BME Matematikai Intézet

Analízis Tanszék

Andai Attila:

Az *Információgeometria a kvantummechanikában* című doktori értekezés tézisei

Témavezető: Petz Dénes
matematikai tudományok doktora, egyetemi tanár

2003

1 Bevezetés

Az információgeometria nemkommutatív általánosítását – szórványos kezdeményezésektől eltekintve – az 1990-es években kezdték kidolgozni. Ez a tudományterület, mint ahogy a neve is sugallja, a matematika meglehetősen különböző ágait használja eszközként. A statisztikai alapot a Fisher által bevezetett információs mennyiség, a Fisher-információ szolgáltatja. A differenciálgeometria statisztikai alkalmazását Rao kezdeményezte 1945-ben, mikor javasolta a Fisher-féle információs mátrix Riemann-metrikaként való használatát [17]. Ezáltal bizonyos statisztikai modellek olyan Riemann-sokaságnak tekinthetők, amelyben a modell differenciálgeometriai jellemzői statisztikai jelentést nyernek [5]. Ezt a módszert sikeresen lehet alkalmazni a fizika bizonyos területein is; a Fisher-információ mélyebb fizikai alkalmazásait mutatja be például a [11] könyv. A statisztika és a differenciálgeometria ezen ötvözetét nevezik információgeometriának. Az 1920-as években körvonalazódó kvantummechanika matematikai eszköztárában jelent meg a valószínűségszámítás újfajta, általánosabb megközelítése, melyet ma nemkommutatív valószínűségszámításnak neveznek [13]. A klasszikus statisztikai modell fogalma, mely szorosan kapcsolódik a Kolmogorov-féle valószínűségszámítás fogalmaihoz, általánosítható a nemkommutatív valószínűségszámítás esetére is [4]. Ezt az általánosított statisztikai modellt szintén Riemann-sokasággá lehet tenni [14]. Az így nyert matematikai objektumok képezik a nemkommutatív információgeometria vizsgálatának tárgyát. A kvantummechanikai állapottéren értelmezett Riemann-metrikák statisztikus fizikai alkalmazhatóságára számos példa ismert, Balian 1986-ban megjelent [6] cikke azonban úttörőnek tekinthető ezen a téren.

2 A dolgozat tematikája

A nemkommutatív információgeometria bemutatásához elengendhetetlen a matematika néhány fejezetének a nagyon vázlatos, célorientált áttekintése. Főként a statisztika, a valószínűségszámítás, a differenciálgeometria és a funkcionálanalízis eszközeit fogom alkalmazni speciális esetekben. A bevezetett alapfogalmakat, illetve tételeket gyakran (egymásra épülő) példákon keresztül mutatom be.

A nemkommutatív információgeometria bizonyos területein elért újabb eredmények kifejtését három, előkészítő jellegű fejezet előzi meg. Az első fejezetben a statisztika és a klasszikus valószínűségszámítás azon alapfogalmait és eredményeit tekintem át, amelyeket a későbbiekben jól tudok használni a nemkommutatív esetre való általánosításkor. Először a statisztikai modell fogalmát definiálom, majd példákon keresztül ismertetem a két főbb modelltípust, az exponenciális, illetve a kevert családot. Majd a statisztikai modellhez rendelt Fisher-féle információt definiálom, és áttekintem ennek főbb tulajdonságait, többek között a paraméterbecslésben központi szerepet játszó Cramér–Rao-tételt. Az entrópia fogalma kapcsán röviden megemlítem a fizikában sokat használt maximálisentrópia-elv eredetét, és bemutatom egy alkalmazását, eljutva így a Gibbs-állapotok fogalmához. Ezután tisztázom az eloszlások közötti távolság (az általánosított divergencia) és a Csiszár-féle f-divergencia fogalmát [8]. Megmutatom, hogy ezen távolságmérőszámok szorosan kapcsolódnak a Fisher-féle információhoz. Végül az eloszlások rendezetlenségére utaló majorizációs relációt mutatom be, és számos ekvivalens feltételt ismertetek a reláció fennállására.

