Tételgyűjtemény a harmonikus analízis elemeiből

Andai Attila

Az itt szereplő tételekhez szükséges fogalmak és bizonyítások megtalálhatók a Kristóf János: Az analízis elemei IV. jegyzetben. Ez tanulási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák!

XVII. A harmonikus analízis elemei

1. Csoportábrázolások

Ha G csoport és V unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor V algebrai és geometriai irreducibilitása ekvivalens.

Ha G kommutatív csoport, akkor minden irreducibilis unitér ábrázolása egy dimenziós.

Ha G csoport és V irreducibilis unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor minden nemnulla $x \in H$ vektor ciklikus vektor.

Ha G csoport és V unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor V felbontható ciklikus unitér részábrázolások összegére.

Ha G csoport és V véges dimenziós unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor V felbontható irreducibilis unitér részábrázolások összegére.

Minden G csoporthoz létezik olyan κ kardinális szám, hogy a G minden ciklikus unitér ábrázolásának Hilbert-dimenziója kisebb-egyenlő κ-nál.

2. Topologikus csoportok és folytonos ábrázolások

Legyen G csoport. Ha $\mathcal{T}$ csoport-topológia G felett és $\mathcal{B}$ az e-nek környezetbázisa, akkor $\mathcal{B}$-re teljesülnek a következők:

(1) Minden $U \in \mathcal{B}$ halmazhoz létezik olyan $V \in \mathcal{B}$, hogy $VV \subseteq U$.
(2) Minden $U \in \mathcal{B}$ halmazhoz létezik olyan $V \in \mathcal{B}$, hogy $V^{-1} \subseteq U$.
(3) Minden $U \in \mathcal{B}$ halmazhoz és $s \in G$ elemhez létezik olyan $V \in \mathcal{B}$, hogy $sVs^{-1} \subseteq U$.

Megfordítva, ha $\mathcal{B}$ olyan rács, amelynek minden eleme e-t tartalmazó részhalmaz G-ben és teljesülnek rá a fenti tulajdonságok, akkor létezik egyetlen olyan G feletti $\mathcal{T}$ csoporttopológia, hogy $\mathcal{B}$ a e környezetbázisa $\mathcal{T}$ szerint.

Minden topologikus csoport reguláris topologikus tér.

Ha G topologikus csoport, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) A G topologikus tér T_2 tér.
(2) A G topologikus tér T_1 tér.
(3) A G topologikus tér T_0 tér.

Ha G topologikus csoport, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) A G topologikus tér M_1 tér.
(2) Az e-nek létezik megszámlálható környezetbázisa.
(3) Létezik olyan G feletti d balinvariáns (illetve jobbinvariáns) félmetrika, hogy $\mathcal{T}_d$ egyenlő a G topológiájával, és minden $r > 0$ számra a $B_r(e,d)$ gömb szimmetrikus halmaz.
(4) A G topologikus tér félmetrizálható.

Ha G topologikus csoport, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) A G topologikus tér M_1 és T_0 tér.
(2) Az e-nek van olyan $\mathcal{B}$ környezetbázisa, hogy $\{e\} = \bigcap_{U\in\mathcal{B}} U$.
(3) Létezik olyan G feletti d balinvariáns (illetve jobbinvariáns) metrika, hogy $\mathcal{T}_d$ egyenlő a G topológiájával, és minden $r > 0$ számra a $B_r(e,d)$ gömb szimmetrikus halmaz.
(4) A G topologikus tér metrizálható.

Szeparált topologikus csoport minden lokálisan kompakt részcsoportja zárt. Lokálisan kompakt csoport zárt részcsoportjai megegyeznek a lokálisan kompakt részcsoportjaival.

A G topologikus csoport minden nyílt részcsoportja zárt. Speciálisan, ha G összefüggő topologikus csoport, akkor G az egyetlen nyílt részcsoport G-ben.

Legyen G_0 a G topologikus csoport neutrális elemének összefüggő komponense. Ekkor G_0 zárt invariáns részcsoport G-ben.

Legyen V olyan környezete a G topologikus csoport neutrális elemének, hogy $V^{-1} = V$. Ekkor $V^{(\infty)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V^{(n)}$ halmaz nyílt részcsoport G-ben.

Ha G olyan lokálisan kompakt csoport, hogy G összefüggő komponenseinek halmaza megszámlálható, akkor G σ-kompakt.

Legyenek G_1 és G_2 topologikus csoportok, és $f : G_1 \to G_2$ folytonos, végtelenben eltünő függvény. Ekkor e_2 minden V_2 környezetéhez létezik e_1-nek olyan V_1

környezete, hogy minden $s_a, s_b \in G_1$ elemre, ha $s_b \in s_a V_1$ vagy $s_b \in V_1 s_a$ akkor $f(s_b) \in f(s_a)V_2$ és $f(s_b) \in V_2 f(s_a)$.

A $\pi_{G/H} : G \to G/H$ kanonikus szürjekció nyílt.

Legyen G topologikus csoport és H részcsoportja G-nek. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A H zárt részcsoport G-ben.
(2) A G/H T_2 tér.
(3) A G/H T_1 tér.
(4) A G/H T_0 tér.

Legyen G topologikus csoport és H részcsoportja G-nek. Ekkor $\gamma_{G/H}$ tranzitív folytonos topologikus ábrázolása G-nek a G/H topologikus térben.

Ha G lokálisan kompakt csoport és H zárt részhalmaza G-nek, akkor a G/H topologikus tér lokálisan kompakt és parakompakt.

Legyen γ tranzitív folytonos topologikus ábrázolása G topologikus csoportnak az X topologikus térben. Ha G σ-kompakt, továbbá X T_2 tér, és X nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként, akkor:

(1) Minden $x \in X$ pontra a $\dot{\rho}_x : G/G_x \to X$ folytonos bijekció homeomorfizmus.
(2) Minden $x \in X$ pontra a γ_{G/G_x} és γ topologikus ábrázolások topologikusan ekvivalensek.
(3) Az X tér σ-kompakt és lokálisan kompakt.

Legyen γ tranzitív ábrázolása a G csoportnak az X nemüres halmazban. Ekkor minden G feletti csoport-topológiához egyértelműen létezik olyan X feletti topológia, hogy minden $x \in X$ pontra a $\dot{\rho}_x : G/G_x \to X$ bijekció homeomorfizmus. Ha adott G-n egy csoport-topológia és X-t ellátjuk ezzel a topológiával, akkor γ folytonos topologikus ábrázolás.

Legyen G topologikus csoport és V unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A V folytonos unitér ábrázolás.
(2) Minden $x \in H$ vektorra a $G \to H; s \mapsto V(s)x$ függvény folytonos.
(3) Minden $x, y \in H$ vektorra a $G \to \mathbb{C}; s \mapsto \langle V(s)x, y\rangle$ függvény folytonos.
(4) Létezik olyan $D \subseteq H$, hogy minden $x, y \in D$ vektorra a $\langle V(\cdot)x, y\rangle : G \to \mathbb{C}$ mátrixelem-függvény e-ben folytonos, és D lineáris burka sűrű H-ban.
(5) Minden $x \in H$ vektorra a $\langle V(\cdot)x, y\rangle : G \to \mathbb{C}$ mátrixelem-függvény e-ben folytonos.

Ha G csoport, $s \in G$ és minden $j \in \mathbb{N}^*$ számhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}^*$ és $t \in G$, hogy $s^{jk} = tst^{-1}$, akkor $s \in G_F$.

3. Folytonos függvények lokálisan kompakt tér felett

Legyenek T és T' topologikus terek, F normált tér és $f : T \times T' \to F$ folytonos függvény. Minden $K' \subseteq T'$ kvázikompakt halmazhoz, $t_0 \in T$ ponthoz, és $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik a t_0-nak olyan U környezete T-ban, hogy:

$$\sup_{(t,t') \in U \times K'} ||f(t,t') - f(t_0,t')|| \leq \varepsilon.$$

Legyen T topologikus tér, F normált tér, $f \in C(T;F)$ és $(g_i)_{i \in I}$ olyan véges rendszer $C(T;\mathbb{R})$-ben, hogy $||f|| \leq \sum_{i \in I} g_i$ és minden $i \in I$ esetén $g_i \geq 0$. Ekkor van olyan $(f_i)_{i \in I}$ rendszer $C(T;F)$-ben, hogy minden $i \in I$-re $||f_i|| \leq g_i$ és $f = \sum_{i \in I} f_i$. Ha f valós (pozitív) függvény akkor az $(f_i)_{i \in I}$ rendszer megválasztható úgy, hogy minden tagja valós (pozitív) legyen.

Legyen T lokálisan kompakt tér, és $f, g \in C_0(T;\mathbb{C})$ olyan függvények, hogy $|f| \leq |g|$. Ekkor létezik olyan $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $C_0(T;\mathbb{C})$-ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\phi_n| \leq 1$ és $\mathrm{supp}(\phi_n) \subseteq [f \neq 0]$ és $\lim_{n \to \infty}(g\phi_n) = f$ a T-n egyenletesen.

Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér, és $f \in C_0(T;F)$. Minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $(\phi_i)_{i \in I}$ véges rendszer $C_0(T)$-ben, és olyan $(z_i)_{i \in I}$ rendszer F-ben, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, és minden $t \in T$ pontra

$$||f(t) - \sum_{i \in I} \phi_i(t) z_i|| < \varepsilon.$$

Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek. Ha $f \in C_0(T \times T';\mathbb{K})$, és $K \subseteq T$, $K' \subseteq T'$ olyan kompakt halmazok, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq K \times K'$, akkor minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $g \in C_0(T;\mathbb{K}) \otimes C_0(T';\mathbb{K})$, hogy $\mathrm{supp}(g) \subseteq K \times K'$, és minden $(t,t') \in T \times T'$ pontra

$$|f(t,t') - g(t,t')| < \varepsilon.$$

Legyen T lokálisan kompakt tér és R olyan ekvivalenciareláció T felett, hogy a T/R topologikus tér T_2, és a $\pi : T \to T/R$ kanonikus szürjekció nyílt leképzés. Ha T/R parakompakt, akkor létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény, hogy:

(1) Minden $\xi \in T/R$ pontra $\xi \cap [f > 0] \neq \emptyset$.
(2) Minden $K \subseteq T/R$ kompakt halmazra a $\pi^{-1}(K) \cap \mathrm{supp}(f)$ halmaz kompakt T-ben.

