Általánosított Stone-Neumann-tétel

Andai Attila, BME Analízis Szeminárium előadás

A kvantummechanikában fizikai mennyiségeknek önadjungált operátorok felelnek meg. A legfontosabb (és legegyszerűbb mennyiségek) a hely és az impulzus. Ezen mennyiségeknek megfelelő operátorok jele p és q. ($p = (p_x, p_y, p_z)$, $q = (q_x, q_y, q_z)$) Most csak az egydimenziós esetet vizsgáljuk. Ekkor a közöttük lévő felcserélési reláció:

$$[q, p] = i \operatorname{Id}_H .$$

Ha $H = L^2(\mathbb{R})$ akkor legyen:

$$D := \{f \in H | f \text{végtelen sokszor differenciálható és kompakt tartójú}\}.$$

A D altér sűrű H-ban.

$$P_D : D \to D \qquad f \mapsto -i\frac{df}{dx},$$
$$Q_D : D \to D \qquad f \mapsto xf.$$

Ekkor $[Q_D, P_D] = i \operatorname{Id}_D$ és P_D, Q_D lényegében önadjungált. Ez a *Schrödinger-reprezentáció*. Egy önadjungált operátor egy unitér egyparaméteres csoportot határoz meg, most áttérünk erre az unitér csoportra:

$$U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H) \qquad a \mapsto U(a) := \exp(iaP_D)$$
$$V : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H) \qquad b \mapsto V(b) := \exp(ibQ_D).$$

Ekkor a felcserélési reláció:

$$U(a)V(b) = e^{iab}V(b)U(a).$$

A két egyparaméteres részcsoport helyett egy operátort vizsgálunk:

$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H} \qquad (a, b) \mapsto W(a, b) := \exp(-\frac{i}{2}ab)U(b)V(a).$$

Ekkor a felcserélési reláció:

$$W(a, b)W(c, d) = \exp\big(-\frac{i}{2}(ad - bc)\big)W(a + c, b + d).$$

Algebratípusok

(1) algebra + norma = *normált algebra*
(vektortér norma, mely *szubmultiplikatív*: $||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$.)
(2) algebra + involúció = $*$-*algebra*, *involútív algebra*
(3) $*$-algebra + norma = *normált* $*$-*algebra*
(az involúció izometria: $||a^*|| = ||a||$.)
(4) normált $*$-algebra + ($||a^*a|| = ||a||^2$) = *pre-*C^**-algebra*
(5) teljes normált algebra = *Banach algebra*
(6) teljes normált $*$-algebra = *Banach* $*$-*agebra*
(7) teljes pre-C^*-algebra = C^*-*algebra*

*CCR-algebrá*nak nevezzük a $W(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$ elemek által generált komplex számok feletti C^*-algebrát, ahol a szorzás az alábbi módon értelmezett:

$$W(a,b)W(c,d) = \exp\bigl(-\frac{i}{2}(ad-bc)\bigr)W(a+c,b+d),$$

a $*$ involúció pedig: $W(a,b)^* = W(-a,-b)$. Ennek az algebrának $\mathcal{A}$ a jele.

Legyen H komplex Hilbert-tér, és legyen $\mathcal{B}(H)$ a H Hilbert-tér korlátos operátorainak a halmaza. A (H,π) pár a *CCR-algebra ábrázolása*, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

(1) $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H) \quad W(a,b) \mapsto \pi(W(a,b))$,
(2) Minden $a,b \in \mathbb{R}$ elemre $\pi(W(a,b))$ unitér,
(3) Minden $a,b \in \mathbb{R}$ elemre $\pi(W(a,b))^* = \pi(W(-a,-b))$,
(4) Minden $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ elemre:

$$\pi(W(a,b))\pi(W(c,d)) = \exp\bigl(-\frac{i}{2}(ad-bc)\bigr)\pi(W(a+c,b+d)),$$

(5) A

$$\hat{\pi} : \mathbb{R}^2 \to H \quad (a,b) \mapsto \pi(W(a,b))$$

leképzés folytonos a gyenge operátortopológiában.

A (H,π) CCR-algebra ábrázolás:

(1) *irreducibilis*, ha csak a triviális zárt alterek invariánsak az ábrázoló operátorok mindegyikére,
(2) *nem degenerált*, ha a

$$\{\pi(W(a,b))x | a,b \in \mathbb{R}, \quad x \in H\}$$

halmaz lineáris burka sűrű H-ban,
(3) *ciklikus*, ha létezik olyan $x_0 \in H$ (*ciklikus vektor*), hogy a

$$\{\pi(W(a,b))x_0 | a,b \in \mathbb{R}\}$$

halmaz lineáris burka sűrű H-ban,
(4) *reguláris*, ha $\hat{\pi} : (a,b) \mapsto \pi(W(a,b))$ leképzés folytonos az erős operátortopológiában.

