Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából

Lovas Attila

BME TTK Matematikus MSc. 1. évf.

2012. november 14.

Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából

Lovas Attila

Vázlat:

– Történeti áttekintés
– Nemkommutatív (kvantum) valószínűségelmélet
– Az állapottér geometriája:
    Az állapottér mint Riemann-sokaság
    Kvantum Fisher információk
– A kvantum kovariancia mint lehetséges alsó becslés
– Szimmetrizált és antiszimmetrizált f-kovariancia
– Az általános határozatlansági reláció
– Összefoglalás

Lovas Attila

BME, TTK TDK Matematika Szekció 2012

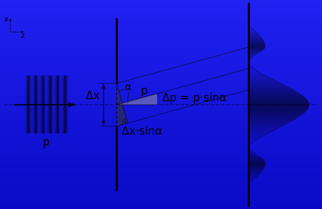
Werner Heisenberg (1927).

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

– $\Delta x\,[\mathrm{m}]$ a hely mérés bizonytalansága.

–$\Delta p \left[\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}\right]$ az impulzus mérés bizonytalansága.

– $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ a Planck-állandó.



Határozatlansági-*elv*

Képek forrása: http://de.wikipedia.org/wiki/Unbestimmtheitsrelation

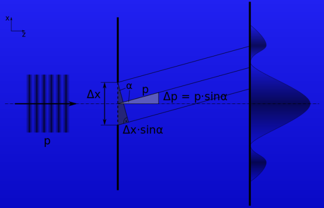
Werner Heisenberg (1927).

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

– Δx [m] a hely mérés bizonytalansága.

–$\Delta p \left[\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}\right]$ az impulzus mérés bizonytalansága.

– $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ a Planck-állandó.



Határozatlansági-*elv*

Képek forrása:
http://de.wikipedia.org/wiki/Unbestimmtheitsrelation

E. H. Kennard, Hermann Weyl (1927).

– Alsó becslés a hely és az impulzus szórásának (σ_x, σ_p) szorzatára.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Robertson (1929).

– Általánosítás tetszőleges fizikai mennyiségekre.

Ervin Schrödinger (1930).

$\Rightarrow$ Nemkommutatív valószínűségelmélet.

E. H. Kennard, Hermann Weyl (1927).

– Alsó becslés a hely és az impulzus szórásának (σ_x, σ_p) szorzatára.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Ez már korrekt tétel!

Robertson (1929).

– Általánosítás tetszőleges fizikai mennyiségekre.

Ervin Schrödinger (1930).

$\Rightarrow$ Nemkommutatív valószínűségelmélet.

E. H. Kennard, Hermann Weyl (1927).

– Alsó becslés a hely és az impulzus szórásának (σ_x, σ_p) szorzatára.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Ez már korrekt tétel!

Robertson (1929).

– Általánosítás tetszőleges fizikai mennyiségekre.

Ervin Schrödinger (1930).

$\Rightarrow$ Nemkommutatív valószínűségelmélet.

E. H. Kennard, Hermann Weyl (1927).

– Alsó becslés a hely és az impulzus szórásának (σ_x, σ_p) szorzatára.

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Ez már korrekt tétel!

Robertson (1929).

– Általánosítás tetszőleges fizikai mennyiségekre.

Ervin Schrödinger (1930).

$\Rightarrow$ Nemkommutatív valószínűségelmélet.

$\mathcal{H}_n$ egy rögzített, n-dimenziós Hilbert-tér.

1. Az *állapottér* (sűrűség mátrixok)

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D \geq 0,\, D = D^{+},\, \mathrm{Tr}(D) = 1 \right\}.$$

2. *Fizikai mennyiségek* avagy *obszervábilisek*

3. Extremális pontok: *tiszta állapotok.*

4. Skaláris szorzat az állapottéren

$$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(DAB).$$

$\mathcal{H}_n$ egy rögzített, n-dimenziós Hilbert-tér.

