Tételgyűjtemény a kompakt konvex halmazok elméletéből

Andai Attila

Az itt szereplő tételekhez szükséges fogalmak és bizonyítások megtalálhatók a Kristóf János: Az anlízis elemei IV. jegyzetben. Ez tanulási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák!

XV. Kompakt konvex halmazok

1. Kompakt konvex halmaz extremális pontjai

Ha E szeparált tologikus vektortér és $K \subseteq E$ olyan kompakt halmaz, amely előáll véges sok kompakt halmaz uniójaként, akkor $\mathrm{co}(K)$ kompakt konvex halmaz.

Legyen E topologikus vektortér. Ha $C \subseteq E$ konvex halmaz, $x \in \mathrm{Int}(C)$ és $y \in \bar{C}$, akkor $]x, y[\subseteq \mathrm{Int}(C)$. Ha $C \subseteq E$ olyan konvex halmaz, hogy $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$, akkor $\overline{\mathrm{Int}(C)} = \bar{C}$ és $\mathrm{Int}(\bar{C}) = \mathrm{Int}(C)$.

Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, akkor minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazra $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$.

Ha E szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $K = \mathrm{co}(\mathrm{Fr}(K))$.

Ha $E \neq \{0\}$ véges dimenziós szeparált valós topologikus vektortér, és $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha E az egyetlen affin altere E-nek, amely C-t tartalmazza.

Ha E véges dimenziós valós szeparált topologikus vektortér és $S \subseteq E$, akkor $x \in \mathrm{co}(S)$ esetén létezik olyan $H \subseteq S$ véges halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és $|H| \leq \dim(E) + 1$.

Ha E véges dimenziós valós szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$, és minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ véges halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és $|H| \leq \dim(E) + 1$.

Ha E véges dimenziós komplex szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$, és minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ véges halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és $|H| \leq 2\dim(E) + 1$, ahol $\dim(E)$ az E komplex vektortér dimenziója $\mathbb{C}$ felett.

2. Pozitív Radon-mértékek lokálisan kompakt tér felett

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $\Phi \subseteq C_0(T)$ olyan nem üres függvényhalmaz, hogy $\sup(\phi)_{\phi\in\Phi} \in C_0(T)$ és Φ felfelé irányított, akkor

$$\mu(\sup_{\phi\in\Phi} \phi) = \sup_{\phi\in\Phi} \mu(\phi)$$

teljesül.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $\Phi \subseteq C_0(T)$ olyan nem üres függvényhalmaz, hogy $\inf(\phi)_{\phi\in\Phi} \in C_0(T)$ és Φ lefelé irányított, akkor

$$\mu(\inf_{\phi\in\Phi} \phi) = \inf_{\phi\in\Phi} \mu(\phi)$$

teljesül.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.

(1) Ha $\phi \in C_0(T)$ és $0 \leq \phi$, akkor $\mu(\phi) = \int^{\bullet} \phi \, d\mu$.
(2) Ha $f, g \in \vartheta_+(T)$ és $f \leq g$, akkor $\int^{\bullet} f \, d\mu \leq \int^{\bullet} g \, d\mu$.
(3) Ha $f \in \vartheta_+(T)$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\int^{\bullet} \alpha f \, d\mu = \alpha \cdot \int^{\bullet} f \, d\mu$.
(4) Ha $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer $\vartheta_+(T)$-ben, akkor

$$\int^{\bullet} \sum_{i\in I} f_i \, d\mu = \sum_{i\in I} \int^{\bullet} f_i \, d\mu.$$

(5) Ha $(f_i)_{i\in I}$ felfelé irányított rendszer $\vartheta_+(T)$-ben, akkor

$$\int^{\bullet} (\sup_{i\in I} f_i) \, d\mu = \sup_{i\in I} \int^{\bullet} f_i \, d\mu.$$

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.