Stone-Neumann-tétel. Legyen (H,π) CCR-algebra ábrázolás, mely nem degenerált, irreducibilis és reguláris, ekkor (H,π) unitér ekvivalens a Schrödinger-ábrázolással.

Legyen $\mathcal{A}_Z$ a $W(1,0)$ és a $W(0,2\pi)$ elemek által generált $\mathcal{A}$-beli maximális Abel C^*-részalgebra. Az $\mathcal{A}_Z$ nemtriviális karaktereinek a topologikus tere azonosítható a $\mathbb{T}^2 := [0,1) \times [0,2\pi)$ szorzattérrel.

Definiáljuk a következő leképzést:

$$U_Z : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2\pi} d\alpha d\beta) \quad f \mapsto U_Z(f),$$

ahol $\mathbb{T}^2 = [0,1) \times [0, 2\pi)$ és

$$U_Z(f)(\alpha, \beta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\beta} f(n + \alpha).$$

Ekkor U_Z izometrikus izomorfizmus, neve *Zak-transzformáció.*

Az $(L^2(\mathbb{R}), \pi_S)$ CCR-algebra Schrödinger reprezentációjáról térjünk át U_Z segítségével egy π_Z reprezentációra:

$$\pi_Z : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2\pi} d\alpha d\beta)) \quad W(a,b) \mapsto U_Z \pi_S(W(a,b)) U_Z^{-1}.$$

Rövid számolással ellenőrizhetők az alábbi kifejezések minden $g \in L^2(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2\pi} d\alpha d\beta)$ 'megfelelő' függvényre:

$$(\pi_Z(W(a,0))g)(\alpha, \beta) = e^{i\beta[\alpha + a]} g((\alpha + a) \bmod 1, \beta)$$
$$(\pi_Z(W(0,b))g)(\alpha, \beta) = e^{-ib\alpha} g(\alpha, (\beta + b) \bmod 1).$$

Az eddigiek alapján tudjuk, hogy minden nem degenerált irreducibilis reguláris ábrázolás ekvivalens az $(L^2(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2\pi}), \pi_Z)$ ábrázolással, ahol $\mathcal{A}_Z$ elemei a Gelfand-transzformáltjuk szorzásával hatnak. Az $\mathcal{A}$ C^*-algebra Gelfand-transzformáltjának a jele $\hat{\mathcal{A}}$, az $a \in \mathcal{A}$ elem Gelfand-transzformáltja $\hat{a}$.

Állítás. Legyen (H, π) nem degenerált ábrázolása egy A $*$-algebrának. Ekkor létezik π ciklikus részábrázolásainak olyan $(\pi_i)_{i \in I}$ szummálható rendszere, hogy $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \pi_i$, az ábrázolások Hilbert-összege, unitér ekvivalens π-vel.

Ha A Banach $*$-algebra, akkor az A ábrázolásainak bármely rendszere szummálható.

Legyen (H, π) nem degenerált CCR-algebra ábrázolás és legyen $x \in H$. A

$$k_{\pi,x} : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \quad W(a,b) \mapsto \langle x, \pi(W(a,b))x \rangle$$

leképezés pozitív reguláris funkcionál $\mathcal{A}$ felett. Ekkor $k_{\pi,x}$ pozitív Radon-mérték $\hat{\mathcal{A}}$ halmazon. Mivel $\hat{\mathcal{A}}$ lokálisan kompakt tér, ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel értelmében létezik olyan

$$\mu_x : \mathcal{R}_0(\hat{\mathcal{A}}) \to \mathbb{R}^+$$

σ-additív halmazfüggvény, hogy

$$C_0(\hat{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{L}^1_R(\hat{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_0(\hat{\mathcal{A}}), \mu_x)$$

és minden $a \in \mathcal{A}$ elemre:

$$k_{\pi,x}(a) = \int \hat{a} d\mu_x.$$

A $\mathcal{R}_0(\hat{\mathcal{A}})$ az $\mathcal{A}$ nemtriviális karaktereinek Gelfand-topológiával ellátott Hausdorff topológikus terén a relatív kompakt Baire-halmazok δ-gyűrűjét jelöli, $\mathcal{L}$ az integrálható függvények prehilbert terét jelöli.

Mivel $\hat{\mathcal{A}}$ megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér ($\mathbb{T}^2$), ezért a Baire-halmazai megegyeznek a Borel-halmazokkal.

Legyen (H, π) nem degenerált CCR-algebra ábrázolás, és legyen $x \in H$. Ekkor H_x jelölje a

$$\{\pi(W(a,b))x | a, b \in \mathbb{R}\}$$

halmaz lineáris burkának a lezárjtát.