A második fejezet célja a klasszikus információgeometria alapvető eszközeinek a bemutatása. Néhány példától eltekintve a sokaság mindig valamilyen statisztikai modell lesz a fejezet folyamán. A differenciálgeometriai alapfogalmak áttekintése után közelebbről megvizsgálom, hogy milyen kapcsolat van a Riemann-sokaságban lévő gömb térfogatának a sugár szerinti Taylor-sorfejtése és a sokaság görbületét jellemző paraméterek között. Majd megemlítem Cencov tételét [7], mely szerint a diszkrét eloszláson alapuló statisztikai modellt statisztikailag releváns módon lényegében csak egyféleképpen lehet Riemann-sokasággá tenni. A részsokaság és a sokaság görbülete között fennálló kapcsolat lehetőséget teremt arra, hogy a statisztikai modellek görbületét újabb módszerrel is meghatározhassuk. Ezt közelebbről is megvizsgálom a diszkrét és a normális eloszlás esetében. Majd egy újabb – geometriai eredetű – távolságfogalmat definiálok, melyet példaként a többdimenziós normális eloszlás esetében meg is határozok.

A harmadik fejezet az információgeometria nemkommutatív (kvantummechanikai) általánosításról szól. A kvantummechanika és matematikai modellje közti kapcsolatot bemutató első rész után a klasszikus valószínűségi eloszlást általánosítom, eljutva így a kvantummechanikai állapot fogalmához. Ezen állapotokra is értelmezhető az entrópiafüggvény és a majorizációs reláció továbbá a (kvantummechanikai) maximálisentrópia-elvből származtathatók (a klasszikus esethez hasonlóan) a kvantummechanikai Gibbs-állapotok. A statisztikai modell fogalma is egyszerűen definiálható a nemkommutatív esetben, azonban a Fisher-féle információ általánosítása már messze nem egyértelmű. Bemutatom az általánosítás néhány lehetséges változatát, valamint a Cencov-tétel kvantummechanikai megfelelőjét, a Petz-féle osztályozási tételt, mely szerint a kvantummechanikai állapottéren értelmezett statisztikailag releváns Riemann-metrikák bizonyos operátormonoton függvényekkel indexelhetők. Tehát míg a klasszikus esetben egyértelmű a Fisher-féle információ, addig a nemkommutatív esetben sok ilyen Fisher-féle információs mennyiség létezik. Ezek közül az irodalomban leggyakrabban előfordulókat részletesen megvizsgálom; és példákon keresztül mutatom be, hogy a klasszikus Fisher-féle információhoz kapcsolódó egységes kép hogyan aprózódik fel a nemkommutatív esetben: például míg a klasszikus esetben az entrópiafüggvény második deriváltjából is és a megfelelő dimenziójú gömbön értelmezett euklideszi metrikából is egyazon Riemann-metrikát lehetett származtatni a diszkrét statisztikai modelleken, addig a nemkommutatív esetben az első módszer a Kubo–Mori-féle Riemann-metrikát adja, a második pedig a Wigner–Yanase-féle Riemann-metrikát generálja (mely metrikák Petz osztályozási tétele szerint bár a klasszikus Fisher-féle információ releváns általánosításai, azonban nem azonosak). Megemlítem továbbá a Cramér–Rao-egyenlőtlenség egyik általánosítását. A relatív entrópiát szintén ki lehet terjeszteni a nemkommutatív esetre, és a klasszikus esethez hasonlóan igazolható, hogy ennek második deriváltja Fisher-féle információs mennyiséget generál. Ezen relatív entrópiák bizonyos operátorkonvex függvényekkel indexelhetők, és többek között kiderül, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik bizonyos operátorkonvex függvények ekvivalenciaosztályai és a relatív entrópiák által generált Riemann-metrikák között. Végül a nemkommutatív Fisher-féle információ, a nemkommutatív relatív entrópia, az operátorkonvex és az operátormonoton függvények egymással való kapcsolatát tisztázom.

