Önduális CAR-algebrák

Andai Attila előadása a BME Analízisszemináriumán

Fizikában a másodkvantálásnál vezetik be a keltő és eltüntető operátorokat. Ezek kommutálnak illetve antikommutálnak egymással, attól függően, hogy bozonokat vagy fermionokat írnak le. A fermionok leírásából fejlődött ki a CAR-algebrák elmélete. Fizikai jelentése szerint egy keltés vagy eltüntetés csak egy adott nézpontból értelmezhető, másképp nézve az eseményeket ezek a jelenségek összemosódhatnak és meglehetősen elbonyolódhatnak. Ennek a kiküszübölésére és a keltő és eltüntető operátorok közti éles matematikai különbség megszüntetésére egyik lehetséges megoldás az önduális CAR algebra használata.

Az $a, a^*, 1$ elemek által generált egységelemes C^*-algebrát egyértelműen meghatározzzák a

$$aa^* + a^*a = 1, \qquad a^2 = 0$$

relációk. Ezek az egy generátorra vonatkozó *CAR* (*Canonical Anticommutation Relation*) egyenletek.

Állítás: Az algebra 4 dimenziós, báziselemei az alábbiak: a, a^*, aa^*, a^*a.
Bizonyítás: A generátorokból elkezdünk monomokat képezni. Ahol három generátorelem található egymás mellett, ott egyszerűsíthetünk, ugyanis az $aa^*a = a$ és $a^*aa^* = a^*$ teljesül, a többi három tagot tartalmazó monom pedig nulla, $a^2 = 0$ miatt.

Ez az algebra izomorf a 2×2-es mátrixok algebrájával:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vizsgáljuk meg a helyzetet két keltő (a_1, a_2) és eltüntető (a_1^*, a_2^*) operátor esetén. Ekkor az alábbi relációkat követeljük meg:

$$a_i a_i^* + a_i^* a_i = 1, \qquad i = 1, 2$$
$$a_i a_j + a_j a_i = 0, \qquad i, j = 1, 2\ .$$

Ennek az algebrának az ábrázolásához vezessük be a

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

operátort. Ekkor az

$$a_1 := a \otimes 1, \quad a_1^* := a^* \otimes 1, \quad a_2 := V \otimes a, \quad a_2^* := V \otimes a^*$$

4×4-es mátrixok teljesítik az előírt relációkat, ahol a és a^* a fent definiált 2×2-es mátrixok. Ekkor az algerba izomorf a $2^2\times2^2$-es mátrixok algerbájával. Lineárisan független báziselemek ekkor a következők:

$$\begin{pmatrix} a_1a_1^*a_2a_2^* & a_1a_1^*a_2 & a_1a_2a_2^* & a_1a_2 \\ a_1a_1^*a_2^* & a_1a_1^*a_2a_2^* & a_1a_2^* & a_1a_2a_2^* \\ a_1^*a_2a_2^* & a_1^*a_2 & a_1^*a_1a_2a_2^* & a_1^*a_1a_2 \\ a_1^*a_2^* & a_1^*a_2^*a_2 & a_1^*a_1a_2^* & a_1^*a_1a_2^*a_2 \end{pmatrix}.$$

Három keltő és eltüntető operátor esetén az

$$\begin{aligned} a_1 &:= a \otimes 1 \otimes 1, & a_2 &:= V \otimes a \otimes 1, & a_3 &:= V \otimes V \otimes a, \\ a_1^* &:= a^* \otimes 1 \otimes 1, & a_2^* &:= V \otimes a^* \otimes 1, & a_3^* &:= V \otimes V \otimes a^* \end{aligned}$$

$2^3 \times 2^3$-as mátrixokra teljesülnek a CAR-relációk. Ezek az algebrák tovább általánosíthatók az alábbi módon.

Állítás: Legyen $\mathcal{H}$ pre-Hilbert tér, és legyen $(h_i)_{i\in I}$ egy ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban. Ekkor a $\mathcal{H}$ pre-Hilbert térhez létezik U egységelemes C^*-algebra és

$$a : \mathcal{H} \to U \qquad f \mapsto a(f)$$

leképezés mely teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

1. a antilineáris,
2. $[a(f), a(g)]_+ = 0$,
3. $[a(f), a(g)^*]_+ = \langle f, g\rangle \cdot 1$.