A (H, π) nem degenerált CCR-algebra ábrázolás a H szeparábilis Hilbert-téren. Azt mondjuk, hogy (H, π) *multiplicitás mentes*, ha teljesíti az alábbi három ekvivalens feltétel valamelyikét:

(1) Minden $x \in H$ vektor esetén a H_x altérre vetítő projektor eleme a $\pi(\mathcal{A})$ által generált Neumann-algebrának (vagyis eleme $\pi(\mathcal{A})''$-nak).
(2) A $\pi(\mathcal{A})''$ maximális Abel részalgebra $\mathcal{B}(H)$-ban.
(3) Minden $x, y \in H$ esetén, ha $H_x \perp H_y$ akkor μ_x és μ_y kölcsönösen ortogonálisak. (Azaz ha $H_x \perp H_y$ akkor létezik $\hat{\mathcal{A}}$-nak olyan S_x^y Baire-halmaza, hogy $\mu_x(\hat{\mathcal{A}} \setminus S_x^y) = 0$ és $\mu_y(S_x^y) = 0$.)

Állítás. Legyen (H, π) nem degenerált, multiplicitás mentes CCR-algebra ábrázolás. Ekkor létezik μ pozitív mérték a $\hat{\mathcal{A}}$ Baire-halmazain és létezik

$$U : H \to L^2(\hat{\mathcal{A}}, \mu)$$

izometrikus izomorfizmus, hogy minden $a \in \mathcal{A}$ elemre $U\pi(a)U^{-1}$ operátor megegyezik a $\hat{a}$-val való szorzás operátorával.

Most nem szeparábilis Hilbert-térre terjesztjük ki az eddigi fogalmakat. A $\pi(\mathcal{A})$ által generált Baire $*$-algebra a legkisebb C^*-algebra mely tartalmazza $\pi(\mathcal{A})$-t és az összes gyengé konvergens monoton sorozatának a határértékét.

Azt mondjuk, hogy a (H, π) nem degenerált CCR-algebra ábrázolás *spektrálisan multiplicitásmentes*, ha teljesíti az alábbi három ekvivalens feltétel valamelyikét.

(1) Minden $x \in H$ esetén a H_x altérre vetítő projektor eleme a $\pi(\mathcal{A})$ által generált Baire $*$-algebrának.
(2) Minden $x, y \in H$ esetén, ha $H_x \perp H_y$ akkor létezik $\hat{\mathcal{A}}$-nak olyan S_x^y Baire halmaza, hogy $\mu_x(\hat{\mathcal{A}} \setminus S_x^y) = 0$ és $\mu_y(S_x^y) = 0$.

(3) Létezik μ pozitív mérték $\hat{\mathcal{A}}$ Baire-halmazain, és létezik $U : H \to L^2(\hat{\mathcal{A}}, \mu)$ izometrikus izomorfizmus úgy, hogy minden $a \in \mathcal{A}$ esetén az $U\pi(a)U^{-1}$ operátor megegyezik az $\hat{a}$ Gelfand-transzformálttal való szorzás operátorával.

Mivel a (H, π) nem degenerált ábrázolás ciklikus ábrázolásokból felépíthető, ezért a 3. feltételbe szerplő μ mérték a következő alakba írható:

$$\mu = \sum_{i \in I} \mu_{x_i}.$$

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-véges pozitív mértéktér és H Hilbert-tér. Azt modjuk, hogy az $f : X \to H$ függvény *megszámlálható értékű*, ha lépcsős függvény, és az értékkészletének a számossága nem nagyobb mind megszámlálhatóan végtelen.

Azt mondjuk, hogy az $f : X \to H$ függvény *általánosan mérhető*, ha létezik $f_{i \in \mathbb{N}} : X \to H$ függvénysorozat, melynek minden tagja megszámlálható értékű és a függvénysorozat pontoként konvergál f-hez μ-majdnem mindenhol.

Azt mondjuk, hogy a $V : X \to \mathcal{L}(H)$ operátor értékű függvény (*általánosan*) *erősen mérhető*, ha minden $x \in H$ vektorra a

$$V_x : X \to H \qquad a \mapsto V(a)x$$

vektor értékű függvény általánosan mérhető.

Állítás. A $V : X \to \mathcal{L}(H)$ függvény pontosan akkor erősen mérhető, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

(1) a V *gyengén mérhető*:
minden $x, y \in H$ vektorok esetén a

$$V_{x,y} : X \to \mathbb{C} \qquad a \mapsto \langle V(a)x, y\rangle$$

függvény mérhető,

(2) a V *μ-majdnem mindenhol szeparábilis értékű minden $x \in H$ vektorra nézve*:
minden $x \in H$ vektor esetén létezik egy $N \subseteq X$ nullmértékű részhalmaz melyre a

$$\{V(a)x | a \in X \setminus N\}$$

halmaz szeparábilis részhalmaza H-nak.