A negyedik fejezetben részletesen megvizsgálom a kvantummechanikai állapotok terének néhány differenciálgeometriailag fontos tulajdonságát abban az esetben, ha a Fisher-féle információnak megfelelő Riemann-metrikával látjuk el az állapotteret. Először a sokaság görbületi tenzorát határozom meg, valamint a belőle számolható skalárgörbületet. Ezen számítás során segítséget jelent, hogy a második fejezetben már meghatároztam a többdimenziós normális eloszlások családjának a görbületét. Majd a skalárgörbület kiszámítása után Petz sejtését, illetve a sejtés bizonyításában eddig elért eredményeket mutatom be. A sejtés szerint a kevertebb (vagy kaotikusabb) állapotban nagyobb az állapottér skalárgörbülete, ha az állapotteret a Kubo–Mori-féle Riemann-metrikával látjuk el. Ennek az igazolását nehezíti, hogy a skalárgörbületet meglehetősen bonyolult formula fejezi ki. Petz sejtése azonban nem igaz, ha az állapotok terét tetszőleges Fisher-féle Riemann-metrikával láthatjuk el, erre adok példát a legegyszerűbb, de még nem triviális kvantumállapotok terén. Majd a bonyolultabb állapottereken numerikus szimulációk segítségével elemzem a skalárgörbület-függvény viselkedését az irodalomban gyakran előforduló Riemann-metrikák esetében. Végül az állapottérben lévő gömb térfogatának sugár szerinti Taylor-sorfejtését határozom meg bizonyos metrikák esetén.

3 Új tudományos eredmények

Az alábbiakban szereplő (tételekre, példákra és egyenletekre vonatkozó) hivatkozások a doktori értekezésben találhatók meg.

1/a. Statisztikai sokaságon a görbület jelentőségét először Efron kezdte vizsgálni 1975-ben [10]. Ez az eredmény (is) motiválja a statisztikai modellek görbületének a meghatározását. Az egyik legtöbbet vizsgált klasszikus statisztikai modell a diszkrét eloszlások családja. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $X_n = \{0, \dots, n\}$, ekkor az X_n halmazon értelmezett sűrűségfüggvények n független paraméterrel adhatók meg

$$p(x, \vartheta_0, \dots, \vartheta_n) = \vartheta_i, \text{ ha } x = i, \quad 0 \le i \le n, \tag{1}$$

ahol $\vartheta_0 + \dots + \vartheta_n = 1$. Egy ilyen sűrűségfüggvényt egyértelműen jellemeznek a $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ paraméterek. A valódi n-változós eloszlások halmaza

$$\mathcal{P}_n = \left\{ (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \,\middle|\, \forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 < \vartheta_i < 1, \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i < 1 \right\}. \tag{2}$$

A $\mathcal{P}_n$ halmaz differenciálható sokaság, melyen a Fisher-féle információs mátrix Riemann-metrikát határoz meg. Ennek $g_{ij}^{(\mathrm{F})}$ metrikus tenzora

$$g_{ij}^{(\mathrm{F})}(\underline{\vartheta}) = \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{p(x, \underline{\vartheta})} \frac{\partial p(x, \underline{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial p(x, \underline{\vartheta})}{\partial \vartheta_j} = \delta_{ij} \frac{1}{\vartheta_i} + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k}, \tag{3}$$

ahol $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathcal{P}_n$. Így a $(\mathcal{P}_n, g^{(\mathrm{F})})$ pár Riemann-geometria, a $g^{(\mathrm{F})}$ metrikát pedig Fisher-metrikának nevezzük. Minden $\alpha \in [-1, 1]$ paraméterhez tartozik egy $\nabla^{(\alpha)}$ α-kovariáns deriválás a $\mathcal{P}_n$ téren. Az α-konnexiókat Cencov vezette be, főbb tulajdonságaikat 1982-ben publikálta [7]. (Az $\alpha = 0$ paraméterhez tartozik a Levi–Civita-féle kovariáns deriválás.)

Megadom a $(\mathcal{P}_n, g^{(\mathbf{F})}, \nabla^{(\alpha)})$ téren a Ricci-tenzort explicit alakban (2.7. tétel), valamint a tér skalárgörbületét (2.8. tétel).

Megmutatom, hogy a $(\mathcal{P}_n, g^{(\mathbf{F}),\nabla^{(\alpha)}})$ tér skalárgörbülete pontosan akkor állandó, ha $\alpha = 0$ teljesül.

1/b. Tetszőleges (M, g) Riemann-sokaság esetére 1979-ben Gray és Vanhecke megadta a tetszőleges sokaságbeli pont köré írt adott sugarú gömb térfogatának a sugár szerinti Taylor-sorfejtésének az első néhány tagját [12]. A sorfejtésre vonatkozó eredményük azonban hibás.