Ha T megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér, akkor a $C(T;\mathbb{K})$ függvénytér a kompakt konvergencia topológiájával ellátva szeparábilis metrizálható lokálisan konvex tér.

4. Komplex Radon-mértékek

Ha T lokálisan kompakt tér, akkor egy $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pontosan akkor Radon-mérték T felett, ha minden $C_0(T;\mathbb{C})$-ben haladó $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra teljesül az, hogy ha $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál 0-hoz és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(\phi_n)$ relatív kompakt halmaz, akkor teljesül a $\lim_{n\to\infty} \theta(\phi_n) = 0$ egyenlőség.

Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek $g \in C(T;\mathbb{C})$, és $\pi : T \to T'$ olyan folytonos függvény, hogy minden $K' \subseteq T'$ kompakt halmazra $\pi^{-1}(K') \subseteq T$ kompakt halmaz. Ekkor minden $\phi' \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre $g(\phi' \circ \pi) \in C_0(T;\mathbb{C})$, és minden $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$ Radon mértékre a

$$\pi(g\theta) : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \qquad \phi' \mapsto \theta(g(\phi' \circ \pi))$$

leképzés Radon-mérték T' felett.

Ha T lokálisan kompakt tér és $\mu : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ olyan lineáris funkcionál, hogy minden $\phi \in C_0(T)_+$ függvényre $\mu(\phi) \in \mathbb{R}_+$, akkor μ pozitív Radon-mérték T felett.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $\mu_0 : C_0(T)_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan T feletti μ pozitív Radon-mérték, hogy $\mu_0 \subseteq \mu$, ha μ_0 additív.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $\mu \in \mathcal{M}(T;\mathbb{R})$. Létezik egyetlen olyan μ^+ pozitív Radon-mérték T felett, hogy minden $\phi \in C_0(T)_+$ függvényre

$$\mu^+(\phi) = \sup_{\substack{\xi \in C_0(T)_+ \\ \xi \leq \phi}} \mu(\xi)$$

teljesül. Továbbá ekkor a $\mu^- := \mu^+ - \mu$ funkcionál szintén pozitív Radon-mérték T felett, és $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pontosan akkor Radon-mérték T felett, ha θ előáll T feletti pozitív Radon-mértékek komplex lineáris kombinációjaként.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Létezik egyetlen olyan $|\theta|$ pozitív Radon-mérték T felett, hogy minden $\phi \in C_0(T)_+$ függvényre

$$|\theta|(\phi) = \sup_{\substack{\xi \in C_0(T;\mathbb{C}) \\ |\xi| \leq \phi}} |\theta(\xi)|.$$

Ha T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$, akkor minden $\phi \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre

$$|\theta|(|\phi|) = \sup_{\substack{\xi \in C_0(T;\mathbb{C}) \\ |\xi| \leq 1}} |\theta(\xi\phi)|.$$

Legyen T lokálisan kompakt tér, $g \in C(T;\mathbb{C})$, és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Ekkor a következő teljesül

$$|g\theta| = |g| \cdot |\theta|.$$

Ha T lokálisan kompakt tér, $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$ és $(U_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer T-ben, hogy minden $i \in I$ indexre U_i nyílt θ-nullhalmaz, akkor $\bigcup_{i \in I} U_i$ is nyílt θ-nullhalmaz.

Ha T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$, akkor létezik lyan tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt halmaz T-ben, amely θ-nullhalmaz.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Ha $\phi \in C_0(T;\mathbb{C})$ olyan függvény, hogy $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\phi = 0]$, akkor $\theta(\phi) = 0$.

Ha T lokálisan kompakt tér, $f, g \in C(T,\mathbb{C})$, és $\theta \in \mathcal{M}(T,\mathbb{C})$, akkor $g\theta = f\theta$ ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [f = g]$.

Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$. Minden $C_0(T;\mathbb{K})$-beli $(\phi_i)_{i \in I}$ és F-beli $(z_i)_{i \in I}$ véges rendszerre fennáll

$$\left\| \sum_{i \in I} \theta(\phi_i) z_i \right\| \leq |\theta| \cdot \left\| \sum_{i \in I} \phi_i z_i \right\|.$$

Legyen T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$. Létezik egyetlen olyan

$$\int : C_0(T;F) \to F \qquad f \mapsto \int_T f\, d\theta$$

$\mathbb{K}$-lineáris operátor, hogy

(1) Minden $\phi \in C_0(T, \mathbb{K})$ függvényre és $z \in F$ vektorra $\int_T \phi z \, d\theta = \theta(\phi) z$.
(2) Minden $f \in C_0(T; F)$ függvényre

$$\left|\left| \int_T f \, d\theta \right|\right| \leq |\theta| \cdot ||f||.$$

Legyen T lokálisan kompakt tér, F és G Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $u \in \mathcal{L}(F, G)$. Ha $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{K})$ és $f \in C_0(T; F)$ akkor

$$\int_T u \circ f \, d\theta = u\left(\int_T f \, d\theta\right).$$

Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek $g \in C(T; \mathbb{K})$, és $\pi : T \to T'$ olyan folytonos függvény, hogy minden $K' \subseteq T'$ kompakt halmazra $\pi_{-1}(K') \subseteq T$ kompakt halmaz. Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{K})$, akkor minden $f \in C_0(T'; F)$ függvényre

$$\int_{T'} f \, d(\pi(g\theta)) = \int_T (f \circ \pi) g \, d\theta.$$

Legyen T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{K})$ kompakt tartójú Radon-mérték. Ha $\phi, \psi \in C_0(T; \mathbb{K})$ olyan függvények, hogy $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\phi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\psi = 1]$, akkor minden $f : T \to F$ folytonos függvényre

$$\int_T f\phi \, d\theta = \int_T f\psi \, d\theta.$$

Legyenek X, Y, Z topologikus terek, Y lokálisan kompakt és $p : X \times Y \to Z$ folytonos függvény. Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f \in C(Z; F)$ olyan függvény, hogy minden $x_0 \in X$ pontnak létezik olyan V környezete, hogy az

$$\bigcup_{x \in V} p(x, \cdot)^{-1}(\mathrm{supp}(f))$$

halmaz relatív kompakt Y-ban. Ekkor

(1) minden $x \in X$ pontra $f(p(x, \cdot)) \in C_0(Y; F)$, és
(2) minden $\theta \in \mathcal{M}(Y; \mathbb{K})$ Radon-mértékre az

$$X \to F \qquad x \mapsto \int_Y f(p(x, y)) \, d\theta(y)$$

paraméteres integrálfüggvény folytonos.

Legyen X topologikus tér, Y lokálisan kompakt tér és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $f : X \times Y \to F$ folytonos függvény és az X minden pontjának létezik olyan V környezete, hogy a $\mathrm{pr}_Y[(V \times Y) \cap \mathrm{supp}(f)]$ halmaz relatív kompakt Y-ban, akkor minden $x \in X$ pontra $f(x, \cdot) \in C_0(Y; F)$, és minden $\theta \in \mathcal{M}(Y; \mathbb{K})$ Radon-mértékre az

$$X \to F \qquad x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\theta(y)$$

paraméteres integrálfüggvény folytonos.

Ha T és T' lokálisan kompakt terek, $\lambda, \lambda' \in \mathcal{M}(T \times T'; \mathbb{C})$, és minden $\phi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\phi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$ függvényre $\lambda(\phi \otimes \phi') = \lambda'(\phi \otimes \phi')$, akkor $\lambda = \lambda'$.

Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek. Minden $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{C})$ és $\theta' \in \mathcal{M}(T'; \mathbb{C})$ Radon-mértékhez egyértelműen létezik olyan $\theta \otimes \theta' \in \mathcal{M}(T \times T'; \mathbb{C})$, hogy minden $\phi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\phi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$ függvényre

$$(\theta \otimes \theta')(\phi \otimes \phi') = \theta(\phi) \cdot \theta'(\phi').$$

Ha θ és θ' valós (pozitív) Radon-mérték, akkor $\theta \otimes \theta'$ is valós (pozitív) Radon-mérték. Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f \in C_0(T \times T'; F)$, akkor minden $t \in T$, $t' \in T'$ pontra $f(t, \cdot) \in C_0(T'; F)$ és $f(\cdot, t') \in C_0(T; F)$, és minden $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{K})$, $\theta' \in \mathcal{M}(T'; \mathbb{K})$ Radon-mértékre a

$$T \to F \qquad t \mapsto \int_{T'} f(t,t')\, d\theta'(t')$$
$$T' \to F \qquad t' \mapsto \int_{T} f(t,t')\, d\theta'(t)$$

függvények folytonosak, kompakt tartójúak, és

$$\int_{T \times T'} f\, d(\theta \times \theta') = \int_T \left(\int_{T'} f(t,t')\, d\theta'(t') \right) d\theta(t) = \int_{T'} \left(\int_T f(t,t')\, d\theta(t) \right) d\theta'(t').$$

5. Haar-mérték lokálisan kompakt csoport felett

Legyen γ tranzitív topologikus ábrázolása a G csoportnak az X lokálisan kompakt térben. Ekkor minden $f \in C_0(X)$ függvényhez és $g \in C_0^+(X)$ függvényhez létezik olyan $(c_i)_{i \in I}$ véges rendszer $\mathbb{R}_+$-ban és olyan $(s_i)_{i \in I}$ rendszer G-ben, hogy

$$f \leq \sum_{i \in I} c_i g \circ \gamma(s_i^{-1}).$$

Legyen γ tranzitív topologikus ábrázolása a G csoportnak az X lokálisan kompakt térben. Ha μ nem nulla pozitív topologikusan γ-kváziinvariáns Radon-mérték X felett, akkor $\operatorname{supp}(\mu) = X$ és egyértelműen létezik olyan $\chi : G \times X \to \mathbb{R}_+^*$ függvény, hogy minden $s \in G$ elemre a $\chi(s, \cdot) : X \to \mathbb{R}_+^*$ függvény folytonos és $\gamma(s)\mu = \chi(s^{-1}, \cdot)\mu$, továbbá erre a χ függvényre teljesül az, hogy $s_1, s_2 \in G$ és $x \in X$ esetén

$$\chi(e_G, x) = 1,$$
$$\chi(s_1 s_2, x) = \chi(s_1, \gamma(s_2)(x)) \cdot \chi(s_2, x).$$

Ha μ baloldali vagy jobboldali Haar-mérték a G lokálisan kompakt csoport felett, akkor $\operatorname{supp}(\mu) = G$.