Továbbá az U algebrát az $\{(a(h_i))_{i\in I}, 1\}$ elemek generálják.

Ha (U_1, a_1) és (U_2, a_2) a fentieknek eleget tevő pár, akkor létezik egy $\alpha : U_1 \to U_2$ $*$-izomorfizmus, mely teljesíti az

$$\alpha(a_1(f)) = a_2(f)$$

egyenletet minden $f \in \mathcal{H}$ elemre.

Vagyis adott $\mathcal{H}$ pre-Hilbert térhez létezik egy izomorfizmus erejéig egyértelmű $U(\mathcal{H})$ C^*-algebra, ez a *CAR-algebra*.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ véges dimenziós Hilbert-tér és $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban. Minden $i \in \{1,\dots,n\}$-re definiáljuk a következő 2×2-es mátrixot:

$$e^i := \begin{pmatrix} a(f_i)a^*(f_i) & V_{i-1}a(f_i) \\ V_{i-1}a^*(f_i) & a^*(f_i)a(f_i) \end{pmatrix} \ ,$$

ahol

$$V_i = \prod_{k=1}^{i}(1 - 2a^*(f_k)a(f_k)) \ .$$

Az e^i, e^j mátrixok elemei $i \neq j$ esetén kommutálnak. Ha e^i_{kl} jelöli az e^i mátrix j,k elemét akkor ez azt jelenti, hogy

$$e^i_{kl}e^j_{fg} = e^j_{fg}e^i_{kl}$$

teljesül. Az e^i_{kl} elemeket *mátrixegységeknek* nevezik. A CAR-relációkból még az

$$e^i_{kl}e^i_{fg} = \delta_{lf}e^i_{kg}$$

egyenlet is következik. Ezek az e^i mátrixok ugyanazt az algebrát generálják mint az $a(f_i)$ elemek az

$$a(f_i) = \left(\prod_{l=1}^{i-1}(e^l_{11} - e^l_{22})\right) e^i_{12}$$

egyenlőség miatt. Tehát ez az algebra megegyezik a $2^n \times 2^n$-es mátrixok algebrájával.

Legyen $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós Hilbert tér, melyben $(f_i)_{i\in I}$ ortonormált bázis. Legyen $\mathcal{P}_0(I)$ az I indexhalmaz véges részhalmazainak halmaza, és legyen $\leq$ a tartalmazás szerinti rendezés a $\mathcal{P}_0(I)$ halmazon. Jelölje minden $j \in \mathcal{P}_0(I)$ elemre $|j|$ a j halmaz számosságát. Ekkor $(J, \leq)$ felfelé irányított halmazrendszer, és minden $j \in J$ elemhez a fenti konstrukcióval hozzárendelhető egy $U(\mathcal{H})_j$ algebra, mely nem más a $2^{|j|} \times 2^{|j|}$-es mátrixok algebrája. Ha $j_1, j_2 \in J$ és $j_1 \leq j_2$ akkor legyen

$$T_{j_1,j_2} : U(\mathcal{H})_{j_1} \to U(\mathcal{H})_{j_2} \qquad [z]_{2^{|j_1|}\times 2^{|j_1|}} \mapsto [z]_{2^{|j_1|}\times 2^{|j_1|}} \otimes E_{2^{|j_2 \setminus j_1|}} \ ,$$

ahol E_n az $n \times n$-es egységmátrix. Ekkor minden $j_1 \leq j_2$ esetén T_{j_1,j_2} *-algebrahomomorfizmus, mely injektív, de általában nem szürjektív. Tegyük fel, hogy az $U(\mathcal{H})_j$ halmazok diszjunktak és képezzük az uniójukat:

$$U(\mathcal{H})^* := \bigcup_{j \in \mathcal{P}_0(I)} U(\mathcal{H})_j \ .$$

Legyen $a, b \in U(\mathcal{H})^*$ ekkor létezik olyan $i, j \in \mathcal{P}_0(I)$, hogy $a \in U(\mathcal{H})_i$ és $b \in U(\mathcal{H})_j$. Azt mondjuk, hogy a és b ekvivalens, jelölése $a \simeq b$, ha $i \leq j$ vagy $j \leq i$.