1. Az *állapottér* (sűrűség mátrixok)

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D \geq 0,\, D = D^{+},\, \mathrm{Tr}(D) = 1 \right\}.$$

2. *Fizikai menynyiségek* avagy *obszervábilisek*

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D = D^{+} \right\}.$$

3. Extremális pontok: *tiszta állapotok.*

4. Skaláris szorzat az állapottéren

$$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(DAB).$$

$\mathcal{H}_n$ egy rögzített, n-dimenziós Hilbert-tér.

1. Az *állapottér* (sűrűség mátrixok)

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D \geq 0,\, D = D^+,\, \mathrm{Tr}(D) = 1 \right\}.$$

2. *Fizikai menynyiségek* avagy *obszervábilisek*

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D = D^+ \right\}.$$

3. Extremális pontok: *tiszta állapotok*.

4. Skaláris szorzat az állapottéren

$$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(DAB).$$

$\mathcal{H}_n$ egy rögzített, n-dimenziós Hilbert-tér.

1. Az *állapottér* (sűrűség mátrixok)

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D \geq 0,\, D = D^+,\, \mathrm{Tr}(D) = 1 \right\}.$$

2. *Fizikai menynyiségek* avagy *obszervábilisek*

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \left\{ D \,\middle|\, D \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n),\, D = D^+ \right\}.$$

3. Extremális pontok: *tiszta állapotok*.

4. Skaláris szorzat az állapottéren

$$(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(DAB).$$

Az A fizikai mennyiség *várható értéke* a D állapotban

$$\mathbb{E}_D A := \mathrm{Tr}(DA).$$

$$„\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y”$$

Definíció. Az A és B fizikai mennyiségek *kovarianciája* a D állapotban

$$\mathrm{Cov}^s_D(A,B) := \frac{\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)}{2} - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB).$$

Az A fizikai mennyiség *varianciája* a D állapotban

$$\mathrm{Var}_D(A) := \mathrm{Cov}^s_D(A,A).$$

Az A fizikai mennyiség *várható értéke* a D állapotban

$$\mathbb{E}_D A := \operatorname{Tr}(DA).$$

$$„\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y"$$

Definíció: Az A és B fizikai mennyiségek *kovarianciája*

$$\operatorname{Cov}_D^s(A,B) := \frac{\operatorname{Tr}(DAB) + \operatorname{Tr}(DBA)}{2} - \operatorname{Tr}(DA)\operatorname{Tr}(DB).$$

Az A fizikai mennyiség *varianciája* a D állapotban

$$\operatorname{Var}_D(A) := \operatorname{Cov}_D^s(A,A).$$

Az A fizikai mennyiség *várható értéke* a D állapotban

$$\mathbb{E}_D A := \mathrm{Tr}(DA).$$

$$\text{„}\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y\text{”}$$

Definíció: Az A és B fizikai mennyiségek *kovarianciája* a D állapotban

$$\mathrm{Cov}_D^s(A,B) := \frac{\mathrm{Tr}(DAB) + \mathrm{Tr}(DBA)}{2} - \mathrm{Tr}(DA)\,\mathrm{Tr}(DB).$$

Az A fizikai mennyiség *varianciája* a D állapotban

$$\mathrm{Var}_D(A) := \mathrm{Cov}_D^s(A,A).$$

A Schrödinger-egyenlőtlenség (1930).

– A és B fizikai mennyiségek, D pedig egy állapot

$$\mathrm{Var}_D(A)\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(D[A,B])|^2 + \mathrm{Cov}_D(A,B)^2.$$

– Egy általánosításra alkalmasabb forma:

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}^s_D(A,A) & \mathrm{Cov}^s_D(A,B) \\ \mathrm{Cov}^s_D(B,A) & \mathrm{Cov}^s_D(B,B) \end{pmatrix} \geq$$

$$\geq \det\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[A,A]) & -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[A,B]) \\ -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[B,A]) & -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(D[B,B]) \end{pmatrix}.$$

A Schrödinger-egyenlőtlenség (1930).