Legyen G topologikus csoport és γ folytonos topologikus ábrázolása G-nek az X lokálisan kompakt térben. Ha F Banach-tér, $f \in C_0(X; F)$ és θ Radon-mérték X felett, akkor a

$$G \to F \qquad s \mapsto \int_X f(\gamma(s)x)\, d\theta(x)$$

függvény folytonos.

Ha γ folytonos topologikus ábrázolása a G topologikus csoportnak az X lokálisan kompakt térban és μ nem nulla pozitív relatív γ-invariáns Radon-mérték X felett, akkor a μ multiplikátora folytonos $G \to \mathbb{R}_+^*$ csoport-morfizmus.

Ha G lokálisan kompakt csoport, F Banach-tér, és θ Radon-mérték G felett, akkor minden $f \in C_0(G; F)$ függvényre a

$$G \to F \qquad s \mapsto \int_G f(ss')\, d\theta(s')$$
$$G \to F \qquad s \mapsto \int_G f(s's)\, d\theta(s')$$

függvények folytonosak.

Legyen γ tranzitív topologikus ábrázolása a G csoportnak az X lokálisan kompakt térben, μ tetszőleges topologikusan γ-kváziinvariáns pozitív nem nulla Radon-mérték X felett, és F Hilbert-tér. Jelölje χ a μ Radon-mérték γ-multiplikátorát.

(1) A

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu : C_0(X; F) \times C_0(X; F) \to \mathbb{C} \qquad (f, g) \mapsto \mu(\langle f, g \rangle_F)$$

leképezés skalárszorzás a $C_0(X;F)$ függvénytér felett, ahol $f,g \in C_0(X;F)$ esetén $\langle f,g\rangle_F$ jelöli az

$$X \to \mathbb{C} \qquad x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle_F$$

folytonos kompakt tartójú függvényt.

(2) Minden $s \in G$ elemre a

$$V_0^{(\gamma,\mu,F)}(s) : C_0(X;F) \to C_0(X;F) \qquad f \mapsto \sqrt{\chi(s^{-1},\cdot)} f \circ \gamma(s^{-1})$$

leképezés olyan lineáris bijekció, amely megtartja a $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ skalárszorzást, és a

$$V_0^{(\gamma,\mu,F)} : G \to \mathrm{GL}(C_0(X;F)) \qquad s \mapsto V_0^{(\gamma,\mu,F)}(s)$$

leképezés csoport-morfizmus, vagyis $V_0^{(\gamma,\mu,F)}$ lineáris ábrázolása G-nek a $C_0(X;F)$ vektortérben.

(3) Jelölje $V^{(\gamma,\mu,F)}$ a $V_0^{(\gamma,\mu,F)}$ ábrázolás teljesítését és legyen $L^2_F(X,\mu)$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ skalárszorzással ellátott $C_0(X;F)$ prehilbert-tér teljes burka. Ha G topologikus csoport, a γ topologikus ábrázolás folytonos, és a

$$\chi : G \times X \to \mathbb{R}_+^*$$

függvény a szorzattopológi szerint folytonos, akkor $V^{(\gamma,\mu,F)}$ folytonos unitér ábrázolása G-nek a $L^2_F(X,\mu)$ Hilbert-térben.

(4) Ha $F \neq \{0\}$ és a γ topologikus ábrázolás injektív, akkor a $V^{(\gamma,\mu,F)}$ unitér ábrázolás is injektív.

Minden lokálisan kompakt csoport felett létezik baloldali Haar-mérték, és lokálisan kompakt csoport felett bármely két baloldali Haar-mérték arányos egymással.

Legyen G lokálisan kompakt csoport. Létezik egyentlen olyan $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$ függvény, hogy minden G feletti β baloldali Haar-mértékre és minden $s \in G$ esetén

$$\delta_G(s)\beta = \Delta_G(s)\beta.$$

Ez a Δ_G függvény folytonos csoport-morfizmus G és $\mathbb{R}_+^*$ között.

Legyen G olyan lokálisan kompakt csoport, hogy létezik e-nek olyan W kompakt környezete, hogy minden $s \in G$ esetén

$$sWs^{-1} \subseteq W.$$

Ekkor G unimoduláris.

Minden diszkrét, kompakt vagy kommutatív lokálisan kompakt csoport unimoduláris.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$. Ekkor van egyetlen olyan $\mathrm{mod}_G(\pi) > 0$ valós szám, hogy minden G feletti baloldali Haar-mértékre

$$\pi(\beta) = \mathrm{mod}_G(\pi)^{-1}\beta.$$

Legyenek N és H lokálisan kompakt csoportok, $\tau : H \to \mathrm{Aut}(N)$ csoport-morfizmus, és tegyük fel, hogy a

$$H \times N \to N \qquad (h, n) \mapsto \tau_h(n)$$

leképezés folytonos. Tekintsük az $N \otimes_\tau H$ topologikus féldirekt szorzatot; ekkor $N \otimes_\tau H$ lokálisan kompakt csoport.

(1) Létezik egyetlen olyan $\chi_\tau : H \to \mathbb{R}_+^*$ függvény, hogy minden N feletti β_N baloldali Haar-mértékre és $h \in H$ esetén

$$\tau_h(\beta_N) = \chi_\tau(h)^{-1}\beta_N$$

teljesül. Ez a folytonos $\chi_\tau : H \to \mathbb{R}_+^*$ függvény folytonos csoport-morfizmus.

(2) Legyen β_N, β_H baloldali Haar-mérték N, H felett. Ekkor a

$$\beta_N \otimes (\chi_\tau^{-1}\beta_H)$$

mérték baloldali Haar-mérték $N \otimes_\tau H$ felett.

(3) Fennáll az

$$\Delta_{N\otimes_\tau H} = \Delta_N \otimes (\chi_\tau^{-1}\Delta_H)$$

egyenlőség.

(4) Ha ν_N, ν_H jobboldali Haar-mérték N, H felett, akkor $\nu_N \otimes \nu_H$ jobboldali Haar-mérték $N \otimes_\tau H$ felett.

6. Lokálisan kompakt csoport mértékalgebrája

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett.

(1) Minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre $\phi^* \in C_0(G;\mathbb{C})$ és $\mathrm{supp}(\phi^*) = (\mathrm{supp}(\phi))^{-1}$. Minden $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre $\phi *_\beta \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ és $\mathrm{supp}(\phi *_\beta \psi) \subseteq \mathrm{supp}(\phi) \cdot \mathrm{supp}(\psi)$.

(2) A $C_0(G;\mathbb{C})$ komplex vektortér a

$$C_0(G;\mathbb{C}) \times C_0(G;\mathbb{C}) \to C_0(G;\mathbb{C}) \qquad (\phi, \psi) \mapsto \phi *_\beta \psi$$

szorzással, a

$$C_0(G;\mathbb{C}) \to C_0(G;\mathbb{C}) \qquad \phi \mapsto \phi^*$$

involúcióval, és a

$$||\cdot||_{\beta,1} : C_0(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \qquad \phi \mapsto \beta(|\phi|)$$

normával ellátva normált *-algebra.

(3) Minden $s \in G$ és $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ esetén

$$(\phi *_\beta \psi) \circ \gamma_G(s) = (\phi \circ \gamma_G(s)) *_\beta \psi,$$
$$(\phi *_\beta \psi) \circ \delta_G(s) = \phi *_\beta (\psi \circ \delta_G(s)).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, β baloldali Haar-mérték G felett, és értelmezzük a

$$j_\beta : C_0(G;\mathbb{C}) \to \mathcal{M}^b(G;\mathbb{C}) \qquad \phi \mapsto \phi \cdot \beta$$

leképezést. Ekkor $(\overline{\mathrm{Im}(j_\beta)}, j_\beta)$ pár teljes burka a $||\cdot||_{\beta,1}$ normával ellátott $C_0(G;\mathbb{C})$ függvénytérnek, ahol $\overline{\mathrm{Im}(j_\beta)}$ az $\mathrm{Im}(j_\beta) \subseteq \mathcal{M}^b(G;\mathbb{C})$ lineáris altér mértéknorma szerinti lezártját jelöli.

Legyen G lokálisan kompakt csoport. Minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényhez létezik olyan $\psi \in C_0(G)$, $0 \leq \psi \leq 1$ függvény, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik e_G-nek olyan W környezete, hogy minden $s \in W$ és $t \in G$ pontra

$$|\phi(s^{-1}t) - \phi(t)| \leq \varepsilon\psi(t),$$
$$|\phi(ts) - \phi(t)| \leq \varepsilon\psi(t)$$

teljesül.