Legyen $U(\mathcal{H})^{\mathrm{pre}} := U(\mathcal{H})^* / \simeq$, $[a], [b] \in U(\mathcal{H})^{\mathrm{pre}}$ és $a, b \in U(\mathcal{H})^*$ egy-egy tetszőleges elem az $[a]$ illetve $[b]$ ekvivalenciaosztályból. Ekkor $a \in U(\mathcal{H})_i$ és $b \in U(\mathcal{H})_j$ valamilyen $i, j \in \mathcal{P}_0(I)$ elemre, mivel $(\mathcal{P}_0(I), \leq)$ felfelé irányított halmazrendszer, ezért létezik $k \in \mathcal{P}_0(I)$ (például $k = i \cup j$), hogy $i, j \leq k$ és mindkét elemet beágyazhatjuk $U(\mathcal{H})_k$-ba a $T_{j,k}$ és $T_{i,k}$ *-algebra homomorfizmusok segítségével.

Definiáljuk az $[a] + [b]$ és $[a] \cdot [b]$ elemeket az alábbi módon:

$$[a + b] := [T_{i,k}(a) + T_{j,k}(b)], \qquad [a \cdot b] := [T_{i,k}(a) \cdot T_{j,k}(b)] \ .$$

Igazolható, hogy a fenti definíció nem függ az ekvivalenciaosztályból vett reprezentáns elemtől. Ekkor minden $U(\mathcal{H})^{\mathrm{pre}}$ elempárra értelmeztük az összeadást és a szorzást. Ahhoz, hogy C^* algebrát kapjuk, az $U(\mathcal{H})^{\mathrm{pre}}$ algebrát teljessé kell tenni. Ezt jelölje $U(\mathcal{H})$. Erre folytonosan kiterjeszthető az összeadás és a szorzás.

A fenti konstrukciót nevezik az algebrák *induktív limeszének* vagy *direkt limeszének*.

Állítás: Legyen $U(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térhez rendelt CAR-algebra. Ekkor minden $f \in \mathcal{H}$ elemre $\|a(f)\| = \|f\|$ teljesül.

Bizonyítás:

$$(a^*(f)a(f))^2 = a^*(f)[a(f), a^*(f)]_+ a(f) = \|f\|^2 a^*(f)a(f),$$
$$\|a(f)\|^4 = \|(a^*(f), a(f))^2\| = \|f\|^2 \cdot \|a^*(f)a(f)\| = \|f\|^2 \cdot \|a(f)\|^2 \ .$$

Állítás: Az $U(\mathcal{H})$ C^*-algebra pontosan akkor szeparábilis, ha $\mathcal{H}$ szeparábilis.

Bizonyítás: Az állítás az $U(\mathcal{H})$ C^*-algebra bázisának számosságára vonatkozó számossági megfontolások alapján nyilvánvaló.

Állítás: Az $U(\mathcal{H})$ C^*-algebra egyszerű.

Bizonyítás: Mivel $[a(f), a^*(f)]_+ = \|f\|^2 \cdot 1$ ezért $U(\mathcal{H})$ miden π ábrázolására $\pi(a(f)) \neq 0$. Ezért $U(\mathcal{H})$-nak nincs nemtriviális zárt kétoldali ideálja.

Állítás: Legyenek $U, V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ olyan korlátos operátorok, hogy U lineáris, V antilineáris és teljesítik a következő egyenleteket

$$V^*U + U^*V = UV^* + VU^* = 0$$
$$U^*U + V^*V = UU^* + VV^* = 1 \ .$$

Ekkor létezik egyértelműen egy γ $*$-automorfizmusa $U(\mathcal{H})$-nak, melyre

$$\gamma(a(f)) = a(Uf) + a^*(Vf),$$
$$\gamma^{-1}(a(f)) = a(U^*f) + a^*(V^*f)$$

teljesül.

