G sugárábrázolásait, amelyekre $U_{(1,0,\mathbf{0},\mathbf{0},\zeta)} = \zeta^{-1} \cdot \mathrm{id}$, így nem minden $Z_{k,\rho}$ pályához tartozó U unitér ábrázolás lesz jó. Általános esetben egy $a \in A^\mu$ és $f \in \mathcal{H}$ esetén (2.11) alapján

$$(U_a f)(p_0, \mathbf{p}, k) = ((p_0, \mathbf{p}, k)\, a) \cdot f(p_0, \mathbf{p}, k),$$

azaz az eltoláshoz rendelt unitér operátor egy fázisfaktorral történő szorzás operátora. Mivel $(0, \mathbf{0}, \zeta) := (1, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \zeta) \in A^\mu$, és

$$(p_0, \mathbf{p}, k)(0, 0, \zeta) = \zeta^k e^{i\cdot 0} = \zeta^k,$$

így csak $k = -1$ esetén kapjuk meg G^μ unitér reprezentációjából G sugárábrázolását.

5.7. Az ábrázolás

Azonosítsuk a megengedett hatos elemeit. Mindegyik megengedett hatos egy $\rho \in \mathbb{R}$ és egy $\mu \in \mathbb{R}$ számmal indexelhető. Rögzített $\rho \in \mathbb{R}$ és $\mu \in \mathbb{R}$ esetén a megengedett hatos elemei a következő alakúak.

1. A H^μ pálya $\hat{A}^\mu$-n: $Z_{-1,\rho} = \left\{\left(-\frac{1}{2\mu}(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle), \mathbf{p}, -1\right)\right\} =: \{(\mathbf{p})\}$.

2. Minden pályán a H^μ invariáns mérték a Lebesgue-mérték $d\mathbf{p}$.

3. Mivel invariáns a mérték, $\varphi \equiv 1$.

4. A reprezentáns pont a $Z_{-1,\rho}$ pályán $a_{-1,\rho} = \left(-\frac{1}{2\mu}\rho, \mathbf{0}, -1\right)$.

5. Az ezen ponthoz tartozó Borel metszet-függvény $c\left(\left(-\frac{1}{2\mu}\left(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle\right), \mathbf{p}, -1\right)\right) = \left(1, -\frac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right) \in H^\mu$.

6. A kiscsoport minden esetben $G_{a_{-1,\rho}} = \{(R, 0, 1)\} \cong SO(n)^*$, és ennek folytonos unitér ábrázolása a $\mathcal{K}$ Hilbert-téren legyen $m : R \mapsto m(R)$ minden $R \in SO(n)^*$ esetén.

Ekkor (2.12) alapján, ha a $g \in G^\mu$, és $g = ah$, ahol $a \in A^\mu$, $h \in H^\mu$, akkor a $g \in G$ elemhez rendelt unitér opetátor $U_g \in Lin(\mathcal{H})$ hatása

$$(U_g f)(\mathbf{p}) = \underbrace{\mathbf{p}(a)}_{3.}\underbrace{m\left(c(\mathbf{p})^{-1} \cdot h \cdot c\left(Q_{h^{-1}}\mathbf{p}\right)\right)}_{2.}\underbrace{f\left(Q_{h^{-1}}(\mathbf{p})\right)}_{1.}$$

minden $f \in \mathcal{H}$ és $\mathbf{p} \in Z_{-1,\rho}$ esetén.

Legyen $g = (R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \zeta)$, ekkor (5.14) alapján $a = \left(\tau, \mathbf{u}, \zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\right)$ és $h = (R, \mathbf{v}, 1)$, tehát $h^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}\mathbf{v}, 1)$. Ezek alapján az U kifejezésében szereplő tényezők az alábbiak

1. A H^μ adjungált hatásának kifejezése alapján

$$f\left(Q_{(R^{-1}, -R^{-1}\mathbf{v}, 1)}(\mathbf{p})\right) = f\left(R^{-1}\mathbf{p} - \mu\left(-R^{-1}\mathbf{v}\right)\right) = f\left(R^{-1}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v})\right).$$