Ha G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett, akkor a

$$G \times C_0(G;\mathbb{C}) \to C_0(G;\mathbb{C}) \qquad (s,\phi) \mapsto \phi \circ \gamma_G(s^{-1})$$

leképezés folytonos a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}_{||\cdot||_{\beta,1}}$ és $\mathcal{T}_{||\cdot||_{\beta,1}}$ topológiák szerint, ahol $\mathcal{T}$ jelöli a G topológiáját.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. Legyen $\mathfrak{B}$ tetszőleges környezetbázisa e-enk, és a $\mathfrak{B}$ halmazt rendezzük a $\supseteq$ relációval. Legyen $(\phi_W)_{W\in\mathfrak{B}}$ olyan rendszer $C_0(G)_+$-ban, hogy minden $W \in \mathfrak{B}$ halmazra $\mathrm{supp}(\phi_W) \subseteq W$ és $\beta(\phi_W) = 1$. Ekkor a $(\phi_W)_{W\in\mathfrak{B}}$ általánosított sorozat approximatív egység az $C_0(G;\mathbb{C})$ normált algebrában, tehát minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$\phi = \lim_{W,\mathfrak{B}}(\phi *_\beta \phi_W) = \lim_{W,\mathfrak{B}}(\phi_W *_\beta \phi)$$

teljesül a $\mathcal{T}_{||\cdot||_{\beta,1}}$ topológia szerint.

Lokálisan kompakt csoport mértékalgebrája approximatív egységes Banach *-algebra.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A G csoport kommutatív.
(2) A $C_0(G;\mathbb{C})$-ben a $*_\beta$ konvolúciós szorzás kommutatív.
(3) Az $L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Banach *-algebra kommutatív.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. Legyen $\mathfrak{B}$ tetszőleges környezetbázisa e_G-nek, és a $\mathfrak{B}$ halmazt rendezzük a $\supseteq$ relációval. Legyen $(\phi_W)_{W\in\mathfrak{B}}$ olyan rendszer $C_0(G)_+$-ban, hogy minden $W \in \mathfrak{B}$ halmazra $\mathrm{supp}(\phi_W) \subseteq W$ és $\beta(\phi_W) = 1$. Ha F Banach-tér és $f \in C(G;F)$, akkor

$$f(e_G) = \lim_{W,\mathfrak{B}} \int_G \phi_W d\, d\beta.$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A G csoport diszkrét.
(2) A $C_0(G;\mathbb{C})$-ben létezik neutrális elem a $*_\beta$ konvolúciós szorzás szerint.
(3) Az $L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Banach *-algebra egységelemes.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. Ha β baloldali Haar-mérték G felett, akkor létezik egyetlen olyan

$$V_\beta : C_0(G;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

leképezés, amelyre teljesül az, hogy minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre és $\xi\eta \in H$ vektorra

$$\langle V_\beta(\phi)\xi, \eta\rangle = \int_G \langle V(s)\xi, \eta\rangle \phi(s)\, d\beta(s).$$

Ez a V_β leképezés folytonos nemelfajult ábrázolása $C_0(G;\mathbb{C})$ normált *-algebrának a H Hilbert-térben. Minden $s \in G$ és $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ V_\beta(\phi) = V_\beta(\phi \circ \gamma_G(s^{-1}))$$

teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, és β baloldali Haar-mérték G felett. Ekkor $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ esetén

$$\phi *_\beta \psi = \int_G \phi(t) \cdot \psi \circ \gamma_G(t^{-1})\, d\beta(t).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. Ha

$$\pi : L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult ábrázolása az $L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Banach *-algebrának a H Hilbert-térben, akkor létezik, egyetlen olyan, V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, amelyre $\pi = \hat{V}_\beta$ teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. Ha U és V folytonos unitér ábrázolásai G-nek, akkor

$$C(U;V) = C(U_\beta; V_\beta) = C(\hat{U}_\beta; \hat{V}_\beta).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport. Ha U és V folytonos unitér ábrázolásai G-nek, akkor U és V pontosan akkor unitér ekvivalensek ha $\hat{U}_\beta$ és $\hat{V}_\beta$ ábrázolások unitér ekvivalensek. Ha V folytonos unitér ábrázolása G-nek, akkor V pontosan akkor irreducibilis (illetve ciklikus), ha $\hat{V}_\beta$ ábrázolás irreducibilis (illetve ciklikus).

Legyen G lokálisan kompakt csoport, β baloldali Haar-mérték G felett, és jelölje V a $V^{(\gamma_G,\beta,\mathbb{C})}$ baloldali reguláris ábrázolást.

(1) Minden $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$V_\beta(\phi)(\psi) = \phi *_\beta \psi$$

teljesül.

(2) Minden $\theta \in \mathcal{M}(G;\mathbb{C})$ és $\psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ elemre legyen

$$\theta * \psi : G \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \int_G \psi(s^{-1}t)\, d\theta(s).$$

Ekkor $\theta \in \mathcal{M}(G;\mathbb{C})$ és $\psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ esetén $\theta * \psi : G \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, és ha $\theta \in L(G)$, akkor minden $\psi' \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$\langle \hat{V}_\beta(\theta)(\psi), \psi' \rangle_\beta = \int_G (\theta * \psi) \cdot \bar{\psi}'\, d\beta$$

teljesül, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ jelöli a skalárszorzás $L^2_{\mathbb{C}}(G,\beta)$-ban.

Ha G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett, akkor az $L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Banach *-algebrának létezik hű ábrázolása.

Ha G lokálisan kompakt csoport, akkor minden $s,t \in G$, $s \neq t$ ponthoz létezik G-nek olyan V irreducibilis unitér ábrázolása, hogy $V(s) \neq V(t)$.

Ha G lokálisan kompakt csoport, akkor $\hat{G}$ szétválaszt G felett.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, β baloldali Haar-mérték G felett, és μ valószínűségi Radon-mérték a

$$\sigma\big(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)', L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)\big) \mid K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))$$

topológiával ellátott $K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))$ kompakt tér felett. Minden $\theta \in L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ esetén legyen

$$v_\theta = (\pi_f(\theta)\xi_f)_{f \in K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} \in \prod_{f \in K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} H_f,$$

továbbá értelmezzük a

$$H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)} = \big\{ v_\theta \quad | \quad \theta \in L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta) \big\}$$

halmazt.

(1) A $H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}$ lineáris altere a

$$\prod_{f \in K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} H_f$$

lineáris szorzattérnek, és minden $x,y \in H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}$ elemre a

$$K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto \langle x(f), y(f) \rangle_{H_f}$$

leképezés folytonos, és minden $\theta \in L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ és $x \in H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}$ vektorra

$$\big(\pi_f(\theta)(x(f))\big)_{f \in K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} \in H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}.$$

(2) A

$$||\cdot||_\mu : H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)} \to \mathbb{R}_+ \qquad x \mapsto \sqrt{\int_{K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} ||x(f)||^2_{H_f}\, d\mu(f)}$$

leképezés Hilbert-félnorma a $H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}$ komplex vektortér felett. Jelölje H_μ a $H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}/\ker(||\cdot||_\mu)$ prehilbert-tér teljes burkát, és minden $x \in H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}$ elemre legyen $x^\bullet$ az x ekvivalencia-osztálya $H_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)}/\ker(||\cdot||_\mu)$-ben.

(3) Az
$$\{v_\phi^\bullet \quad | \quad \phi \in C_0(G;\mathbb{C})\}$$
halmaz sűrű lineáris altér a H_μ Hilbert-térben.

(4) Az
$$\int_{K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} V_f \, d\mu(f)$$
unitér ábrázolás tere egyenlő H_μ-vel, és minden
$$x, y \in \{v_\phi \quad | \quad \phi \in C_0(G;\mathbb{C})\}$$
vektorra a
$$K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)) \times G \to \mathbb{C} \qquad (f,s) \mapsto \big\langle V_f(s)x(f), y(f)\big\rangle_{H_f}$$
függvény folytonos a szorzattopológia szerint, és minden $s \in G$ esetén fennáll a
$$\left\langle \left(\int_{K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} V_f \, d\mu(f) \right)(s)x^\bullet, y^\bullet \right\rangle_\mu = \int_{K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} \big\langle V_f(s)x(f), y(f)\big\rangle_{H_f} \, d\mu(f)$$
egyenlőség, ahol $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ jelöli a H_μ feletti skalárszorzást.

Ha G megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett, akkor az $L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Banach *-algebra szeparábilis.

Legyen G megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoport, β baloldali Haar-mérték G felett, és V ciklikus folytonos unitér ábrázolása G-nek. A $K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))$ kompakt konvex halmaz felett ekkor létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték, amely az
$$\mathrm{Ext}\big(K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))\big)$$
halmazon koncentrált és V unitér ekvivalens
$$\int_{K(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta))} V_f \, d\mu(f)$$
ábrázolással.

7. Kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai

Legyen G lokálisan kompakt csoport és β baloldali Haar-mérték G felett. A G topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha β folytonos a sup-normában, vagyis létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, hogy minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre
$$|\beta(\phi)| \leq C||\phi||_G.$$

Ha G kompakt csoport, β Haar-mérték G felett, és χ nemtriviális folytonos unitér karaktere G-nek, akkor:

$$\int_G \chi\, d\beta = 0.$$

Ha G kompakt csoport, és Γ a G folytonos unitér karaktereinek olyan halmaza, amely a pontonként értelmezett szorzással csoport és Γ szétválaszt G felett, akkor Γ egyenlő a G folytonos unitér karaktereinek halmazával.

Legyen $(G_i)_{i\in I}$ kompakt csoportok olyan rendszere, hogy minden $i \in I$ indexre a G_i feletti folytonos unitér karakterek halmaza szétválaszt G_i felett. A $\prod_{i\in I} G_i$ topologikus szorzatcsoport minden χ folytonos unitér karakteréhez egyértelműen létezik olyan $(\chi_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ indexre χ_i folytonos unitér karaktere G_i-nek, és az

$$\{i \in I \quad | \quad \chi_i \neq 1\}$$

halmaz véges, és minden $(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ elemre

$$\chi((s_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} \chi_i(s_i)$$

teljesül.

Legyen G kompakt csoport és V olyan lineáris ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, hogy

$$G \times H \to H \qquad (s,\xi) \mapsto V(s)\xi$$

változóiban folytonos függvény. Ekkor létezik a H vektortér felett olyan Hilbert-norma, amely ekvivalens a H normájával, és amelyre nézve V folytonos unitér ábrázolása G-nek.