(1) Minden $f \in \vartheta_+(T)$ függvényre $\int^{\bullet} f \, d\mu = \int^{*} f \, d\mu$.
(2) Ha $f, g \in \mathcal{F}(T; \overline{\mathbb{R}_+})$, és $f \leq g$, akkor $\int^{*} f \, d\mu \leq \int^{*} g \, d\mu$.
(3) Ha $f \in \mathcal{F}(T; \overline{\mathbb{R}_+})$, és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\int^{*} \alpha f \, d\mu = \alpha \cdot \int^{*} f \, d\mu$.
(4) Ha $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges véges rendszer $\mathcal{F}(T; \overline{\mathbb{R}_+})$-ben, akkor

$$\int^{*} \sum_{i\in I} f_i \, d\mu \leq \sum_{i\in I} \int^{*} f_i \, d\mu.$$

(5) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathcal{F}(T; \overline{\mathbb{R}_+})$-ben, akkor

$$\int^{*} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^{*} f_n \, d\mu.$$

Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathcal{F}(T;\overline{\mathbb{R}_+})$-ben, akkor:

$$\int^* \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, d\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k \, d\mu.$$

Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathcal{F}(T;\overline{\mathbb{R}_+})$-ben, akkor:

$$\int^* \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n \, d\mu.$$

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}_+^*}$ tetszőleges és $g : T \to \mathbb{R}_+$ olyan alulról vagy felülről félig folytonos függvény, hogy $g \leq f$, akkor

$$\int^* (f-g) \, du + \int^* g \, d\mu = \int^* f \, d\mu$$

teljesül, tehát ha még $\int^* g \, d\mu \leq \infty$ is igaz, akkor fennáll a

$$\int^* (f-g) \, d\mu = \int^* f \, d\mu - \int^* g \, d\mu$$

szubtraktivitás formula.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan lefelé irányított rendszer, hogy minden $i \in I$ indexre f_i felülről félig folytonos függvény, és létezik olyan $i \in I$, hogy $\int^* f_i \, d\mu \leq \infty$. Ekkor:

$$\int^* \inf_{i\in I} f_i \, d\mu = \inf_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu.$$

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.

(1) Minden $H \subseteq T$ relatív kompakt halmazra $\mu^*(H) \leq \infty$.

(2) Ha $H, H' \subseteq T$ és $H \subseteq H'$, akkor $\mu^*(H) \leq \mu^*(H')$.

(3) Ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathcal{P}(T)$-ben, akkor:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(H_n).$$

(4) Ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathcal{P}(T)$-ben, akkor:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(H_n).$$

Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor minden $H \subseteq T$ halmazra

$$\mu^*(H) = \inf_{\substack{H \subseteq \Omega \\ \Omega \subseteq T \text{nyílt halmaz}}} \mu^*(\Omega).$$

Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor a T minden Borel-halmaza μ-mérhető, és $\mathcal{B}(T, \mu)$ olyan σ-algebra, hogy a

$$\mathcal{B}(T, \mu) \to \overline{\mathbb{R}_+} \qquad H \mapsto \mu^*(H)$$

leképezés σ-additív.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha a $H \subseteq T$ halmaz μ-mérhető és μ-moderáns, akkor:

$$\mu^*(H) = \sup_{\substack{K \subseteq H \\ K \subseteq T \text{kompakt halmaz}}} \mu^*(K).$$

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $(H_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $H_i \subseteq T$ μ-mérhető halmaz és $\mu^*(H_i) < \infty$, akkor minden $(c_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ rendszerre

$$\int^* \sum_{i \in I} c_i \chi_{H_i} \, d\mu = \sum_{i \in I} c_i \mu^*(H_i)$$

teljesül.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Létezik olyan $m : \mathcal{R}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ σ-additív halmazfüggvény, hogy $C_0(T) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{R}_0(T), m)$ és minden $\phi \in C_0(T)$ függvényre

$$\mu(\phi) = \int \phi \, dm.$$

Legyen μ olyan pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, amely folytonos a $C_0(T)$ feletti sup-norma szerint. Létezik olyan $m : \mathcal{B}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ korlátos σ-additív halmazfüggvény, hogy $\bar{C}_0(T; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{B}_0(T), m)$ és minden $\phi \in \bar{C}_0(T; \mathbb{R})$ függvényre

$$\bar{\mu}(\phi) = \int \phi \, dm$$

teljesül, ahol $\bar{\mu}$ a μ funkcionál sup-normában folytonos kiterjesztése $C_0(T)$-ről $\bar{C}_0(T;\mathbb{R})$-re.