Bizonyítás: Az első állítást kell alkalmazni az

$$a_1(f) := a(f), \qquad a_2(f) := a(Uf) + a^*(Vf)$$

választással.

Ez a γ az U, V operátorokhoz tartozó *Boguljobov-transzformáció*.

Egy másik irányba általánosítva tovább az eddigieket próbáljuk meg a keltő és eltüntető operátorok közti jelentős különbséget enyhíteni. Legyen $\mathcal{K}$ komplex pre-Hilbert tér. Vezessünk be a $\mathcal{K}$ pre-Hilbert téren egy Γ-antiunitér involúciót:

$$\Gamma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}, \qquad \forall f, g \in \mathcal{K} : \quad \langle \Gamma f, \Gamma g \rangle = \langle g, f \rangle.$$

Ezt a Γ involúciót a továbbiakban rögzítettnek vesszük. Legyen $(h_i)_{i\in I}$ egy ortonormált bázis a $\mathcal{K}$ Hilbert-térben. Próbáljunk olyan $V(\mathcal{K},\Gamma)$ C^*-algebrát konstruálni, amelykihez létezik olyan

$$b:\mathcal{K}\to V(\mathcal{K},\Gamma) \qquad h\mapsto b(h)$$

leképezés, melyre teljesülnek a következők minden $h_i, h_j\in\mathcal{K}$ vektorra

$$\begin{aligned}
&b(h_i)^* = b(\Gamma h_i),\\
&[b(h_i), b(h_j)^*]_+ = \delta_{ij}1,\\
&[b(h_i), b(h_j)]_+ = 0,
\end{aligned}$$

továbbá a $\{(b(h_i))_{i\in I}, 1\}$ elemek generálják a $V(\mathcal{K},\Gamma)$ algebrát.

Legyen $\mathcal{K}=\mathbb{C}^2$ komplex kétdimenziós Hilbert-tér az alábbi skalárszorzattal:

$$(z_1,z_2),(v_1,v_2)\in\mathcal{K}, \qquad \langle (z_1,z_2),(v_1,v_2)\rangle := z_1\bar{v}_1 + z_2\bar{v}_2\ .$$

Minden $h=(z_1,z_2)\in\mathcal{K}$ vektorra legyen

$$\Gamma(z_1,z_2) := (\bar{z}_2,\bar{z}_1), \quad \text{és} \quad S(h) := \begin{pmatrix} 0 & z_2 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ekkor teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$S(h)^* = S(\Gamma h),\ [S(h), S(h')^*]_+ = \langle h, h'\rangle\cdot 1, \quad \text{ha } i\neq j:\ [S(h_i), S(h_j)] = 0.$$

Az előbbi konstrukciót ismételjük meg három példányban, vagyis legyen $(K_i)_{i=1,2,3}$ a $\mathbb{C}^2$ Hilbert-tér, $(\Gamma_i)_{i=1,2,3}$ a megfelelő K_i Hilbert-terekben lévő involúció és $(S_i)_{i=1,2,3}$ az adott reprezentációk. Definiáljuk az alábbi $(B_i)_{i=1,2,3}$ reprezentációkat:

$$\begin{aligned}
B_1(h_1) &:= S_1(h_1)\otimes 1\otimes 1, \quad h_1\in\mathcal{K}_1\\
B_2(h_2) &:= V\otimes S_2(h_2)\otimes 1, \quad h_2\in\mathcal{K}_2\\
B_3(h_3) &:= V\otimes V\otimes S_3(h_3), \quad h_3\in\mathcal{K}_3\ .
\end{aligned}$$

Vagyis ha a $\mathcal{H}$ hatdimeziós Hilbert-tér felbontható $\mathcal{H}=\mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2\oplus\mathcal{K}_3$ terekre, ahol $\mathcal{K}_i\simeq\mathbb{C}^2$ $i=1,2,3$ esetén és a Γ a fenti példának megfelelően esik szét $(\Gamma_i)_{i=1,2,3}$ operátorokra, akkor egy tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ elemhez meghatározzuk az $x_i \in \mathcal{K}_i$ összetevőket és ekkor

$$B(x) = B_1(x_1) + B_2(x_2) + B_3(x_3)$$

lesz az x vektornak megfelelő $V(\mathcal{K}, \Gamma)$ C^*-algebrabeli elem.