Meglehetősen hosszadalmas számolásuk végigkövetése után sikerült megtalálnom a helyes sorfejtést, melyet megemlítek a dolgozatban (2.14. tétel). A $(\mathcal{P}_n, g^{(\mathbf{F})})$ sokaság esetén explicit alakban megadom az említett sorfejtést (2.15. tétel).

2/a. A többváltozós normális eloszlások statisztikai modelljét a Fisher-féle információval Riemann-geometriává lehet tenni. Minden n természetes számra, tekintsük a valós $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit mátrixok halmazát

$$M_n^+ = \left\{ D \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; D = D^*,\ D > 0 \right\} . \tag{4}$$

Ekkor minden $D \in M_n^+$ mártixhoz tartozik egy normális eloszlás, melynek paraméteres sűrűségfüggvénye

$$f : M_n^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (D, \underline{x}) \mapsto f(D, \underline{x}) = \frac{\sqrt{\det D}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \underline{x}, D\underline{x} \rangle \right) . \tag{5}$$

Tetszőleges $D \in M_n^+$ pont esetén a D pontbeli $T_D M_n^+$ érintőtér azonosítható az $n \times n$-es valós, szimmetrikus mátrixok halmazával. Legyen $D \in M_n^+$ és $X, Y \in T_D M_n^+$ érintőtérbeli vektor. Ekkor a $D \in M_n^+$ pontban a Fisher-féle információs mátrix által indukált Riemann-metrikára

$$g^{(\mathrm{F})}(D)(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(D, \underline{x})} \frac{\partial f(D, \underline{x})}{\partial X} \frac{\partial f(D, \underline{x})}{\partial Y} \, \mathrm{d}\, \underline{x} \tag{6}$$

teljesül, ahol $\frac{\partial f(D,\underline{x})}{\partial X} = \frac{\mathrm{d}\, f(D+tX,\underline{x})}{\mathrm{d}\, t} \Big|_{t=0}$.

A $(M_n^+, g^{(\mathbf{F})})$ tér főbb geometriai jellemzőit explicit alakban meghatároztam. Kifejeztem a Riemann-metrikát egyszerű mátrixműveletek segítségével (2.23. tétel), és megadtam a metrika kiszámításának egy egyszerű módját (2.24. tétel). A vizsgált Riemann-geometria Levi–Civita-féle kovariáns deriválását, görbületi tenzorát és a tér skalárgörbületét is meghatároztam (2.232–2.236 egyenletek).

2/b. A diszkrét eloszlások, (speciális) többdimenziós statisztikai modelljét a Fisher-féle információval Riemann-geometriává lehet tenni. Az említett példákban meghatározom a sokaság

geodetikusait és pontjai (azaz eloszlások) között a geodetikus távolságot (2.5. – 2.7. példa).

2/c. Az n dimenziós valós (illetve komplex) Hilbert-tér önadjungált, pozitív, egységnyomú operátorainak a halmazát n-dimenziós valós (illetve komplex) állapottérnek nevezzük, melynek az elemei a valós (illetve komplex) állapotok. Az állapotot gyakran sűrűségi mátrixnak is nevezik. A valós, illetve komplex n-dimenziós állapottér belsejét egyformán $\mathcal{M}_n^+$ jelöli, amennyiben ez nem okoz félreértést. Ez az $\mathcal{M}_n^+$ tér a diszkrét eloszlások halmazának nemkommutatív általánosítása. Az $\mathcal{M}_n^+$ halmaz differenciálható sokaság, melyet többféle statisztikailag releváns metrikával lehet Riemann-geometriává tenni. Ezeket a statisztikai szempontból fontos Riemann-metrikákat monoton metrikáknak nevezzük. (A monoton metrikákat általában $K^{(n)}$-nel jelölöm.) Minden monoton metrika egyértelműen jellemezhető egy $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ operátormonoton függvénnyel, melyre minden pozitív x esetén $f(x) = xf(x^{-1})$ teljesül és $f(1) = 1$. Az f függvényhez tartozó monoton metrikát a $D \in \mathcal{M}_n^+$ pontban az $X, Y \in T_D\mathcal{M}_n^+$ érintővektoron a

$$K_D^{(n),f}(X,Y) = \mathrm{Tr}\Big(X\big(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D}R_{n,D}^{-1})R_{n,D}^{\frac{1}{2}}\big)^{-1}(Y)\Big) \tag{7}$$

kifejezés adja meg, ahol $L_{n,D}$ illetve $R_{n,D}$ az $n \times n$-es mátrixok terén értelmezett, D-vel való balról illetve jobbról szorzás operátora. Az $f(x) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{x})^2$ függvényhez tartozó monoton metrika a $K_{\mathrm{WY}}^{(n)}$ Wigner–Yanase-féle Riemann-metrika.