2. Felhasználva, hogy $c(\mathbf{p})^{-1} = \left(1, -\frac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right)^{-1} = \left(1, \frac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right) \in H^\mu$ és, hogy $c\left(Q_{h^{-1}}\mathbf{p}\right) = c\left(R^{-1}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v})\right) = \left(1, -\frac{1}{\mu}R^{-1}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}), 1\right) \in H^\mu$, így

$$\begin{aligned} m\left(\left(1, \tfrac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right)(R, \mathbf{v}, 1)\left(1, -\tfrac{1}{\mu}R^{-1}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}), 1\right)\right) &= \\ = m\left(\left(R, \mathbf{v} + \tfrac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right)\left(1, -\tfrac{1}{\mu}R^{-1}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}), 1\right)\right) &= \\ = m\left(\left(R, -\tfrac{1}{\mu}(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}) + \mathbf{v} + \tfrac{1}{\mu}\mathbf{p}, 1\right)\right) &= ((R, 0, 1)) = m(R), \end{aligned}$$

és $R \in SO(n)^*$

3. Felhasználva $\hat{A}^\mu$ hatását az A^μ csoporton

$$\begin{aligned} \left(-\tfrac{1}{2\mu}\left(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle\right), \mathbf{p}, -1\right)\left(\tau, \mathbf{u}, \zeta e^{-i\frac{\mu}{2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}\right) &= \zeta^{-1} e^{i\frac{\mu}{2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle} e^{i\left(\frac{\tau}{2\mu}(\rho - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}\rangle\right)} = \\ &= \zeta^{-1} e^{-\frac{i\tau\rho}{2\mu}} e^{i\left(\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{p} + \frac{\mu}{2}\mathbf{v}\right\rangle + \frac{\tau}{2\mu}\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle\right)}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan S halmaz, hogy minden $s \in S$ esetén m^s egy folytonos, irreducibilis unitér ábrázolása a kiscsoportnak, és $s_1 \neq s_2$ esetén m^{s_1} és m^{s_2} nem ekvivalnesek. Ekkor

$$\left(U^{\mu,s,\rho}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u},\zeta)} f\right)(\mathbf{p}) = \left(\zeta e^{\frac{i\tau\rho}{2\mu}}\right)^{-1} e^{i\left(\left\langle \mathbf{u},\mathbf{p}+\frac{\mu}{2}\mathbf{v}\right\rangle + \frac{\tau}{2\mu}\langle \mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right)} \cdot m^s(R)\, f\left(R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right).$$

Ezek után áttérhetünk az eredeti G Galilei-csoport sugárábrázolásaira. Wigner tétele szerint a projektív ábrázolást generáló unitér vagy antiunitér operátor csak egy egységnyi abszolútértékű fázisfaktor erejéig meghatározott, így az $e^{\frac{-i\tau\rho}{2\mu}}$ faktor elhagyható. Tehát (1.9) alapján a sugárábrázolás operátora

$$\left(V^{\mu,s}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\right)(\mathbf{p}) = e^{i\left(\left\langle \mathbf{u},\mathbf{p}+\frac{\mu}{2}\mathbf{v}\right\rangle + \frac{\tau}{2\mu}\langle \mathbf{p},\mathbf{p}\rangle\right)} \cdot m^s(R)\, f\left(R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right), \tag{5.15}$$

valamint a csoportszorzás (1.3) összefüggéssel összhangban $V^{\mu,s}_{g_1} V^{\mu,s}_{g_2} = \omega(g_1, g_2)\, V^{\mu,s}_{g_1 g_2}$-nek adódik minden $g_1, g_2 \in G$ esetén.