3. Valószínűségi Radon-mérték koncentráltságágá és baricentruma

Legyen T lokálisan kompakt tér és μ pozitív Radon-mérték T felett. Létezik olyan tartlamazás tekintetében legnagyobb nyílt halmaz T-ben, amely μ-null-halmaz.

Legyen T lokálisan kompakt tér és μ pozitív Radon-mérték T felett. Az $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz pontosan akkor μ-nullhalmaz, ha minden $\phi \in C_0(T)$, $0 \leq \phi$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\phi) \subseteq \Omega$, akkor $\mu(\phi) = 0$.

Legyen T lokáliasan kompakt tér és μ pozitív Radon-mérték T felett. Ha $\phi, \psi \in C_0(T)$, és $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [\phi = \psi]$, akkor $\mu(\phi) = \mu(\psi)$.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és $H \subseteq T$. A μ pozitív Radon-mérték pontosan akkor koncentrált a H halmazon, ha minden $X \subseteq T$ halmazra

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap H)$$

teljesül.

Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Létezik olyan $(\mu_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, hogy

(1) minden $i \in I$ indexre μ_i olyan pozitív Radon-mérték T felett, hogy μ_i előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és $\mathrm{supp}(\mu_i) \subseteq \mathrm{supp}(\mu)$, továbbá $\mu_i(1) = \mu(1)$,

(2) $\mu = \lim_{i,I} \mu_i$ a $\sigma(C(T)', C(T))$ topologia szerint.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazhoz és minden K feletti μ valószínűségi Radon-mértékhez létezik egyetlen olyan $x \in K$ pont, hogy minden $u \in E'$ funkcionálra $u_{\mathbb{R}}(x) = \mu(u_{\mathbb{R}}|_K)$ teljesül.

Minden T kompakt térhez létezik olyan E valós szeparált lokálisan konvex tér és olyan $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, hogy T és az $\mathrm{Ext}(K)$ topologikus altér homeomorfak.

Ha K zárt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos konkáv (illetve alulról félig folytonos konvex) függvény, akkor $\mathrm{Subgr}(f)$ (illetve $\mathrm{Epigr}(f)$) zárt konvex halmaz az $E \times K$ topologikus lineáris szorzattérben.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ha $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos és alulról félig folytonos konvex függvény, akkor

$$f = \sup_{\substack{(c,u)\in\mathbb{R}\times E' \\ c+u_{\mathbb{R}}|_K \le f}} (c + u_{\mathbb{R}}|_K)$$

teljesül, és ha $f \geq 0$, akkor minden $\mu \in \mathcal{M}^1_+(K)$ esetén

$$f(b(\mu)) \leq \int^* f\, d\mu.$$

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos konkáv függvény, akkor minden $\mu \in \mathcal{M}^1_+(K)$ Radon-mértékre

$$f(b(\mu)) \geq \int^* f\, d\mu$$

teljesül.

4. Metrizálható kompakt konvex halmazok baricentrális felbontása

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $X \subseteq K$ olyan zárt halmaz, hogy $\overline{\mathrm{co}}(X) = K$. Ekkor minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan K feletti μ valószínűségi Radon-mérték, hogy $x = b(\mu)$ és $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq X$ (vagyis μ topologikusan koncentrált az X halmazon).

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény. Ekkor $\mathrm{Subgr}(\bar{f}) \cap \mathrm{Epigr}(f)$ kompakt konvex halmaz az $E \times K$ topologikus lineáris szorzattérben és $\mathrm{gr}(f)$ olyan részhalmaza $\mathrm{Subgr}(\bar{f}) \cap \mathrm{Epigr}(f)$-nak, hogy

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{gr}(f)) = \mathrm{Subgr}(\bar{f}) \cap \mathrm{Epigr}(f).$$

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos konvex függvény. Minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan K feletti μ valószínűségi Radon-mérték, hogy $x = b(\mu)$ és μ koncentrált az $[f = \bar{f}]$ halmazon.