Megadom a geodetikusok egyenletét a $(\mathcal{M}_n^+, K_{\mathbf{WY}}^{(n)})$ térben, valamint a pontok (kvantumállapotok) közötti geodetikus távolságot (3.11. példa).

3. Az $(\mathcal{M}_n^+, K^{(n)})$ Riemann-tér differenciálgeometriai jellemzőinek a vizsgálata az 1990-es években kezdődött. A sokaság skalárgörbületét először Petz [14] cikke említi, ő ezt az $(\mathcal{M}_2^+, K_{\mathrm{KM}}^{(2)})$ Riemann-sokaság esetére meg is határozta, ahol $K_{\mathrm{KM}}^{(2)}$ az $f(x) = \frac{x-1}{\log x}$ függvényhez tartozó (Kubo–Mori-féle) monoton metrika. A görbületre vonatkozó következő eredményt Petz és Sudár publikálta 1996-ban [16], ahol az $\mathcal{M}_2^+$ tér metszetgörbületeit határozták meg. Az $(\mathcal{M}_n^+, K^{(n)})$ tér skalárgörbületét a Kubo–Mori-metrika mellett valós állapotok esetén Michor, Petz és Andai [3], komplex állapotok esetén pedig Dittmann [9] számolta ki.

A valós állapotokra elvégzett számításokat a dolgozatban kiterjesztem tetszőleges monoton metrikára és komplex állapotokra is. Megmutatom, hogy a kvantumállapotok terén végzett differenciálgeometriai vizsgálódásokat nagymértékben segíti a

többdimenziós normális eloszlások terének differenciálgeometriai ismerete (4.1. rész). Ezzel rámutatok arra, hogy a diszkrét eloszlás nemkommutatív általánosításának és a többdimenziós normális eloszlások családjának a geometriája hasonló szerkezetű.

4/a. Az elemi térfogati forma sorfejtését felhasználva Petz megmutatta, hogy az állapottér skalárgörbülete az állapot statisztikai bizonytalanságával, megkülönböztethetetlenségével van szoros kapcsolatban [15]. Kvantummechanikai tapasztalatok alapján várhatjuk, hogy a kevertebb állapotok kevésbé megkülönböztethetők. A matematika nyelvén ez azt jelenti, hogy a fizikailag, statisztikailag releváns Riemann-metrikákból származó skalárgörbületnek egyfajta monotonitási tulajdonsággal kell rendelkeznie: ha a D_1 állapot kevertebb, mint a D_2 állapot, akkor a $\mathrm{Scal}(D_2) < \mathrm{Scal}(D_1)$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ahol Scal jelöli a skalárgörbületet. Petz sejtése szerint a fenti monotonitási tulajdonság teljesül, ha a kvantumállapotok terét a Kubo–Mori metrikával látjuk el [14]. Petz a 2×2-es mátrixok állapotterén be is bizonyította ezt a sejtését [14]. Ezen túlmenően eddig csak numerikus szimulációkat végeztek a sejtéssel kapcsolatban, amelyek mind megerősítették azt. Érdemes megjegyezni, hogy a klasszikus esetben a sejtés teljesül, hiszen ott a skalárgörbület állandó.

A sejtés bizonyításában eddig elért eredményeimet ismertetem [1] alapján. Megmutatom, hogy a sejtésben szereplő egyenlőtlenséget hogyan lehet több egyszerűbb egyenlőtlenség következményeként értelmezni; és ezen egyszerűbb egyenlőtlenségek közül többet bebizonyítok, a többi egyenlőtlenség teljesülését pedig a Maple-re írt programjaim segítségével valószínűsítem (a 4.2.1.–4.2.3. részben).

4/b. Bebizonyítom, hogy ha Petz-sejtése igaz a komplex állapottéren, akkor teljesül a valós állapottéren is (4.8. tétel).