– A és B fizikai mennyiségek, D pedig egy állapot

$$\mathrm{Var}_D(A)\mathrm{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(D[A,B])|^2 + \mathrm{Cov}_D(A,B)^2.$$

– Egy általánosításra alkalmasabb forma

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}_D^s(A,A) & \mathrm{Cov}_D^s(A,B) \\ \mathrm{Cov}_D^s(B,A) & \mathrm{Cov}_D^s(B,B) \end{pmatrix} \geq$$

$$\geq \det\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(D[A,A]) & -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(D[A,B]) \\ -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(D[B,A]) & -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(D[B,B]) \end{pmatrix}.$$

A Robertson-féle általánosítás (1934).

$\{A_k\}_{k=1}^N$ véges sok fizikai mennyiség, D állapot

$$\Rightarrow \det\left(\left[\mathrm{Cov}_D^s(A_k, A_l)\right]_{k,l=1\ldots,N}\right) \geq$$
$$\geq \det\left(\left[-\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(D[A_k, A_l])\right]_{k,l=1\ldots,N}\right).$$

$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} \subseteq \mathbb{R}^{n^2} \Rightarrow$ Az állapottér belseje

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} := \mathrm{Int}\left(\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}\right).$$

– Nyílt halmaz az $\mathbb{R}^{n^2}$ térben.

– Sima sokasággá tehető.

– Érintőtere egy D pontban

$$T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \cong \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} := \{A | A \in \mathcal{M}_{n,sa},\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

Az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ operátormonoton függvény

– *szimmetrikus*, ha

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

– *normált*, ha $f(1)=1$.

– Két fontos részhalmaz:

$$\mathcal{F}_{op}^{(r)} = \{f\in\mathcal{F}_{op} | f(0)\neq 0\}$$

$$\mathcal{F}_{op}^{(n)} = \{f\in\mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}.$$

Definíció: Egy $m : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \times \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ folytonos függvény *mátrixközép*, ha

i. $m(A, A) = A$,

ii. $m(A, B) = m(B, A)$,

iii. $A \leq B \Rightarrow A \leq m(A, B) \leq B$,

iv. $(\forall P \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad Pm(A, B)P^* \leq (PAP^*, PBP^*)$.

Jelölés: $\mathcal{M}_{op}$

$$A \nabla B := \frac{1}{2}(A + B)$$

$$A \# B := A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) B^{\frac{1}{2}}$$

$$A ! B := 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

Definíció: Egy $m : \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \times \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \to \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ folytonos függvény *mátrixközép*, ha

i. $m(A, A) = A$,

ii. $m(A, B) = m(B, A)$,

iii. $A \leq B \Rightarrow A \leq m(A, B) \leq B$,

iv. $(\forall P \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad Pm(A, B)P^* \leq (PAP^*, PBP^*)$.

Jelölés: $\mathcal{M}_{op}$

$$A \nabla B := \frac{1}{2}(A + B)$$

$$A \# B := A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) B^{\frac{1}{2}}$$

$$A ! B := 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

Petz osztályozási tétele

A *Monoton metrikacsaládok* és a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények 1-1 megfeleltetésben állnak egymással.

$$(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+})(\forall A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)})$$
$$L_{n,D}(A) := DA \quad R_{n,D} := AD$$

$$\langle A, B\rangle_{D,f} = \mathrm{Tr}\left[A \circ \left(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D} R_{n,D}^{-1}) R_{n,D}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \circ B\right]$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ radiálisan kiterjed a $\partial \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ peremre $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$

Petz osztályozási tétele

A *Monoton metrikacsaládok* és a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények 1-1 megfeleltetésben állnak egymással.