Legyen G kompakt csoport, és β normált Haar-mérték G felett.

(1) Ha V_1, V_2 folytonos unitér ábrázolása G-nek a H_1, H_2 Hilbert-térben, és a V_1 és V_2 ábrázolások diszjunktak (vagyis $C(V_1;V_2) = \{0\}$), akkor minden $\xi_1, \eta_1 \in H_1$, $\xi_2, \eta_2 \in H_2$ vektorra:

$$\int_G \langle V_1(s)\xi_1, \eta_1\rangle \overline{\langle V_2(s)\xi_2, \eta_2\rangle}\, d\beta(s) = 0.$$

(2) Ha V irreducibilis folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor H véges dimenziós, és minden $\xi_1, \eta_1 \in H_1$, $\xi_2, \eta_2 \in H_2$ vektorra:

$$\int_G \langle V(s)\xi_1, \eta_1\rangle \overline{\langle V(s)\xi_2, \eta_2\rangle}\, d\beta(s) = \frac{1}{\dim(H)} \langle \xi_1, \xi_2\rangle \overline{\langle \eta_1, \eta_2\rangle}.$$

Ha V_1 és V_2 unitér inekvivalens irreducibilis folytonos unitér ábrázolásai a G kompakt csoportnak, akkor V_1 és V_2 diszjunktak (vagyis $C(V_1;V_2)=\{0\}$).

Legyen G kompakt csoport. Ha V_1 és V_2 unitér ekvivalens folytonos unitér ábrázolásai G-nek, akkor $\mathfrak{G}_{V_1}(G)=\mathfrak{G}_{V_2}(G)$. Ha V_1 és V_2 diszjunkt folytonos unitér ábrázolásai G-nek, akkor

$$\mathfrak{G}_{V_1} \perp \mathfrak{G}_{V_2}$$

a $\langle\cdot,\cdot\rangle_\beta$ skalárszorzás szerint, bármely G feletti β Haar-mértékre.

Legyen G kompakt csoport és $\Gamma \subseteq \hat{G}$ olyan részhalmaz, hogy a G triviális unitér karaktere eleme Γ-nak, és minden $U \in \Gamma$ ábrázolásra $\bar{U} \in \Gamma$, továbbá minden $U_1, U_2 \in \Gamma$ ábrázoláshoz létezik olyan $(V_i)_{i\in I}$ véges rendszer Γ-ban, hogy $U_1 \times U_2$ unitér ekvivalens $\bigoplus_{i\in I} V_i$-vel. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A Γ szétválaszt G felett.
(2) A $\bigoplus_{U\in\Gamma}\mathfrak{G}_U(G)$ altér sűrű $C(G;\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint.
(3) A $\bigoplus_{U\in\Gamma}\mathfrak{G}_U(G)$ altér sűrű az $L^2_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Hilbert-térben, ahol β Haar-mérték G felett.
(4) $\Gamma=\hat{G}$.

Legyen G kompakt csoport és β normált Haar-mérték G felett. Ha minden $U\in\hat{G}$ elemre $(\xi_{U,i})_{i\in\dim(U)}$ ortonormált bázis az U ábrázolási terében, akkor a

$$\Big(\big(\sqrt{\dim(U)}\langle U(\cdot)\xi_{U,i},\xi_{U,j}\rangle\big)_{i,j\in\dim(U)}\Big)_{U\in\hat{G}}$$

rendszer ortonormált bázis az $L^2_{\mathbb{C}}(G,\beta)$ Hilbert-térben.

Legyen G kompakt csoport és jelölje V a $V^{(\gamma_G,\beta,\mathbb{C})}$ baloldali reguláris ábrázolást, ahol β a normált Haar-mérték G felett. Minden $U\in\hat{G}$ elemre, és az U ábrázolás H_U terének minden $\xi\neq 0$ elemére legyen

$$\mathfrak{G}_{U,\xi}(G)=\{\langle U(\cdot)\xi,\eta\rangle \quad | \quad \eta\in H_U\}.$$

(1) Ha $U\in\hat{G}$ és $\xi\in H_U$ elemre $\mathfrak{G}_{U,\xi}(G)\subseteq\mathfrak{G}$ invariáns altere a V ábrázolásnak, és ha $\xi\neq 0$, akkor

$$\dim(\mathfrak{G}_{U,\xi}(G))=\dim(U).$$

(2) Ha $U\in\hat{G}$ és $\xi\in H_U\setminus\{0\}$, akkor a $V|\mathfrak{G}_{U,\xi}(G)$ részábrázolás unitér ekvivalens $\bar{U}$-val.
(3) A

$$\hat{\bigoplus_{U\in\hat{G}}}\bar{U}^{\dim(U)}$$

Hilbert-összeg unitér ekvivalens V-vel.

Ha G véges diszkrét csoport, akkor $\hat{G}$ véges halmaz, és teljesül a

$$|G| = \sum_{U \in \hat{G}} (\dim(U))^2$$

egyenlőség. Ha G kommutatív is, akkor $|G| = |\hat{G}|$.

Legyen G kompakt csoport és β_G a normált Haar-mérték G felett.

(1) Ha U_1, U_2 unitér inekvivalens véges dimenziós folytonos unitér ábrázolásai G-nek, akkor

$$e_{U_1} *_{\beta_G} e_{U_2} = 0.$$

(2) Ha U véges dimenziós folytonos unitér ábrázolása G-nek, akkor $e_U^* = e_U$, és e_U centrális elem az $L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta_G)$ algebrában, vagyis e_U kommutál az $L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta_G)$ minden elemével.

(3) Ha U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása G-nek, akkor

$$e_U *_{\beta_G} e_U = e_U.$$

Az $(e_U)_{U \in \hat{G}}$ rendszer ortogonális projektor-rendszer az $L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta_G)$ $*$-algebrában.

(4) Ha U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása G-nek, akkor minden $\phi \in \mathfrak{G}_U(G)$ függvényre

$$e_U *_{\beta_G} \phi = \phi *_{\beta_G} e_U = \phi$$

teljesül.

Legyen G kompakt csoport és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. Egyértelműen létezik kardinális számoknak olyan $(m_U)_{U \in \hat{G}}$ rendszere, hogy a

$$\hat{\bigoplus_{U \in \hat{G}}} U^{m_U}$$

Hilbert-összeg unitér ekvivalens V-vel.

8. Kommutatív lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai

Legyen G kommutatív lokálisan kompakt csoport és β Haar-mérték G felett. Egyértelműen létezik olyan

$$\sigma_\beta : \hat{G} \to X\big(L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta)\big)$$

leképezés, hogy minden $\chi \in \hat{G}$ folytonos unitér karakterre és $\phi \in \bar{C}_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$(\sigma_\beta(\chi))(\phi) = \int_G \chi\phi \, d\beta$$

teljesül. Ez a leképezés bijekció $\hat{G}$ és $X\big(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)\big)$ között, és fennáll az

$$X\big(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)\big) = X_{\mathrm{sa}}\big(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)\big)$$

egyenlőség.

Ha G kommutatív lokálisan kompakt csoport és β Haar-mérték G felett, akkor a

$$\sigma_\beta^\sharp : \bar{C}_0\Big(X\big(L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)\big);\mathbb{C}\Big) \to \bar{C}_0(\hat{G};\mathbb{C}) \qquad f \mapsto f \circ \sigma_G$$

leképezés *-izomorfizmus, és az

$$\overline{\mathcal{F}_\beta} = \sigma_\beta^\sharp \circ \mathcal{G}_{L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta)} : L^1_{\mathbb{C}}(G,\beta) \to \bar{C}_0(\hat{G};\mathbb{C})$$

leképezés olyan injektív *-algebra morfizmus, hogy minden $\phi \in \bar{C}_0(G;\mathbb{C})$ függvényre és $\chi \in \hat{G}$ elemre

$$(\overline{\mathcal{F}_\beta}(\phi))(\chi) = \int_G \chi\phi \, d\beta$$

teljesül, és $\mathrm{Im}(\overline{\mathcal{F}_G})$ sup-normában sűrű *-részalgebra $\bar{C}_0(\hat{G},\mathbb{C})$-ben.

Ha G kommutatív lokálisan kompakt csoport, akkor a $\hat{G}$ feletti Gelfand-topológia egyenlő a kompakt konvergencia topológiájával.

Ha G kommutatív lokálisan kompakt csoport, akkor $\hat{G}$ a pontonként értelmezett szorzással és a Gelfand-topológiával ellátva kommutatív lokálisan kompakt csoport.

Legyen G kommutatív lokálisan kompakt csoport és β Haar-mérték G felett. Ha V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor létezik egyetlen olyan

$$P : \bar{C}_0(\hat{G};\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult ábrázolás, hogy $P \circ \overline{\mathcal{F}_\beta} = \hat{V}_\beta$ teljesül. Megfordítva, ha

$$P : \bar{C}_0(\hat{G};\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult ábrázolás, akkor egyértelműen létezik G-nek olyan V folytonos unitér ábrázolása, amelyre

$$P \circ \overline{\mathcal{F}_\beta} = \hat{V}_\beta$$

teljesül.