Ha K nem üres konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, szigorúan konvex függvény, akkor

$$[f = \bar{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K).$$

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ha létezik olyan $F \subseteq A(K)$ megszámlálható halmaz, amely szétválasztó K felett, akkor létezik $K \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex folytonos függvény.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ nem üres metrizálható kompakt konvex halmaz, akkor létezik $K \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex folytonos függvény.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan K feletti μ valószínűségi Radon-mérték, hogy $x = b(\mu)$ és μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.

Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz, akkor $\mathrm{Ext}(K)$ G_δ halmaz a K kompakt térben.

5. Kompakt konvex halmazok baricentrális felbontása

Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $A(K, E')$ sűrű $A(K)$-ban a sup-norma szerint.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és μ valószínűségi Radon-mérték K felett. Ha $x \in K$, akkor $x = b(\mu)$ pontosan akkor teljesül, ha minden $f \in A(K)$ függvényre $f(x) = \mu(f)$.

Legyen E szeparált topologikus vektortér és $C \subseteq E \times K$ olyan nem üres kompakt konvex halmaz, hogy $\mathrm{pr}_2(C) \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor az

$$f : \mathrm{pr}_1(C) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \inf\{t \in \mathbb{R} \quad | \quad (x,t) \in C\}$$

függvény olyan felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény, hogy $\mathrm{gr}(f) \subseteq C \subseteq \mathrm{Epigr}(f)$.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Ha $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos konvex függvény, akkor

$$f = \inf_{\substack{g \in S(K) \\ f < g}} g,$$

és a $\{g \in S(K) | f < g\}$ függvényhalmaz lefelé irányított.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és μ valószínűségi Radon-mérték K felett.

(1) Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos konvex függvény vagy korlátos alulról félig folytonos konvex függvény, akkor

$$f(b(\mu)) \leq \int^* f \, d\mu.$$

(2) Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ alulról vagy felülről félig folytonos konkáv függvény, akkor

$$f(b(\mu)) \geq \int^* f \, d\mu.$$

(3) Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos affin függvény vagy korlátos alulról félig folytonos affin függvény, akkor

$$f(b(\mu)) = \int^* f \, d\mu.$$

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $x \in K$. Ha ε_x az egyetlen olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amelynek a baricentruma egyenlő x-szel, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor ε_x az egyetlen olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amelyenek a baricentruma egyenlő x-szel.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $x \in K$. Ha $\{x\}$ extremális halmaz, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor $\{x\}$ extremális halmaz.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, $F \subseteq K$ extremális halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos konkáv függvény. Ekkor az

$$F' = \{x \in F \quad | \quad f(x) = \inf_{y \in F} f(y)\}$$

halmaz szintén extremális halmaz.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz.

(1) Ha $(F_i)_{i \in I}$ olyan nem üres halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre F_i extremális halmaz K-ban és $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcap_{i \in I} F_i$ is extremális halmaz K-ban.

(2) Ha $F \subseteq K$ tartalmazás tekintetében minimális extremális halmaz, akkor F egyelemű.

(3) Minden $F \subseteq K$ extremális halmazhoz létezik olyan $x \in K$ extremális pont, hogy $x \in F$.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos konkáv (illetve felülről félig folytonos konvex) függvény. Ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [c \leq f]$ (illetve $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [f \leq c]$), akkor $c \leq f$ (illetve $f \leq c$) a K halmazon.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor

$$K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ext}(K)).$$

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Ha $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor az $\mathcal{M}_+^1(K)$ feletti $\prec$ reláció rendezés az $\mathcal{M}_+^1(K)$ halmaz felett.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz.