5.8. Ábrázolások ekvivalenciája

A 1.11 definíció értelmében az eredeti Galilei-csoport unitér kociklusainak csak gyenge kohomológiaosztályai adnak nem ekvivalens projektív ábrázolást, így a μ index pozitív kell, hogy legyen. A 2.7 tétel értelmében a kibővített csoport minden unitér ábrázolásához létezik olyan megengedett hatos, amely őt generálja. Mivel megadtuk az összes megengedett hatos által generát unitér ábrázolást, így megtaláltuk a kibővített csoport összes unitér ábrázolását. A 2.5 tétel érlemében két megengedett hatos által generált ábrázolás akkor unitér ekvivalens, ha egyrészt a reprezentáns pontok $(a_{n,\rho})$ egyazon pálya elemei, másrészt a kiscsoport ábrázolásai unitér ekvivalensek. Tehát (5.15) összefüggéssel megadott

$$V^{\mu_1,m_1} \quad \text{és} \quad V^{\mu_2,m_2}$$

operátorok akkor és csak akkor vezetnek ekvivalens projektív ábrázolásra, ha $\mu_1 = \mu_2$ és az m_1 és m_2 kiscsoport-ábrázolások unitér ekvivalensek.

5.9. Ábrázoló operátorok a valós térben

Az (5.15) ábrázoló operátor az $L^2(\mathbb{P}^n, d\mathbf{p}, \mathcal{K})$ Hilbert-tér egy unitér operátora. Mivel $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{R}^n$ mint topologikus csoport, és az izomorfizmus a Fourier-transzformáció, így az ábrázoló operátor megadható, mint az $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ Hilbert-tér unitér operátora, ahol $d\mathbf{x}$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ halmazon a Lebesgue-mértéket. Tehát, ha $\mathcal{F}$ jelöli a 2.9 definicióval megadott Fourier-transzformációt, akkor minden $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \in G$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, és $s \in$

S esetén, ha $V^{\mu,s}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} \in \mathrm{Lin}\left(L^2(\mathbb{P}^n, d\mathbf{p}, \mathcal{K})\right)$ az 5.15 összefüggéssel megadott unitér operátor, akkor a

$$W^{\mu,s}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} = \mathcal{F} V^{\mu,s}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} \mathcal{F}^{-1}$$

definicióval megadott operátor az $(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u}) \in G$ csoportelemet az $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ Hilbert-téren ábrázoló unitér operátor lesz.

A Fourier-transzformáció elvégzése érdekében bevezetünk néhány operátort. Legyen $L_a, M_\phi, K_R \in \mathrm{Lin}(L^2(\mathbb{P}^n, d\mathbf{p}, \mathcal{K}))$ a következő, minden $f \in L^2(\mathbb{P}^n, d\mathbf{p}, \mathcal{K})$, $\mathbf{p}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}^n$, $R \in SO(n)$ és $\phi \in C(\mathbb{P}^n, \mathbb{T})$ esetén

$$\begin{aligned} \big(L_{\mathbf{b}} f\big)(\mathbf{p}) &= f(\mathbf{p} - \mathbf{b}), \\ \big(M_\phi f\big)(\mathbf{p}) &= \phi(\mathbf{p}) \cdot f(\mathbf{p}), \\ \big(K_R f\big)(\mathbf{p}) &= f(R^{-1}\mathbf{p}). \end{aligned}$$

A továbbiakban a Fourier-transzformáció egyszerűbb elvégzése érdekében, egy speciális esettel foglalkozunk, amikor a kiscsoport ábrázolása a $\mathcal{K}$ Hilbert-téren a triviális (nulla spinű) ábrázolás, azaz minden $R \in SO(n)$ esetén $m\colon R \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$.

Az (5.15) egyenletben szereplő operátort a következő alakra tudjuk hozni.

$$\begin{aligned} &\big(V^{\mu}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\big)(\mathbf{p}) = \\ &= e^{i\left(\frac{\tau\mu}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - \frac{\mu}{2}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right)} e^{i\frac{\tau}{2\mu}\left\langle R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v}), R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right\rangle} e^{i\left\langle R^{-1}\mathbf{u}, R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right\rangle} \\ &\cdot e^{-i\tau\left\langle R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})\right\rangle} f(R^{-1}(\mathbf{p}+\mu\mathbf{v})) \end{aligned}$$