Általánosan bevezethetők a T_i transzformációk:

$$B_i(h_i) := T_i S_i(h_i) \ .$$

Ez a T_i transzformációcsalád a *Jordan-Wigner-transzformáció*.

Az így definiált B_i ábrázolások teljesítik az alábbi összefüggéseket:

$$B(j)(h_j)^* = B_j(\Gamma_j h_j), \quad \text{és} \quad [B_j(h_j), B_k(h_k)]_+ = \delta_{jk}\langle h_j, h_k\rangle \cdot 1 \ .$$

Az S ábrázolások a $2^n \times 2^n$-es mátrixok teljes algebráját generálják.

Állítás: A B ábrázolás is ugyanazt az algebrát generálja mint az S ábrázolás.

Bizonyítás:

1. A B_1 és az S_1 ábrázolás esetén ez nyilvánvaló.
2. A $T_i(B_i(h_i)) = S_i(h_i)$ összefüggés miatt az állítás a többi esetben is nyilvánvaló.

Legyen $\mathcal{K}$ véges dimenziós Hilbert-tér az $(e_j)_{j \in n+1}$ ortonormált bázissal.

Állítás: Az $(e_j)_{j \in n+1}$ ortonormált bázis választható Γ-invariánsnak, azaz minden $i \in n+1$-re $\Gamma e_i = e_i$.

Bizonyítás:

1. Minden $x \in \mathcal{K}$ nem zérus vektorra az $x + \Gamma x$, $i(x - \Gamma x)$ vektorok közül legalább az egyik nem zérus Γ-invariáns vektor.

2. Ha $k < n$ és $(e_i)_{i \in k+1}$ Γ-invariáns ortonormált vektorrendszer, akkor a $\mathcal{K}'$ ortogonális komplementerre teljesül a $\Gamma\mathcal{K}' = \mathcal{K}'$ egyenlet. Ha $x \in \mathcal{K}'$ nem zérus vektor, akkor az $e_{k+1} := \frac{x}{\|x\|}$ választással élve $(e_i)_{i \in k+2}$ is egy Γ-invariáns ortonormált vektorrendszer.

3. Az 1. és 2. pont rekurzív alkalmazásával kapjuk az állítást.

I. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $\dim \mathcal{K} = 2n$. Legyen $(e_i)_{i \in 2n+1}$ Γ-invariáns ortonormált bázis. Legyen $\mathcal{K}_j := \mathrm{Span}(e_{2j-1}, e_{2j})$, $\Gamma_j := \Gamma|_{\mathcal{K}_j}$. Ekkor minden $h \in \mathcal{K}$ vektor felírható $\sum h_i$ alakban, ahol $h_i \in \mathcal{K}_i$ és ekkor $B(h) = \sum B(i)(h_i)$. Vagyis $V(\mathcal{K}, \Gamma) \simeq \mathrm{Mat}(2^n, 2^n)$.

II. Nézzük meg a $\dim \mathcal{K} = 2n+1$ esetet. Legyen $(e_i)_{i \in 2n+2}$ Γ-invariáns ortonormált bázis és $\mathcal{K}_1 := \mathrm{Span}((e_i)_{i \in 2n+1})$. A $\mathcal{K}_1$ Hilbert-térhez tartozó CAR-algebrát jelölje $\mathcal{U}_1$ és a $\mathcal{K}$ Hilbert-térhez tartozó algebra legyen $\mathcal{U}_0$. Mivel $B(e_i) = B(\Gamma e_i) = B(e_i)^*$, így

$$B(e_j)B(e_k) = \begin{cases} +B(e_k)B(e_j), & \text{ha} \quad k = j \\ -B(e_k)B(e_j), & \text{ha} \quad k \neq j \ . \end{cases}$$

Legyen $z := B(e_1)B(e_2) \cdot \cdots \cdot B(e_{2n+1})$. Ekkor z benne van az $\mathcal{U}_0$ algebra centrumában. (Mert páros sok B-re kap -1-szorzót, ha felcseréljük a tagokat.)