5/a. A 2×2-es sűrűségi mátrixok (kvantumállapotok) terének a skalárgörbületét meghatározom tetszőleges monoton metrika esetére kétféle módszerrel is (4.11. tétel és 4.1. példa). (A 4.1. részben általánosan levezetett képlet jóval egyszerűbb alakot ölt a jelen esetben.) A skalárgörbület-függvény Taylor-sorfejtését meghatározom a legkevertebb állapotban (a legkevertebb állapottól való távolság szerint) (4.12. tétel).

5/b. Meghatározom a 2×2-es sűrűségi mátrixok terének a skalárgörbületét az irodalomban gyakrabban szereplő monoton metrikák mellett. Egzakt és numerikus módszerekkel megmutatom, hogy az eddig ismert monoton metrikákból származó skalárgörbület

monoton a majorizációs relációra nézve. Ezután a skalárgörbület sorfejtésének a segítségével példát adok olyan monoton metrikára, melyből származó skalárgörbület nem monoton a majorizációs relációra nézve (4.14. tétel) [2].

6. A 3×3-as és a 4×4-es sűrűségi mátrixok terének a skalárgörbületét meghatározom az irodalomban gyakran előforduló monoton metrikák esetében. Numerikus szimulációk segítségével példát adok olyan monoton metrikákra, melyekből származó skalárgörbület monoton a majorizációs relációra nézve a 2×2-es sűrűségi mátrixok terén, azonban a 3×3-as sűrűségi mátrixok terén már nem. Szimuláció segítségével valószínűsítem, hogy bizonyos metrikákból származó skalárgörbület monoton a majorizációs relációra nézve a 4×4-es sűrűségi mátrixok terén.

7. Meghatározom a 2×2-es sűrűségi mátrixok terének különböző differenciálgeometriai jellemzőit tetszőleges monoton metrikák mellett: a sokaság térfogatát (4.295–4.297 egyenletek); a geodetikus egyenletét (4.15. tétel); a legkevertebb állapot körüli gömb térfogatát és annak sugár szerinti sorfejtését (4.16. tétel), valamint az irodalomban leggyakrabban előforduló monoton metrikák esetén a tetszőleges állapot körüli gömb térfogatának sugár szerinti sorfejtését (4.311–4.326). Továbbá példaként illusztrálom egy adott állapot körüli gömb alakját bizonyos monoton metrikák esetén (4.3. példa).

Hivatkozások

Saját dolgozatok

[1] Andai A. On the monotonicity conjecture for the curvature of the Kubo-Mori metric. arXiv:math-ph/0310064.

[2] Andai A. Monotone Riemannian metrics on density matrices with non-monotone scalar curvature. *J. Math. Phys.*, 44(9):3675–3688, 2003.

[3] P. W. Michor, Petz D., Andai A. On the curvature of a certain Riemannian space of matrices. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(2):199–212, 2000.

Egyéb dolgozatok

[4] S. Amari. *Differential-geometrical methods in statistics*, volume 28 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[5] S. Amari, H. Nagaoka. *Methods of information geometry*, volume 191 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] R. Balian, Y. Alhassid, H. Reinhardt. Dissipation in many-body systems: a geometric approach based on information theory. *Phys. Rep.*, 131(1–2):1–146, 1986.

[7] N. N. Čencov. *Statistical decision rules and optimal inference*, volume 53 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1982.

[8] Csiszár I. Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2:299–318, 1967.

[9] J. Dittmann. On the curvature of monotone metrics and a conjecture concerning the Kubo-Mori metric. *Linear Algebra Appl.*, 315(1–3):83–112, 2000.

[10] B. Efron. Defining the curvature of a statistical problem (with applications to second order efficiency). *Ann. Statist.*, 3(6):1189–1242,1975.

[11] B. R. Frieden. *Physics from Fisher information*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[12] A. Gray, L. Vanhecke. Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls. *Acta Math.*, 142(3–4):157–198, 1979.

[13] Neumann J. *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[14] Petz D. Geometry of canonical correlation on the state space of a quantum system. *J. Math. Phys.*, 35(2):780–795, 1994.

[15] Petz D. Covariance and Fisher information in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 35(4):929–939, 2002.

[16] Petz D., Sudár Cs. Geometries of quantum states. *J. Math. Phys.*, 37(6):2662–2673, 1996.

[17] C. R. Rao. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 37:81–91, 1945.