$$(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+})(\forall A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)})$$

$$L_{n,D}(A) := DA \quad R_{n,D} := AD$$

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \mathrm{Tr}\left[A \circ \left(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D} R_{n,D}^{-1}) R_{n,D}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \circ B \right]$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ radiálisan kiterjed a $\partial \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ peremre $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$

Definíció: Ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A,B) := \frac{f(0)}{2} \langle i[D,A], i[D,B] \rangle_{D,f}.$$

Tétel (Gibilisco): Ha $\{A_k\}_{k=1}^{N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ obszervábilisek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\det\left(\left[\mathrm{Cov}_D^s(A_k, A_l)\right]_{k,l=1,\dots,N}\right) \geq$$
$$\geq \det\left(\left[\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l)\right]_{k,l=1,\dots,N}\right).$$

– Luo, Zhang (2004), $N = 2$, Wigner-Yanase metrika.

– Gibilisco, Imparato, Isola (2007), $N = 3$, általános f.

Definíció: Ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A,B) := \frac{f(0)}{2} \langle i[D,A], i[D,B] \rangle_{D,f}.$$

Tétel (Gibilisco): Ha $\{A_k\}_{k=1}^{N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ obszervábilisek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\det\left([\mathrm{Cov}_D^s(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N} \right) \geq$$
$$\geq \det\left(\left[\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l)\right]_{k,l=1,\dots,N} \right).$$

– Luo, Zhang (2004), $N = 2$, Wigner-Yanase metrika.

– Gibilisco, Imparato, Isola (2007), $N = 3$, általános f.

Definíció: Ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A,B) := \frac{f(0)}{2} \langle i[D,A], i[D,B] \rangle_{D,f}.$$

Tétel (Gibilisco): Ha $\{A_k\}_{k=1}^{N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ obszervábilisek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\det\left([\mathrm{Cov}_D^s(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N} \right) \geq$$
$$\geq \det\left(\left[\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l) \right]_{k,l=1,\dots,N} \right).$$

– Luo, Zhang (2004), $N = 2$, Wigner-Yanase metrika.

– Gibilisco, Imparato, Isola (2007), $N = 3$, általános f.

Tétel (Gibilisco): Ha $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ obszervábilisek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények, akkor

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\det\left([\mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}\right) \geq$$
$$\geq \det\left([\mathrm{Cov}_{D,g}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}\right).$$

Számolást könnyítő feltevések:

I. Fizikai mennyiségek centráltak: $\mathbb{E}_D A = 0$.

II.A D sűrűségoperátor mátrixa diagonális.

Jelölések:

1. $\{\lambda_k\}_{k=1,\ldots,n}$ a $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ sűrűségoperátor mátrixának sajátértékei.

2. Az $\{e_k\}_{k=1,\ldots,n}$ vektorrendszer a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokból képzett ortonormált bázis a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren.

Tétel: Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} B_{lk} \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}.$$

Bizonyítás (vázlat):

$$e_k \vee e_l := \frac{1}{2}(e_k \odot e_l + e_l \odot e_k) \quad e_k \wedge e_l := \frac{1}{2i}(e_k \odot e_l - e_l \odot e_k)$$

2. Riesz–Dunford-féle operátorkalkulus $\Rightarrow$

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f} \quad \langle e_i \vee e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f}$$
$$\langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} \ .$$

3. A metrika bilineáris.

Tétel: Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} B_{lk} \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}.$$

Bizonyítás (vázlat):

1. Legyen $\forall (1 \leq k, l \leq n)$ $[e_i \circledcirc e_j]_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$.

$$e_k \vee e_l := \frac{1}{2}(e_k \circledcirc e_l + e_l \circledcirc e_k) \quad e_k \wedge e_l := \frac{1}{2i}(e_k \circledcirc e_l - e_l \circledcirc e_k)$$

2. Riesz–Dunford-féle operátorkalkulus $\Rightarrow$

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f} \qquad \langle e_i \vee e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f}$$
$$\langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} \;.$$