TÉTEL. Legyen (H,π) az $\mathcal{A}$ CCR-algebra ábrázolása, mely

(1) ábrázolás megszorítása $\mathcal{A}_Z$-re spektrálisan multiplicitás mentes,
(2) minden μ_x mértékre nézve erősen mérhető,

ekkor az ábrázolás irreducibilis.

Megjegyzések.

(1) A spektrálisan multiplicitás mentesség miatt létezik

$$U : H \to L^2(\mathbb{T}^2, \mu)$$

izometrikus izomorfizmus úgy, hogy minden $A \in \mathcal{A}_Z$ elemre az $U\pi(A)U^{-1}$ operátor megegyezik az $\hat{A}$-val való szorzás operátorával.

(2) A μ mérték az alábbi formában írható:

$$\mu = \sum_{i\in I} \mu_{x_i},$$

ahol $\{x_i\}_{i\in I}$ páronként ortogonális vektorok, melyek által generált ciklikus ábrázolás megegyezik (H,π)-vel:

$$H = \bigoplus_{i\in I} \overline{\{\pi(A)x_i | A \in \mathcal{A}_Z\}}.$$

Valamint a μ_{x_i} mérték a Riesz-reprezentációs tétel értelmében az x_i vektorhoz rendelt mérték.

(3) Minden $i \in I$ elemhez létezik $S_i \subseteq \mathbb{T}^2$ Borel részhalmaz úgy, hogy $\mu_{x_i}(S_i) = \mu_{x_i}(\mathbb{T}^2)$ és ha $y \perp H_x$ akkor $\mu_y(S_i) = 0$.

Jelölések.

(1) A μ_{x_i} mértéket gyakran μ_i-nek írjuk.

(2) Ha f $\mathbb{T}^2$-en értelmezett függvény és $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, akkor az f eltoltját $f^{(a,b)}$ jelöli, amit az alábbi módon értelmezünk:

$$f^{(a,b)}(\alpha,\beta) := f\big((\alpha - a) \mod 1, (\beta - b) \mod 2\pi\big).$$

(3) Ha μ pozitív mérték $\mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$-en, akkor a μ mérték $(a,b) \in \mathbb{R}^2$-vel való eltolját $\mu^{(a,b)}$-vel jelöljük és a

$$\mu^{(a,b)}(f) := \mu(f^{(a,b)})$$

formulával értelmezzük minden $\mathbb{T}^2$-en értelmezett korlátos Borel-mérhető függvényre.

A kimondott tételt (a többi tételhez hasonlóan) nem bizonyítjuk, csak az alábbi lemmát nézzük meg részletesen (mely igen fontos a tétel bizonyításánál).

1. Lemma. Minden $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ és $x \in H$ esetén a $\pi(W(a,b))x$ vektorhoz rendelt $\mu_{\pi(W(a,b))}x$ mérték egyenlő $\mu_x^{(a,b)}$ mértékkel.

1. Lemma bizonyítása. Az alábbi egyenlőséget kell igazolnunk tetszőleges $a \in \mathcal{A}_Z$ elemre:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \hat{a} d\mu_{\pi(W(a,b))x} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{a}\big((\alpha - a) \mod 1, (\beta - b) \mod 2\pi\big) d\mu_x(\alpha, \beta).$$

Definiáljuk a τ leképzést:

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_Z) \qquad (x,y) \mapsto \tau_{a,b}$$
$$\tau_{a,b} : \mathcal{A}_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{Z}} \qquad A \mapsto W(a,b)^{-1} A W(a,b).$$

A $\tau_{a,b}$ belső automorfizmusa $\mathcal{A}_Z$-nek, a $\hat{\tau}_{a,b}$ Gelfand-transzformáltja automorfizmusa $C(\mathbb{T}^2)$-nek. Közvetlen számolással igazolható, hogy

$$\hat{\tau}_{a,b}(\hat{A}) = \hat{A}^{(a,b} \qquad \forall \hat{A} \in \hat{\mathcal{A}}_Z.$$

Ezek után már igazolhatjuk a kívánt egyenlőséget:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \hat{A} d\mu_{\pi(W(a,b))x} = \langle \pi(W(a,b))x, \pi(A)\pi(W(a,b))x \rangle =$$
$$\langle x, \pi(W(a,b))^{-1} \pi(A) \pi(W(a,b))x \rangle = \langle x, \pi\big(W(a,b)^{-1} A W(a,b)\big)x \rangle =$$
$$\langle x, \pi(\tau_{a,b} A)x \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\tau}_{a,b}(\hat{A}) d\mu_x.$$