Ha T lokálisan kompakt tér, H Hilbert-tér, és

$$\mathfrak{p} : \mathcal{B}_0(T) \to \mathcal{L}(H)$$

projektor értékű σ-ortoadditív függvény, akkor

$$\left(\bigcup_{E \in \mathcal{R}} \mathrm{Im}(\mathfrak{p}(E)) \right)^{\perp} = \bigcap_{\phi \in \bar{C}_0(T;\mathbb{C})} \ker \left(\int_T \phi \, d\mathfrak{p} \right) = \bigcap_{\phi \in C_0(T;\mathbb{C})} \ker \left(\int_T \phi \, d\mathfrak{p} \right).$$

Legyen G kommutatív lokálisan kompakt csoport és β Haar-mérték G felett. Ha V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, akkor létezik egyetlen olyan

$$\mathfrak{p} : \mathcal{B}_0(\hat{G}) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, hogy minden $\theta \in L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta)$ elemre

$$\hat{V}_\beta(\theta) = \int_{\hat{G}} \overline{\mathcal{F}_\beta}(\theta) \, d\mathfrak{p}$$

teljesül. Megfordítva, ha

$$\mathfrak{p} : \mathcal{B}_0(\hat{G}) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, akkor létezik G-nek egyetlen olyan V folytonos unitér ábrázolása, hogy minden $\theta \in L^1_{\mathbb{C}}(G, \beta)$ elemre

$$\hat{V}_\beta(\theta) = \int_{\hat{G}} \overline{\mathcal{F}_\beta}(\theta) \, d\mathfrak{p}$$

teljesül.

9. Radon-mértékek faktorizációja lokálisan kompakt csoporton

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, θ Radon-mérték H felett, és F Banach-tér. Ha $f : G \to F$ olyan folytonos függvény, amelyre minden $K \subseteq G$ kompakt halmaz esetén

$$(KH) \cap \mathrm{supp}(f)$$

kompakt G-ben, akkor teljesülnek a következők:

(1) Minden $s \in G$ pontra

$$(f \circ \gamma_G(s))|_H \in C_0(H; F).$$

(2) Az

$$f_\theta : G \to F \qquad s \mapsto \int_H (f \circ \gamma_G(s))|_H \, d\theta$$

függvény folytonos.

(3)

$$[f_\theta \neq 0] \subseteq (\mathrm{supp}(f))H.$$

(4) Ha a θ Radon-mérték γ_H kváziinvariáns, akkor minden $(s,t) \in G \times H$ párra $f_\theta(st) = f_\theta(s)$.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, és β_H baloldali Haar-mérték H felett.

(1) Ha F Banach-tér K felett, $g \in C(G/H; F)$ és $\phi \in C_0(G; K)$, akkor

$$(\phi(g \circ \pi_{G/H}))^\flat = \phi^\flat g.$$

(2) Ha F Banach-tér és $f \in C(G; F)$ olyan függvény, hogy minden $K \subseteq G$ kompakt halmazra

$$(KH) \cap \mathrm{supp}(f)$$

kompakt halmaz, akkor minden $t \in H$ és $s \in G$ elemre

$$(f \circ \delta_G(t))^\flat = \Delta_H(t) f^\flat,$$
$$(f \circ \gamma_G(t))^\flat = f^\flat \circ \gamma_{G/H}(s).$$

(3) Minden $K' \subseteq G/H$ kompakt halmazhoz létezik olyan $\phi \in C(G)_+$, hogy $K' \subseteq [\phi^\flat = 1]$.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, β_H baloldali Haar-mérték H felett, és F Banach-tér. Ekkor a

$$C_0(G; F) \to C_0(G/H; F) \qquad f \mapsto f^\flat$$

leképezés szürjekció.

Ha G lokálisan kompakt csoport és H zárt részcsoport G-ben, és β_H baloldali Haar-mérték H felett, akkor létezik egyetlen olyan

$$\mathcal{M}(G/H; \mathbb{C}) \to \mathcal{M}(G; \mathbb{C}) \qquad \theta \mapsto \theta^\sharp$$

lineáris operátor, hogy minden $\theta \in \mathcal{M}(G/H; \mathbb{C})$ mértékre és $\phi \in C_0(G; \mathbb{C})$ függvényre

$$\theta^\sharp(\phi) = \theta(\phi^\flat)$$

teljesül. Ez a lineáris operátor injektív.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, β_H baloldali Haar-mérték H felett, és $\mu \in \mathcal{M}(G;\mathbb{C})$. A következő állítások ekvivalensek.

(1) Létezik olyan $\theta \in \mathcal{M}(G/H;\mathbb{C})$, hogy $\mu = \theta^\sharp$.
(2) Minden $t \in H$ elemre $\delta_G(t)\mu = \Delta_H(t)\mu$.
(3) Minden $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$\mu\big(\phi(\psi^\flat \circ \pi_{G/H})\big) = \mu\big((\phi^\flat \circ \pi_{G/H})\psi\big).$$

(4) Minden $\phi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre, ha $\phi^\flat = 0$, akkor $\mu(\phi) = 0$.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, β_H baloldali Haar-mérték H felett, és $\mu \in \mathcal{M}(G;\mathbb{C})$. Ha μ faktorizálható β_H szerint, és $s \in G$, $\psi \in C(G/H;\mathbb{C})$, akkor $\gamma_G(s)\mu$ és $(\psi \circ \pi_{G/H})\mu$ is faktorizálható β_H szerint, és

$$(\gamma_G(s\mu))/\beta_H = \gamma_{G/H}(s)(\mu/\beta_H),$$
$$((\psi \circ \pi_{G/H})\mu)/\beta_H = \psi(\mu/\beta_H).$$

teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett, és $h \in C(G;\mathbb{C})$. A $h\beta_G$ mérték pontosan akkor faktorizálható β_H szerint, ha minden $(s,t) \in G \times H$ párra:

$$h(st) = \frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)} h(s).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoport G-ben, β_H baloldali Haar-mérték H felett, és $\mu \in \mathcal{M}(G;\mathbb{C})$. Ha μ faktorizálható β_H szerint, és létezik olyan $K \subseteq G$ kompakt halmaz, hogy $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq KH$, akkor μ/β_H kompakt tartójú mérték, és minden $\psi \in C_0(G/H;\mathbb{C})$ függvényre,

$$\pi_{G/H}(K) \subseteq [\psi = 1]$$

esetén $\psi(\mu/\beta_H) = \mu/\beta_H$ teljesül.

Ha G lokálisan kompakt csoprot és H zárt részcsoport G-ben, akkor létezik olyan $\rho : G \to \mathbb{R}_+^*$ folytonos függvény, hogy minden $s \in G$, $t \in H$ pontra

$$\rho(st) = \frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)} \rho(s)$$

teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoprot, H zárt részcsoportja G-nek, és β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Ha $\rho : G \to \mathbb{R}_+^*$ olyan folytonos függvény, hogy minden $s \in G$, $t \in H$ pontra

$$\rho(st) = \frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)}\rho(s),$$

akkor a $\rho\beta_G$ mérték faktorizálható β_H szerint, és a $(\rho\beta_G)/\beta_H$ faktormérték olyan nem nulla pozitív Radon-mérték G felett, amelyhez létezik olyan

$$\chi : G \times (G/H) \to \mathbb{R}_+^*$$

folytonos függvény, hogy minden $s \in G$ elemre

$$(\gamma_{G/H}(s))((\rho\beta_G)/\beta_H) = \chi(s^{-1}, \cdot)((\rho\beta_G)/\beta_H)$$

teljesül (tehát $((\rho\beta_G)/\beta_H)$ topologikusan $\gamma_{G/H}$-kváziinvariáns).

Legyen γ folytonos topologikus ábrázolása a G lokálisan kompakt csoportnak az X lokálisan kompakt térben. Ha G σ-kompakt és γ tranzitív, akkor létezik X felett olyan μ nem nulla pozitív topologikusan γ-kváziinvariáns Radon-mérték, amelynek multiplikátora a $G \times X$ szorzattéren folytonos.

10. Indukált unitér ábrázolások

Ha G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben, akkor $H^U \subseteq C(G; F)$ olyan lineáris altér, hogy minden $s \in G$ elemre és $f \in H^U$ függvényre

$$f \circ \gamma_G(s^{-1}) \in H^U.$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Ha β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett, akkor minden $f, g \in H^U$ függvényre a

$$\langle f, g\rangle_F : G \to \mathbb{C} \qquad s \mapsto \langle f(s), g(s)\rangle$$

függvény folytonos, és az $\langle f, g\rangle_F\beta_G$ mérték faktorizálható β_H szerint, és az

$$(\langle f, g\rangle_F\beta_G)/\beta_H$$

faktormérték kompakt tartójú.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport, U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben, és β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Ekkor a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\beta_G, \beta_H} : H^U \times H^U \to \mathbb{C} \qquad (f,g) \mapsto \int_{G/H} 1_{G/H} \, d\Big((\langle f, g \rangle_F \beta_G) / \beta_H \Big)$$

leképezés olyan skalárszorzás a H^U vektortér felett, hogy minden $s \in G$ elemre és $f, g \in H^U$ függvényre

$$\langle V^U(s) f, V^U(s) g \rangle_{\beta_G, \beta_H} = \langle f, g \rangle_{\beta_G, \beta_H}.$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Ha β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett, akkor a V^{U, β_G, β_H} indukált unitér ábrázolás folytonos.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U folytonos unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Legyen β_H baloldali Haar-mérték H felett, $\phi \in C_0(G; \mathbb{C})$ és $z \in F$. Ekkor minden $s \in G$ elemre a

$$H \to F \qquad t \mapsto \sqrt{\left(\frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)} \right)^{-1}} \phi(st)(U(t)z)$$

függvény folytonos kompakt tartójú, és a

$$\phi *_{\beta_H} z : G \to F \qquad s \mapsto \int_H \sqrt{\left(\frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)} \right)^{-1}} \phi(st)(U(t)z) \, d\beta_H(t)$$

függvény eleme H^U-nak.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U folytonos unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Ha β_H baloldali Haar-mérték H felett, akkor az

$$\big\{ (\phi *_{\beta_H} z)(e_G) \quad \big| \quad \phi \in C_0(G; \mathbb{C}), \quad z \in F \big\}$$

halmaz lineáris burka sűrű F-ben.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U folytonos unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Ekkor az

$$u : H^U \to F \qquad f \mapsto f(e_G)$$

leképezés olyan lineáris operátor, amelynek értékkészlete sűrű F-ben.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U_1, U_2 folytonos unitér ábrázolása H-nak az F_1, F_2 Hilbert-térben. Legyen β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Ha $u \in C(U_1; U_2)$, akkor létezik olyan