3. A metrika bilineáris.

Tétel: Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} B_{lk} \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}.$$

Bizonyítás (vázlat):

1. Legyen $\forall (1 \leq k, l \leq n)$ $[e_i \circledcirc e_j]_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$.

$$e_k \vee e_l := \frac{1}{2}(e_k \circledcirc e_l + e_l \circledcirc e_k) \quad e_k \wedge e_l := \frac{1}{2i}(e_k \circledcirc e_l - e_l \circledcirc e_k)$$

2. Riesz–Dunford-féle operátorkalkulus $\Rightarrow$

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f} \qquad \langle e_i \vee e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f}$$
$$\langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f}\ .$$

3. A metrika bilineáris.

Tétel: Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény, akkor

$$\langle A, B\rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} B_{lk} \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}.$$

Bizonyítás (vázlat):

1. Legyen $\forall (1 \leq k, l \leq n)\ [e_i \circledcirc e_j]_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$.

$$e_k \vee e_l := \frac{1}{2}(e_k \circledcirc e_l + e_l \circledcirc e_k) \quad e_k \wedge e_l := \frac{1}{2i}(e_k \circledcirc e_l - e_l \circledcirc e_k)$$

2. Riesz–Dunford-féle operátorkalkulus $\Rightarrow$

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\rangle_{D,f} \quad \langle e_i \vee e_j, e_k \wedge e_l\rangle_{D,f}$$
$$\langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l\rangle_{D,f}\ .$$

3. A metrika bilineáris.

Alkalmazások

I. Az antiszimmetrizált (kvantum) f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{as}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle i[D,A], i[D,B]\rangle_{D,f} = \\ = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k-\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

II. A szimmetrizált f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{s}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle \{D,A\}, \{D,B\}\rangle_{D,f} = \\ = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k+\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

$\{X,Y\} := XY + YX$ az antikommutátor.

Alkalmazások

I. Az antiszimmetrizált (kvantum) f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{as}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle i[D,A], i[D,B]\rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k-\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

II. A szimmetrizált f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{s}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle \{D,A\}, \{D,B\}\rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k+\lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

$\{X,Y\} := XY + YX$ az antikommutátor.

Alkalmazások

I. Az antiszimmetrizált (kvantum) f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{as}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle i[D,A], i[D,B]\rangle_{D,f} = \\ = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

II. A szimmetrizált f-kovariancia

$$\mathrm{Cov}^{s}_{D,f}(A,B) = \frac{f(0)}{2}\langle \{D,A\}, \{D,B\}\rangle_{D,f} = \\ = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{f(0)(\lambda_k + \lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)} A_{kl}B_{lk}.$$

$\{X,Y\} := XY + YX$ az antikommutátor.

A szimmetrizált f-kovariancia az

$$f = \frac{1+x}{2}$$

speciális esetben

$$\mathrm{Cov}^s_{D,f}(A,B) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} A_{kl} B_{lk}.$$

Ez nem más, mint $\mathrm{Cov}^s_D(A,B)$!

Állítás: Ha $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvény, akkor

$$(D, A, B) \mapsto \mathfrak{Cov}_{D,g}(A, B) := \sum_{k,l=1}^{n} g(\lambda_k, \lambda_l) A_{kl} B_{lk}$$

Riemann-metrika.

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, szimmetrikus és pozitív definit, akkor

$$\det (A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \det (A)^{\frac{1}{n}} + \det (B)^{\frac{1}{n}} .$$

Az ún. Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség.

Állítás: Ha $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvény, akkor

$$(D, A, B) \mapsto \mathfrak{Cov}_{D,g}(A, B) := \sum_{k,l=1}^{n} g(\lambda_k, \lambda_l) A_{kl} B_{lk}$$

Riemann-metrika.