Az $\mathcal{U}_0$ algebrát az $\mathcal{U}_1$ algebra generálja, ugyanis

$$B(e_{2n+1}) = 2^{2n} B(e_{2n})B(e_{2n-1}) \cdot \cdots \cdot B(e_2)B(e_1)z.$$

Például az $n = 2$ esetben:

$$2^2 \cdot B(e_2)B(e_1)B(e_1)B(e_2)B(e_3) = 2^2 \cdot B(e_2)\big(\tfrac{1}{2} \cdot 1\big)B(e_2)B(e_3) =$$
$$= 2 \cdot \big(\tfrac{1}{2} \cdot 1\big)B(e_3) = B(e_3) \ .$$

A z elem rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$z^* = B(e_{2n+1}) \cdot \cdots \cdot B(e_1) = (-1)^n z,$$
$$z^* z = 2^{-(2n+1)} \cdot 1 \ .$$

Legyen $z_0 := (2i)^n\sqrt{2}z$, ekkor az $\mathcal{U}_0$ algebra centrumát a z_0 önadjungált, unitér elem generálja.

III. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $\mathcal{K}$ megszámlálhatóan végtelen dimenziós. Ekkor minden véges I páros számosságú indexhalmazra elkészíthető egy $\mathcal{U}_I$ CAR-algebra, és ezek induktív limesze lesz $V(\mathcal{K},\Gamma)$. (Természetesen páratlan számosságú indexhalmazból is kiindulhatunk, ekkor azonban bonyolultabb lesz az induktív limesznél szereplő *-algebra homomorfizmusok elkészítése, azonban a végeredmény nem változik, mert tudjuk, hogy izomorfizmus erejéig $V(\mathcal{K},\Gamma)$ egyértelmű.)

Állítás: Minden $h \in \mathcal{K}$ elemre

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|h\| \leq \|B(h)\| \leq \|h\|$$

teljesül.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
&B(h)^*B(h) \leq [B(h),B(h)^*]_+ = \|h\|^2 \cdot 1,\\
&\|B(h)\| = \sqrt{\|B(h)^*B(h)\|} \leq \|h\|,\\
&\|h\|^2 \cdot 1 \leq \|B(h)^*B(h)\| + \|B(h)B(h)^*\| = 2\|B(h)\|^2.
\end{aligned}$$

Állítás: Minden $h \in \mathcal{K}$ elemre

$$\|B(h)\| = \sqrt{\frac{\|h\|^2 + \sqrt{\|h\|^4 - |\langle h,\Gamma h\rangle|^2}}{2}}$$

teljesül.

Vagyis a B ábrázolás pontosan akkor tartja meg egy $h \in \mathcal{H}$ vektor normáját, ha $\langle h, \Gamma h\rangle = 0$.

Egy $h \in \mathcal{K}$ vektor esetén $B(h)$-t felbonthatjuk keltő és eltüntető operátorok összegére:

$$B(h) = \alpha a^* + \beta a\ .$$

Ez a felbontás a $\mathcal{K}$-ban választott bázistól függ. Ettől a szoros bázisfüggéstől szeretnénk megszabadulni, ezért önkényesen választjuk ki a keltő és eltüntető operátorok altereit.

Legyen $\mathcal{K}_1$ olyan lineáris altere $\mathcal{K}$-nak, melyre teljesülnek az

$$\mathcal{K}_1 \perp \Gamma\mathcal{K}_1, \quad \mathcal{K}_1 \oplus \Gamma\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}$$

összefüggesek. Ekkor $h \in \mathcal{K}_1$ vektorokhoz tartozó $B(h)$ elemet keltő operátornak, az $f \in \Gamma\mathcal{K}_1$-hoz tartozó $B(f)$ elemet eltüntető operátornak nevezzük. Ekkor minden $h \in \mathcal{K}$ vektort felbonthatunk keltő és eltünktető operátorok összegére, azonban ez a felbontás függ a $\mathcal{K}_1$ altér választásától.