$$T_u \in C(V^{U_1,\beta_G,\beta_H}, V^{U_2,\beta_G,\beta_H}),$$

hogy minden $f \in H^{U_1}$ függvényre $u \circ f \in H^{U_2}$ teljesül. Továbbá a

$$C(U_1; U_2) \to C(V^{U_1,\beta_G,\beta_H}, V^{U_2,\beta_G,\beta_H}) \qquad u \mapsto T_u$$

leképezés injektív lineáris operátor.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. Ha $H \subseteq G$ olyan zárt részcsoport, és U olyan folytonos unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben, és β_G, β_H olyan baloldali Haar-mérték G, H felett, hogy V unitér ekvivalens V^{U,β_G,β_H}-val, akkor létezik olyan $D \subseteq H$ sűrű V-invariáns lineáris altér, és létezik olyan $w : D \to F$ lineáris operátor, hogy $\mathrm{Im}(w)$ sűrű altere F-nek, és minden $t \in H$ elemre

$$U(t) \circ w = w \circ \left(\sqrt{\frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)}} \cdot V(t)|_D \right).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U unitér ábrázolása H-nak. Minden $\psi \in C(G/H; \mathbb{C})$ és $f \in H^U$ függvényre $(\psi \circ \pi_{G/H})f \in H^U$, és a

$$P^U(\psi) : H^U \to H^U \qquad f \mapsto (\psi \circ \pi_{G/H})f$$

leképezés lineáris operátor. Továbbá, a

$$P^U : C(G/H; \mathbb{C}) \to L(H^U) \qquad \psi \mapsto P^U(\psi)$$

leképezés olyan egységelem tartó algebra morfizmus a $C(G/H; \mathbb{C})$ függvényalgebra és az $L(H^U)$ operátoralgebra között, amelyre $s \in G$ és $\psi \in C(G/H; \mathbb{C})$ esetén:

$$V^U(s) \circ P^U(\psi) \circ V^U(s)^{-1} = P^U(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1}).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Legyen β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Ha $\psi \in C^b(G/H; \mathbb{C})$, akkor a

$$P^U(\psi) : H^U \to H^U$$

lineáris operátor folytonos a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\beta_G,\beta_H}$ Mackey-féle skalárszorzás szerint. Továbbá egyértelműen létezik olyan

$$P^{U,\beta_G,\beta_H} : C^b(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H^{U,\beta_G,\beta_H})$$

leképezés, amelyre teljesül, hogy minden $\psi \in C^b(G/H;\mathbb{C})$ függvényre $P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi)$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\beta_G,\beta_H}$ Mackey-féle skalárszorzás szerint folytonos lineáris kiterjesztése $P^U(\psi)$-nek. A P^{U,β_G,β_H} leképezés egységelem-tartó ábrázolása $C^b(G/H;\mathbb{C})$ kommutatív C^*-algebrának a H^{U,β_G,β_H} Hilbert-térben, és minden $s \in G$, $\psi \in C^b(G/H;\mathbb{C})$ esetén fennáll a

$$V^{U,\beta_G,\beta_H}(s) \circ P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi) \circ V^{U,\beta_G,\beta_H}(s)^{-1} = P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

imprimittivitás egyenlőség. A P^{U,β_G,β_H} ábrázolás leszűkítése $C_0(G/H;\mathbb{C})$-re nemelfajult, vagyis az

$$\bigcup_{\psi\in C_0(G/H;\mathbb{C})} \mathrm{Im}(P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi))$$

halmaz lineáris burka sűrű a H^{U,β_G,β_H} Hilbert-térben.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport, β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett, és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Ha $\psi \in C^b(G/H;\mathbb{C})$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $C_0(G/H;\mathbb{C})$-ben, amely lokálisan egyenletesen konvergál ψ-hez és egyenletesen korlátos, akkor

$$P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi) = \lim_{n\to\infty} P^{U,\beta_G,\beta_H}(\psi_n)$$

pontonként a H^{U,β_G,β_H} Hilbert-téren.

Legyen G lokálisan kompakt csoport és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. Ha $H \subseteq G$ zárt részcsoport, és U olyan unitér ábrázolása H-nak, és β_G, β_H olyan baloldali Haar-mérték G, H felett, hogy V unitér ekvivalens V^{U,β_G,β_H}-val, akkor létezik olyan

$$P : C^b(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

egységelem-tartó ábrázolás, hogy minden $s \in G$ és $\psi \in C^b(G/H;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ P(\psi) \circ V(s)^{-1} = P(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

teljesül, és a P leszűkítése $C_0(G/H;\mathbb{C})$-re nemelfajult ábrázolás.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport, U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben, és β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Tegyük fel, hogy $M \subseteq H^U$ olyan lineáris altér, amely minden $s \in G$ és

$\psi \in C_0(G/H;\mathbb{C})$ elemre invariáns a $V^U(s)$ és $P^U(\psi)$ lineáris operátorokra nézve, továbbá az

$$\{f(e_G) \quad | \quad f \in M\}$$

halmaz sűrű lineáris altér az F Hilbert-térben. Ekkor M sűrű a H^{U,β_G,β_H} Hilbert-térben.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben, és $H \subseteq G$ zárt részcsoport. Legyen

$$P : C_0(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

olyan lineáris operátor, amely folytonos, ha $C_0(G/H;\mathbb{C})$ felett a sup-normát, és $\mathcal{L}(H)$ felett az operátornormát vesszük normként. Legyen β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Ha $\xi, \eta \in H$, akkor minden $f \in C_0(G \times G;\mathbb{C})$ függvényre a

$$G \to \mathbb{C} \qquad s \mapsto \Big\langle P\big((f(\cdot,s))^\flat\big)V(s)\xi, \eta\Big\rangle$$

függvény kompakt tartójú és folytonos, továbbá a

$$\theta_{\xi,\eta} : C_0(G \times G;\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto \int_G \Big\langle P\big((f(\cdot,s))^\flat\big)V(s)\xi, \eta\Big\rangle\, d\beta_G(s)$$

leképezés olyan Radon-mérték $G \times G$ felett, hogy minden $\phi, \psi \in C_0(G;\mathbb{C})$ függvényre

$$\theta_{\xi,\eta}(\phi \otimes \psi) = \langle P(\phi^\flat)V_{\beta_G}(\psi)\xi, \eta\rangle.$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. Ha $H \subseteq G$ olyan zárt részcsoport, amelyhez létezik olyan

$$P : C_0(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

sup-normában folytonos nemelfajult ábrázolás, hogy minden $s \in G$ és $\psi \in C_0(G/H;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ P(\psi) \circ V(s)^{-1} = P(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

teljesül, akkor létezik olyan U folytonos unitér ábrázolása H-nak, hogy minden G, H feletti β_G, β_H baloldali Haar-mértékre V unitér ekvivalens a V^{U,β_G,β_H}-val.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, H zárt részcsoportja G-nek, és V folytonos unitér ábrázolása G-nek a H Hilbert-térben. A következő állítások ekvivalensek.

(1) Létezik H-nak olyan U folytonos unitér ábrázolása és létezik olyan G, H feletti β_G, β_H baloldali Haar-mérték, hogy V unitér ekvivalens V^{U,β_G,β_H}-val.

(2) Létezik olyan

$$P : C^b(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

egységelem-tartó ábrázolás, hogy minden $s \in G$ és $\psi \in C^b(G/H;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ P(\psi) \circ V(s)^{-1} = P(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

teljesül, és a P leszűkítése $C_0(G/H;\mathbb{C})$-re nemelfajult ábrázolás.

(3) Létezik olyan

$$P : \bar{C}_0(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

nemelfajult ábrázolás, hogy minden $s \in G$ és $\psi \in \bar{C}_0(G/H;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ P(\psi) \circ V(s)^{-1} = P(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

teljesül.

(4) Létezik olyan

$$P : C_0(G/H;\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

sup-normában folytonos nemelfajult ábrázolás, hogy minden $s \in G$ és $\psi \in C_0(G/H;\mathbb{C})$ elemre

$$V(s) \circ P(\psi) \circ V(s)^{-1} = P(\psi \circ \gamma_{G/H}(s)^{-1})$$

teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport, és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Legyen j tetszőleges jobbinverze a

$$\pi_{G/H} : G \to G/H$$

kanonikus szürjekciónak, vagyis $j : G/H \to G$ olyan függvény, hogy

$$\pi_{G/H} \circ j = \mathrm{Id}_{G/H} .$$

Legyen $\rho : G \to \mathbb{R}_+^*$ olyan folytonos függvény, hogy minden $s \in G$, $t \in H$ esetén

$$\rho(st) = \frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)}\rho(s)$$

teljesül.

(1) Minden $s \in G$ elemre $j(\pi_{G/H}(s))^{-1}s \in H$, és minden $x \in G/H$ pontra

$$j(x)^{-1}sj\big((\gamma_{G/H}(s^{-1}))(x)\big) \in H.$$

(2) Minden $f \in H^U$ függvényhez egyértelműen létezik olyan

$$\Psi_f : G/H \to F$$

függvény, hogy minden $s \in G$ elemre

$$\Psi_f(\pi_{G/H}(s)) = frac1\sqrt{\rho(s)}U(j(\pi_{G/H}(s))^{-1}s)f(s)$$

teljesül. Továbbá, ha definíció szerint

$$H^{U,j,\rho} = \{\Psi_f \quad | \quad f \in H^U\},$$

akkor $H^{U,j,\rho}$ olyan lineáris altere az $\mathcal{F}(G/H;F)$ függvénytérnek, amelyre a

$$H^U \to H^{U,j,\rho} \qquad f \mapsto \Psi_f$$

leképezés lineáris bijekció. Ha $\Psi : G/H \to F$, akkor $\Psi \in H^{U,j,\rho}$ ekvivalens azzal, hogy Ψ kompakt tartójú és a

$$G \to F \qquad s \mapsto U\big(s^{-1}j(\pi_{G/H}(s))\big)\Psi(\pi_{G/H}(s))$$

függvény folytonos. Ha $\Psi, \Phi \in H^{U,j,\rho}$, akkor $\langle\Psi,\Phi\rangle_F \in C_0(G/H;\mathbb{C})$ teljesül. Speciálisan, ha $\Psi \in H^{U,j,\rho}$, akkor

$$||\Psi||_F \in C_0(G/H;\mathbb{R}),$$

azonban a $H^{U,j,\rho}$ függvénytér elemei általában nem folytonos függvények.