Ezek alapján legyen

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i\left(\frac{\tau\mu}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - \frac{\mu}{2}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right)}, \\ \big(M_{\phi_3} f\big)(\mathbf{p}) &= e^{i\frac{\tau}{2\mu}\langle \mathbf{p},\mathbf{p}\rangle} f(\mathbf{p}), \\ \big(M_{\phi_2} f\big)(\mathbf{p}) &= e^{i\left\langle R^{-1}\mathbf{u},\mathbf{p}\right\rangle} f(\mathbf{p}), \\ \big(M_{\phi_1} f\big)(\mathbf{p}) &= e^{-i\tau\left\langle R^{-1}\mathbf{v},\mathbf{p}\right\rangle} f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

és ekkor az (5.15) egyenletben szereplő operátor a

$$V^{\mu}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} = \alpha M_{\phi_3} M_{\phi_2} M_{\phi_1} L_{-\mu R^{-1}\mathbf{v}} K_R$$

alakot ölti. A valós térbeli ábrázoló operátor pedig

$$W^{\mu}_{(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})} = \alpha \underbrace{\mathcal{F} M_{\phi_3} \mathcal{F}^{-1}}_{z_5} \underbrace{\mathcal{F} M_{\phi_2} \mathcal{F}^{-1}}_{z_4} \underbrace{\mathcal{F} M_{\phi_1} \mathcal{F}^{-1}}_{z_3} \underbrace{\mathcal{F} L_{-\mu R^{-1}\mathbf{v}} \mathcal{F}^{-1}}_{z_2} \underbrace{\mathcal{F} K_R \mathcal{F}^{-1}}_{z_1}$$

lesz. Ki fogjuk számolni az összes operátor Fourier-transzformáltját. Először a z_2, z_3 és z_4 operátorok meghatározását végezzük el. Legyen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{K})$ tetszőleges függvény, ekkor minden $\mathbf{u} \in \mathbb{P}^n$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\mathcal{F}(\mathbf{p} \mapsto e^{i\langle \mathbf{u},\mathbf{p}\rangle} f(\mathbf{p})) = L_{\mathbf{u}}(\mathcal{F} f)$$

hiszen

$$\mathcal{F}(\mathbf{p} \mapsto e^{i\langle \mathbf{u},\mathbf{p}\rangle} f(\mathbf{p}))(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{p}) e^{-i\langle \mathbf{u},\mathbf{p}\rangle} e^{i\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{p} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{p}) e^{i\langle \mathbf{p},\mathbf{x}-\mathbf{u}\rangle} d\mathbf{p} = (\mathcal{F}f)(\mathbf{x}-\mathbf{u})$$

amiből az

$$\begin{aligned} z_2 f(\mathbf{x}) &= e^{-i\left\langle \mu R^{-1}\mathbf{v},\mathbf{x}\right\rangle} f(\mathbf{x}), \\ z_3 f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} + \tau R^{-1}\mathbf{v}), \\ z_4 f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} - R^{-1}\mathbf{u}) \end{aligned}$$

egyenlőségek következnek. Mivel a folytonos, kompakt tartójú függvények sűrűn vannak az $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ függvénytéren, tehát ezek az egyenlőségek igazak lesznek az egész $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ téren.

Helyettesítéses integrállal megmutatható, hogy $\mathcal{F}K_R\mathcal{F}^{-1} = |\det R| K_{(R^*)^{-1}}$, amiből, mivel $R \in SO(n)$ unitér, a

$$z_1 = K_R$$

egyenlet adódik.

Parciális integrálásokkal megmutatható, hogy ha $q(p_1, \dots, p_n) = \sum c_j p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ egy tetszőleges polinom, akkor $\mathcal{F}M_q\mathcal{F}^{-1} = \sum c_j(-i\partial_1)^{\alpha_1} \dots (-i\partial_n)^{\alpha_n}$, ahol ∂_i jelöli a p_i változó szerinti differenciálást. Ez alapján

$$z_5 = e^{-i\frac{\tau}{2\mu}\Delta},$$

ahol Δ jelöli a Laplace-operátort.