(1) Ha $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^1(K)$ Radon-mértékek összehasonlíthatók a Choquet-rendezés szerint, akkor fenáll a $b(\mu) = b(\nu)$ egyenlőség.

(2) Ha $x \in K$ és ε_x maximális elem $\mathcal{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor ε_x maximális elem $\mathcal{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint.

(3) Minden $\nu \in \mathcal{M}_+^1(K)$ Radon-mértékhez létezik olyan $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$, hogy $\nu \prec \mu$ és μ maximális elem $\mathcal{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$.

(1) Értelmezzük a

$$p_\mu : C(K) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} \mu(g)$$

leképezést. Ez olyan szublineáris funkcionál $C(K)$ felett, hogy $\mu \leq p_\mu$ és minden $f \in -S(K)$ függvényre teljesül a $\mu(f) = p_\mu(f)$ egyenlőség.

(2) Ha $\nu : C(K) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, akkor $\nu \leq p_\mu$ pontosan akkor teljesül, ha $\nu \in \mathcal{M}_+^1(K)$ és $\mu \prec \nu$.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Ha $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$, akkor minden $f \in C(K)$ függvényre:

$$p_\mu(f) = \sup_{\substack{\nu \in \mathcal{M}_+^1(K) \\ \mu \prec \nu}} \nu(f).$$

A $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$ Radon-mérték pontosan akkor maximális a Choquet rendezés szerint, pa $p_\mu = \mu$.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$. Ha μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor minden $f \in C(K)$ függvényre

$$\mu(f) = \sup_{\substack{g \in S(K) \\ g \leq f}} \mu(g)$$

teljesül, és minden $f \in C(K)$, $0 \leq f$ függvényre

$$\mu(f) = \sup_{\substack{g \in S(K) \\ 0 \leq g \leq f}} \mu(g)$$

teljesül.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$. A következő állítások ekvivalensek.

(1) A μ maximális a Choquet-rendezés szerint.
(2) Minden $f \in C(K)$, $0 \leq f$ függvényre $\mu(f) = \int^* \hat{f}\, d\mu$.
(3) Minden $f \in C(K)$ függvényre μ koncentrált az $[f = \hat{f}]$ halmazon.
(4) Minden $f \in S(K)$, $0 \leq f$ függvényre $\mu(f) = \int^* \hat{f}\, d\mu$.
(5) Minden $f \in S(K)$ függvényre μ koncentrált az $[f = \hat{f}]$ halmazon.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{f \in C(K)} [f = \hat{f}] \subseteq \bigcap_{f \in S(K)} [f = \hat{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K),$$

és ha E lokálisan konvex, akkor ez a három halmaz egyenlő.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$ maximális a Choquet-rendezés szerint. Ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $C(K)$-ban, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ a K halmazon, és $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = 0$ az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon, akkor

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(f_n) = 0$$

teljesül.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$.

(1) Ha μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor minden $H \subseteq K$ Baire-halmazra $H \cap \mathrm{Ext}(K) = \emptyset$ esetén $\mu^*(H) = 0$ (vagyis μ Baire-koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon).

(2) Ha E lokálisan konvex és minden $C \subseteq K$ kompakt halmazra $C \cap \mathrm{Ext}(K) = \emptyset$ esetén $\mu^*(C) = 0$ (vagyis μ kompakt koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon), akkor μ maximális a Choquet-rendezés szerint.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\mu \in \mathcal{M}_+^1(K)$, hogy $x = b(\mu)$ és μ Baire-koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Tegyük fel, hogy létezik olyan $H \subseteq C(K)$ nem üres megszámlálható halmaz, amelyre

$$\bigcap_{f \in H} [f = \hat{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K).$$

Ha μ olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amely maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor μ koncentrált az extremális pontok halmazán. Ha E lokálisan konvex, akkor a K feletti μ valószínűségi Radon-mérték pontosan akkor maximális a Choquet-rendezés szerint, ha μ koncentrált az extremális pontok halmazán.

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan K feletti μ valószínűségi Radon-mérték, hogy $x = b(\mu)$ és μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.