(3) Jelölje $V^{U,j,\rho}$ a G csoportnak azt a lineáris ábrázolását a $H^{U,j,\rho}$ függvénytérben, amelyet a

$$H^U \to H^{U,j,\rho} \qquad f \mapsto \Psi_f$$

lineáris bijekció a V^U indukált lineáris ábrázolással összeköt. Ha $\Psi \in H^{U,j,\rho}$, akkor $s \in G$ és $x \in G/H$ esetén

$$(V^{U,j,\rho}(s)\Psi)(x) = \sqrt{\chi_\rho(s^{-1},x)}U\Big(j(x)^{-1}sj\big((\gamma_{G/H}(s^{-1}))(x)\big)\Big)\Psi\big((\gamma_{G/H}(s^{-1}))(x)\big),$$

ahol $\chi_\rho : G\times(G/H) \to \mathbb{R}_+^*$ az a folytonos függvény, amelyre $s, s' \in G$ esetén

$$\chi_\rho(s,\pi_{G/H}(s')) = \rho(ss')/\rho(s').$$

(4) Ha U folytonos unitér ábrázolása H-nak és $j : G/H \to G$ folytonos jobbinverze $\pi_{G/H}$-nak, akkor

$$H^{U,j,\rho} = C_0(G/H;F).$$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H \subseteq G$ zárt részcsoport, és U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-térben. Legyen j tetszőleges jobbinverze a

$$\pi_{G/H} : G \to G/H$$

kanonikus szürjekciónak. Legyen $\rho : G \to \mathbb{R}_+^*$ olyan folytonos függvény, hogy minden $s \in G$, $t \in H$ esetén

$$\rho(st) = \frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)}\rho(s),$$

továbbá legyen β_G, β_H baloldali Haar-mérték G, H felett. Jelölje μ a $(\rho\beta_G)/\beta_H$ faktormértéket G/H felett, és legyen $\chi_\rho : G \times (G/H) \to \mathbb{R}_+^*$ az a folytonos függvény, amelyre $s, s' \in G$ esetén

$$\chi_\rho(s, \pi_{G/H}(s')) = \rho(ss')/\rho(s')$$

teljesül. Tudjuk, hogy μ olyan nem nulla pozitív topologikusan $\gamma_{G/H}$-kváziinvariáns mérték G/H felett, hogy minden $s \in G$ elemre

$$(\gamma_{G/H}(s))(\mu) = \chi_\rho(s^{-1}, \cdot)\mu$$

teljesül.

(1) A

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^{U,j,\rho} \times H^{U,j,\rho} \to \mathbb{C} \qquad (\Psi, \Phi) \mapsto \mu(\langle\Psi, \Phi\rangle_F)$$

leképezés olyan skalárszorzás a $H^{U,j,\rho}$ vektortér felett, amelyet minden $s \in G$ elemre a $V^{U,j,\rho}(s) \in \mathrm{GL}(H^{U,j,\rho})$ operátor megtart, ahol $H^{U,j,\rho}$ az előző állítás 2. pontjában értelmezett függvénytér. A

$$H^U \to H^{U,j,\rho} \qquad f \mapsto \Psi_f$$

lineáris bijekció megtartja a H^U feletti $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\beta_G,\beta_H}$ Mackey-féle skalárszorzást és a most értelmezett $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalárszorzást.

(2) Jelölje $H^{U,j,\rho,\beta_G,\beta_H}$ a $H^{U,j,\rho}$ prehilbert-tér teljes burkát, jelölje $V^{U,j,\rho,\beta_G,\beta_H}$ a $V^{U,j,\rho}$ lineáris ábrázolás teljesítését. Ekkor létezik egyetlen olyan

$$H^{U,\beta_G,\beta_H} \to H^{U,j,\rho,\beta_G,\beta_H}$$

unitér operátor, amely kiterjesztése a

$$H^U \to H^{U,j,\rho} \qquad f \mapsto \Psi_f$$

leképezésnek, és összeköti a V^{U,β_G,β_H} és $V^{U,j,\rho,\beta_G,\beta_H}$ unitér ábrázolásokat.

(3) Ha U folytonos unitér ábrázolása H-nak és $j : G/H \to G$ folytonos jobbinverze $\pi_{G/H}$-nak, akkor

$$H^{U,j,\rho,\beta_G,\beta_H} = L_F^2(G/H, \mu).$$

11. A Mackey-féle reprezentációs tétel

Ha G lokálisan kompakt csoport és $N \subseteq G$ zárt kommutatív invariáns részcsoport, akkor a

$$G \times \hat{N} \to \hat{N} \qquad (s, \chi) \mapsto s\chi$$

leképezés folytonos, vagyis a G csoport belső ábrázolása $\hat{N}$-ben folytonos topologikus ábrázolás.

Ha N megszámlálható bázisú kommutatív lokálisan kompakt csoport, akkor $\hat{N}$ megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér.

Legyen γ ábrázolása a G csoportnak az X halmazban, és minden $E \subseteq X$ halmaz esetében alkalmazzuk a

$$G \cdot E = \{\gamma(s)x \quad | \quad s \in G, \quad x \in E\}$$

jelölést. Ha $D \subseteq X$ olyan halmaz, amely az X minden γ-pályáját éppen egy pontban metszi, akkor minden $E \subseteq D$ halmazra és a D részhalmazainak bármely $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatára teljesülnek a

$$G \cdot (D \backslash E) = X \backslash (G \cdot E),$$
$$G \cdot \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (G \cdot E_n)$$

egyenlőségek.

Legyen G σ-kompakt lokálisan kompakt csoport és γ olyan folytonos topologikus ábrázolása G-nek az X megszámlálható bázisú lokálisan kompakt térben, hogy létezik olyan $D \subseteq X$ σ-kompakt halmaz, amely az X minden γ-pályáját éppen egy pontban metszi. Ha $H \neq \{0\}$ Hilbert-tér és

$$\mathfrak{p} : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{L}(H)$$

olyan projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, hogy $\mathfrak{p}(X) = \mathrm{Id}_H$ és minden $E \in \mathcal{B}(X)$ γ-invariáns halmazra $\mathfrak{p}(E) = 0$ vagy $\mathfrak{p}(E) = \mathrm{Id}_H$, akkor egyértelműen létezik olyan $\omega \subseteq X$ γ-pálya, amelyre $\mathfrak{p}(\omega) = \mathrm{Id}_H$ teljesül.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $N \subseteq G$ zárt kommutatív invariáns részcsoport, és jelölje γ a G csoport belső ábrázolását $\hat{N}$-ben. Ha β_N Haar-mérték N felett, akkor minden $s \in G$ és $\psi \in C_0(N;\mathbb{C})$ esetén

$$\big(\overline{\mathcal{F}_{\beta_N}}(\psi)\big) \circ \gamma(s)^{-1} = \big(\mathrm{mod}(\mathrm{Int}_G(s)|_N)\big)^{-1} \cdot \overline{\mathcal{F}_{\beta_N}}\big(\psi \circ (\mathrm{Int}_G(s^{-1})|_N)\big).$$

Legyen G megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoport és $N \subseteq G$ zárt kommutatív invariáns részcsoport. Jelölje γ a G csoport belső ábrázolását $\hat{N}$-ben, és tegyük fel, hogy:

(1) az $\hat{N}$ minden γ-pályája lokálisan kompakt halmaz;
(2) létezik $\hat{N}$-nek olyan σ-kompakt részhalmaza, amely az $\hat{N}$ minden γ-pályáját éppen egy pontban metszi.

Ekkor a G minden V irreducibilis folytonos unitér ábrázolásához létezik olyan $\chi \in \hat{N}$ és létezik a G_x stabilitás-csoportnak olyan U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása, hogy bármely G (illetve G_x) feletti β_G (illetve β_{G_x}) baloldali Haar-mértékre V unitér ekvivalens a G csoport $(U, \beta_G, \beta_{G_x})$ hármas által indukált unitér ábrázolásával, és minden $n \in N$ elemre $U(n) = \chi(n)\,\mathrm{Id}_F$, ahol F az U ábrázolás tere.

Legyen G lokálisan kompakt csoport, $N \subseteq G$ zárt kommutatív invariáns részcsoport, és $H \subseteq G$ olyan zárt részcsoport, hogy $N \cdot H = G$ és $N \cap H = \{e_G\}$. Minden $\chi \in \hat{N}$ függvényre legyen

$$H_\chi = \{h \in H \quad | \quad h\chi = \chi\},$$

ez zárt részcsoportja H-nak. Tegyük fel, hogy G megszámlálható bázisú és a G csoport $\hat{N}$-ben megvalósuló belső ábrázolására teljesülnek a Mackey-féle reprezentációs tételben megfogalmazott 1. és 2. feltételek. Ekkor a G minden V irreducibilis folytonos unitér ábrázolásához létezik olyan $\chi \in \hat{N}$ és a H_χ lokálisan kompakt csoportnak létezik olyan U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása egy F Hilbert-térben, hogy ha β_G (illetve β_χ) baloldali Haar-mértékek G (illetve $N \cdot H_\chi$) felett és

$$U^\chi : N \cdot H_\chi \to \boldsymbol{U}(F) \qquad nh \mapsto \chi(n)U(h),$$

akkor a G csoport $(U^\chi, \beta_G, \beta_\chi)$ hármas által indukált unitér ábrázolása unitér ekvivalens V-vel.