Legyen P a $\mathcal{K}_1$ altérre való vetítés operátora, ekkor a fenti egyenleteket rövidebben kifejezhetjük:

$$P + \Gamma P \Gamma = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}\,.$$

Az egyenletnek eleget tevő ortogonális vetítéseket nevezzük *bázis projekcióknak*.

Most megadjuk a $(\mathcal{K}, \Gamma)$ térhez tartozó CAR algebra egy másik reprezentációját. Legyen $\mathcal{H} := P\mathcal{K}$ és definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra az *n-részecske alteret*:

$$F_n(\mathcal{H}) := \mathrm{Span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{p \in \mathrm{Perm}(1,\ldots,n)} \mathrm{sgn}(p) h_{p_1} \otimes \cdots \otimes h_{p_n} \middle| \forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon h_i \in \mathcal{H} \right\},$$

ahol Span a vektorok komplex lineáris burkát jelöli. Egy másik jelölésmód szerint

$$F_n(\mathcal{H}) := \mathrm{Span}\left\{ h_1 \wedge \cdots \wedge h_n \quad \middle| \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \quad h_i \in \mathcal{H} \right\}.$$

Az F_n vektortér a

$$\langle h_1 \wedge \cdots \wedge h_n, g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \rangle_n := \det\Big((\langle h_i, g_j \rangle_{\mathcal{K}})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \Big)$$

skalárszorzással Hilbert-tér.

A $\mathbb{C}$ vektortérben tekintsünk egy $\Omega \in \mathbb{C}$ vektort rögzítettnek ez a *vákuum vektor* és legyen $F_0(\mathcal{H}) := \mathbb{C}$. (Tehát $\Omega \in F_0(\mathcal{H})$.) Legyen

$$F(\mathcal{H}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k(\mathcal{H}),$$

ahol $\oplus$ a Hilbert-terek terek direkt összegét jelöli, ezt nevezzük *Fermion Fock-térnek*.

Ennek a térnek minden $F_n(\mathcal{H})$ alterén megadjuk egy tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektorra az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned}
&a(x)^*(h_1 \wedge \cdots \wedge h_n) := x \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_n,\\
&a(x)^*\Omega := x,\\
&a(x)(h_1 \wedge \cdots \wedge h_n) := \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\langle h_r, h\rangle_{\mathcal{K}} \cdot h_1 \wedge \cdots \wedge \hat{h}_r \wedge \cdots \wedge h_n,\\
&a(x)\Omega := 0\ ,
\end{aligned}$$

ahol a h_r tag kihagyására az antiszimmetrikus szorzatból $\hat{h}_r$ utal.

Az $a(x), a(x)^*$ operátorok kiterjeszthetők linearisan az $F_n(\mathcal{H})$ alterek lineáris burkára. Minden $a(x)$ és $a(x)^*$ operátor korlátos és sűrűn értelmezett az $F(\mathcal{H})$ Hilbert-téren, ezért kiterjesztésüket az egész térre szintén az $a(x)$ és $a(x)^*$ szimbólumokkal jelöljük.

Legyen π_P a következő ábrázolás:

$$\pi_P : \mathcal{K} \to \mathrm{Lin}(F(\mathcal{H})) \qquad z \mapsto \pi_P(z) := a(Pz)^* + a(P\Gamma z)\ .$$

Ekkor a π_P ábrázolás szintén teljesíti a felcserélési relációkat, ezért a $(\pi_P(z))_{z\in\mathcal{K}}$ elemek által generált C^* algebra izomorf az előbb leírt $V(\mathcal{K},\Gamma)$ algebrával. A Fermion Fock-téren megadott ábrázolást *Fock-reprezentációnak* nevezik.

Most általánosítjuk a Boguljobov-transzformációt a $V(\mathcal{K},\Gamma)$ algebrára. Azokat az $U : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ unitér operátorokat, melyek kommutálnak Γ-val, azaz

$$U^*U = UU^* = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}, \quad [U,\Gamma] = 0$$

Boguljobov-operátoroknak nevezzük.