A valós térbeli ábrázoló operátor ezek alapján

$$W^{\mu}_{(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{0})} = e^{-i\frac{\tau}{2\mu}\Delta}, \tag{5.16}$$

$$\left(W^{\mu}_{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\right)(\mathbf{x}) = e^{-i\mu\left(\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right)} f(R^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{u})). \tag{5.17}$$

5.10. Kapcsolat a Schrödinger-egyenlettel

A 2.2 tétel alapján minden egyparaméteres részcsoport folytonos unitér ábrázolásához egyértelműen létezik egy önadjungált operátor, ami az ábrázolást generálja. Az (5.16) egyenlet alapján az időfejlődés infinitezimális generátora

$$H = \frac{-1}{2\mu}\Delta.$$

Legyen $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ analitikus függvény, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pont. Jelölje $\mathbf{e}_i$ az i-dik bázisvektort az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisából. Ekkor az $\mathbf{e}_j$ irányú egyparaméteres részcsoport a $t\mathbf{e}_j$ alakú pontokból áll alkalmasan kicsi $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor

$$f(\mathbf{b} + t\mathbf{e}_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_j^k f(\mathbf{b})}{k!} t^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial_j^k}{k!} t^k \right) f(\mathbf{b}) = e^{t\partial_j} f(\mathbf{b}),$$

tehát, ha P_j jelöli az $\mathbf{e}_j$ irányú eltolások infinitezimális generátorát, akkor

$$P_j = -i\partial_j.$$

Az időfejlődés infinitezimális generátorát összehasonlítva az eltolások infinitezimális generátorával, a

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^2}{2\mu}$$

egyenlőség adódik. Mivel az eltolások infinitezimális generátora az impulzus, így azt kaptuk eredményül, hogy az időfejlődés infinitezimális generátora a teljes kinetikus energia. Ebből az összefüggésből látjuk, hogy a μ paraméter valóban a tömeg.

6. Összefoglalás

Az előző fejezetben a négy és több térdimenziós Galilei-csoport összes folytonos, irreducibilis projektív ábrázolását sikerült visszavezetnünk egy kompakt Lie-csoport, az $SO(n)$ unitér ábrázolásaira. Ez egy sokkal egyszerűbb feladat, és minden n értékekre jól ismert.

Ennek az eredménynek abban van nagy jelentősége, hogy megadja egy négy és több térdimenziós kvantumos világban egy elemi részecskét milyen paraméterekkel tudunk jellemezni. Az egyik ilyen paraméter a tömeg, ami egy pozitív valós szám. A tömeg tehát a kommutátor-kociklusok gyenge kohomológia-osztályainak jellemző paramértere. A másik jellemző paraméter pedig az $SO(n)$ univerzális fedőcsoportjának véges dimenziós unitér ábrázolásából származik. Ezt $n = 3$ esetén spinnek nevezzük, nagyobb n értékekre már bonyolultabb a megadása, de ismert minden n értékre. Tehát a 'spin' eredete a forgáscsoport felőcsoportjának ábrázolása.

Ezzel a dolgozattal teljessé vált a Galilei csoportok projektív reprezentációjának elmélete, minden legalább két térdimenziós Galilei csoport összes folytonos, irreducibilis projektív ábrázolása ismert. Ezen dolgozat, valamint [1] alapján az ábrázoló operátor három és több dimenzióban hasonló szerkezetű, minden $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \in SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ és $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$ tetszőleges függvény esetén, ha $SO(n)$ fedőcsoportját triviális módon ábrázoljuk egy $\mathcal{K}$ Hilbert-téren, akkor az ábrázoló operátor

$$\begin{aligned} W^{\mu}_{(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{0})} &= e^{-i\frac{\tau}{2\mu}\Delta}, \\ \big(W^{\mu}_{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{u})} f\big)(x) &= e^{-i\mu\left(\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right)} f(R^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{u})) \end{aligned}$$

lesz. A két térdimenziós Galilei-csoport esetén az ábrázoló operátor bonyolultabb szerkezetű, ugyanis már a kommutátor kociklusok kohomológia-osztályai sem egy, hanem három számmal indexelhetők, részletesen a [3] foglalkozik ezzel.