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, szimmetrikus és pozitív definit, akkor

$$\det{(A+B)}^{\frac{1}{n}} \geq \det{(A)}^{\frac{1}{n}} + \det{(B)}^{\frac{1}{n}}.$$

Az ún. Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség.

Az általános határozatlansági reláció

Definíció: Ha $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek véges rendszere és $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvény, akkor

$$(\forall 1 \leq i, j \leq N)\, [\mathfrak{Cov}_{D,g}]_{ij} := \mathfrak{Cov}_{D,g}(A_i, A_j).$$

Tétel: Ha $g_1, g_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvények, akkor

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \quad g_1(x,y) \geq g_2(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$$

Az általános határozatlansági reláció

Definíció: Ha $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek véges rendszere és $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvény, akkor

$$(\forall 1 \leq i, j \leq N)\, [\mathfrak{Cov}_{D,g}]_{ij} := \mathfrak{Cov}_{D,g}(A_i, A_j).$$

Tétel: Ha $g_1, g_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szimmetrikus sima függvények, akkor

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \quad g_1(x,y) \geq g_2(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$$

Mikor áll egyenlőség?

Ha $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\, g_1(x,x) = g_2(x,x)$, akkor

$$\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$$

$$\Updownarrow$$

$$\{A_k\}_{k=1,\ldots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa} \text{ lineárisan összefüggő.}$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a Brunn–Minkowski-egyenlőséget.

Alkalmazás

Definíció: Az A és B fizikai mennyiségek *kevert f-kovarianciája* a D állapotban

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{mix}(A,B) := -\frac{if(0)}{2}\left\langle [AD+iDA],[BD+iDB]\right\rangle_{D,f}.$$

Állítás:

$$\mathrm{Cov}_{D,f}^{mix}(A,B) = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}B_{lk}\frac{f(0)(\lambda_k^2+\lambda_l^2)}{2m_f(\lambda_k,\lambda_l)}$$

Új becslést konstruálunk:

Legyen f szimmetrikus, normált, operátormonoton és $f(0) \neq 0$.

$$(\forall x \in [0,1]) \quad \frac{1+x^2}{1+x} \leq \frac{f(x)}{f(0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Cov}_D^s(A,B) \geq \mathrm{Cov}_{D,f}^{mix}(A,B) \geq \mathrm{Cov}_{D,f}^{as}(A,B)$$

Tetszőleges A, B fizikai mennyiségekre és D állapotra.

Összefoglalás

– Előállítottuk a kovarianciát egy adott bázisban.

– Megmutattuk, hogy a közönséges kovariancia is metrikából származtatható.

– Általánosítottuk a közönséges kovarianciát.

– Bizonyítottuk az általános határozatlansági relációt

– Ennek segítségével egy élesebb határozatlansági relációt konstruáltunk.

– Világos geometriai tartalmat kapcsoltunk a határozatlansági relációkhoz.

További nyitott kérdések

– Az A és B fizikai mennyiségek *komplex f-kovarianciája* a D állapotban a $\theta \in [0, 2\pi]$ paraméter érték mellett

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{C}}_{D,f}(A,B) := \\ = -\frac{f(0)e^{i\theta}}{2} \left\langle [AD + e^{i\theta} DA], [BD + e^{i\theta} DB] \right\rangle_{D,f}.$$

– D függés?
– Asszimptotika?
– Jobb oldal mint kommutátorok alkalmas polinomja: „kommutációs sor”.

$\vdots$

Köszönöm a figyelmet!

- F. Hiai, D. Petz and G. Toth. Curvature in the geometry of canonical correlation. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **32**, 235-249, 1996.
- S. Luo and Q. Zhang, Correction to „On skew information” . *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4432, 2005.
- P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle. arXiv:math-ph/0706.0791v1, 2007.
- P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. Uncertainty principle and quantum Fisher information II. arXiv:math-ph/0701062v3, 2007.
- Attila Andai. Uncertainty principle with quantum Fisher information. JMP **49**, 012106, 2008.