Ha végrehajtjuk az

$$R_U : B(h) \mapsto B(Uh)$$

transzformációt, akkor az így kapott elemek szintén teljesítik a CAR-relációkat. A CAR algebrák egyértelműsége miatt minden U Boguljobov-operátorhoz definiálhatunk egy $\alpha_U \in \mathrm{Aut}(V(\mathcal{K},\Gamma))$ elemet:

$$\alpha_U(B(h)) := B(Uh)\ .$$

Ezeket az α_U elemeket *Boguljobov-automorfizmusoknak* nevezzük.

Az egyik speciális Boguljobov-operátor $U = -1 \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$. Az ehhez tartozó α_{-1} automorfizmust nevezzük *páros-páratlanság automorfizmusnak*. Ennek szemléletes jelentése van véges dimenziós Hilbert-terek CAR-algebrájában.

Legyen $\dim(\mathcal{H}) = n$, $B(h)$ a $h \in \mathcal{K}$ vektor képe a CAR-algebrában (azaz $2^n \times 2^n$-szeres mátrix) és $U = -\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Határozzuk meg α_{-1} hatását egy tetszőleges CAR-algebrabeli elemen!

Minden elem felírható $B(h)$ alakú elemek polinomjaként. Ezt a polinomot felbonthatjuk p_+ és p_- polinomok összegére, ahol p_+ csak páros és p_- csak páratlan fokú tagokat tartalmaz. Ekkor $\alpha_{-1}p_+ = p_+$ és $\alpha_{-1}p_- = -p_-$. Az α_{-1}-nek $+1, -1$ lehetnek a sajátértékei, a $+1$-hez tartozó X^+ alteret *páros altérnek*, a -1-hez tartozót *páratlan altérnek* nevezzük.

A páros altér egyben C^*-részalgebra is a CAR-algebrában. Az n generátorral megadott $2^n \times 2^n$-es mátrixok algebrájában jelölje X_n^+ a páros algebrát.

1 generátor esetén a páros altér triviálisan következik az 1 állításból. Vagyis

$$X_1^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} (a_{11}) & 0 \\ 0 & (a_{22}) \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(1) \oplus \mathrm{Mat}(1) \; .$$

2 generátor esetén a páros altér triviálisan következik a független báziselemek megadásából. (2. oldalon!) Vagyis az

$$X_2^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

izomorfia alapján

$$X_2^+ = \mathrm{Mat}(2) \oplus \mathrm{Mat}(2)$$

teljesül.

3 generátor esetén az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} & a_{17} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & 0 & a_{28} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 & 0 & a_{38} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & a_{46} & a_{47} & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & 0 & 0 & a_{58} \\ a_{61} & 0 & 0 & a_{64} & 0 & a_{66} & a_{67} & 0 \\ a_{71} & 0 & 0 & a_{74} & 0 & a_{76} & a_{77} & 0 \\ 0 & a_{82} & a_{83} & 0 & a_{85} & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{16} & a_{17} \\ a_{41} & a_{44} & a_{46} & a_{47} \\ a_{61} & a_{64} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{74} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{28} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} & a_{38} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} & a_{58} \\ a_{82} & a_{83} & a_{85} & a_{88} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

izomorfia alapján állíthatjuk, hogy

$$X_3^+ = \mathrm{Mat}(4) \oplus \mathrm{Mat}(4)$$

teljesül.

n generátor esetén hasonló felbontás igaz. Az X_n^+ tér olyan $2^n \times 2^n$-es mátrixokból fog állni melyek nemnulla a_{ij} elemeire az teljesül, hogy az i és j szám kettes számrendszerbeli felírásában a jegyek összegeinek az összege páros. Egy $2^{n-2} \times 2^{n-2}$-es mátrixba csoportosíthatjuk azokat az a_{ij} elemeket, melyekre teljesül, hogy az i és j szám kettes számrendszerbeli felírásában a jegyek összege páros. Hasonlóan egy $2^{n-2} \times 2^{n-2}$-es mátrixba csoportosíthatók azok az a_{ij} elemek, ahol az i és j szám kettes számrendszerbeli felírásában a jegyek összege páratlan.

Állítás: Minden $n \in \mathbb{N}$ számra $X_n^+ = \mathrm{Mat}(2^{n-2}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{n-2})$ teljesül. *Bizonyítás*: A fentieket végiggondolva triviális.