Tehát ezáltal ismertté vált a tetszőleges véges térdimenzióval rendelkező nemrelativisztikus kvantumos világban a Galilei-transzformációkat leíró operátorok alakja, és ezekből további következtetéseket vonhatunk le, például a Schrödinger-egyenletre vonatkozóan.

A dolgozat utolsó fejezetében megmutattam, hogy csupán a kvantummechanika két alapvető axiómáját felhasználva elkészítve a téridő-model ábrázolását, akkor annak közvetlen következménye a Schrödinger-egyenlet, azaz hogy az időfejlődés infinitezimális generátora a teljes energia.

7. Kitekintés

Kitekintésként két irányt tudok megfogalmazni, az egyik a Galilei-csoportok ábrázolásával kapcsolatos, a másik irány pedig ennek az ábrázoláselméleti módszernek az alkalmazása más csoportokon.

A dolgozatom végén, amikor megadtam a valós térbeli operátorokat az addigi általános esetről áttértem egy speciális esetre, amikor az $SO(n)$ fedőcsoportját triviális módon ábrázolom. Egy fejlődési lehetőség az, hogy a fedőcsoport tetszőleges ábrázolása esetén megadjuk az operátorokat, és ebben az esetben kiderül, hogy magasabb dimenziókban mi a 'spin'. Ehhez azonban szükséges az $SO(n)$ fedőcsoportjának összes véges dimenziós unitér ábrázolásának ismerete. Egy másik fejlődési lehetőség, hogy a csoport-szimmetriákhoz hozzáveszünk további belső szimmetriákat. Jelentek meg olyan cikkek, amik ezen belső szimmetriák alapján levezetik a Maxwell-egyenleteket.

A bemutatott és a Galilei-csoporton alkalmazott módszer nagy erőssége, hogy elegendő hozzá a téridő szimmetria-csoportjának ismerete, és ez alapján messzemenő fizikai következtetéseket lehet levonni. A nemrelativisztikus esetben ugyan a Schrödinger-egyenletet sokféle analógia alapján le lehet vezetni, azonban relativisztikus esetben már sokkal nehezebb a feladat, a Lorentz- és a Poincaré-csoport projektív ábrázolása nélkül nehezen juthatunk bármilyen eredményre. Azonban amennyiben megadjuk a projektív ábrázolásokat, következtetéseket vonhatunk le az elemi részecskékről. Például kiderül, hogy a relativisztikus és a nemrelativisztikus tömeg máshol jelenik meg a számításokban, míg a Galilei-csoport esetén a kommutátor kociklusok kohomológiaosztályait indexeli a tömeg, addig a Poincaré-csoport esetén a pályákat. Valamint a Poincaré-csoport ábrázolásából az is kiderül, hogy egy nemnulla tömegű részecskét a tömege és a spinje jellemez, viszont vannak nulla tömegű részecskék, amiket a helicitásuk jellemez.

A módszer mindig alkalmazható, ha ismert a téridő-model szimmetria-csoportja. Ez akár lehet egy görbült sokaság is, ha kíváncsiak vagyunk az adott téridőn élő kvantumos elemi részecskék tulajdonságaira, valamint a szimmetriát megadó operátorokra, csupán meg kell keresni az unitér kociklusokat, a kibővített csoportot valamit azzak az unitér ábrázolásait.

Hivatkozások

[1] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory, Second Edition*, Chapter 8, Springer, New York, 2007.

[2] Matolcsi T., Székely S., *Matematikai fizika I.*, VI-VII. felyezet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[3] D. R. Grigore, ,,The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in 1+2 dimensions" *Journal of Mathematical Physics*, vol. 37, no. 1, pp. 460–473, 1996.

[4] Andai Attila, diplomamunka, *A kvantummechanika matematikai alapjairól*, ELTE Természettudományi Kar, Alkalmazott Analízis Tanszék, 1998.

[5] Kristóf János, *A matematikai analízis elemei IV.*, 419–424. oldal és 304–306. oldal, ELTE, Budapest, 1998.