Elsőrendű logika néhány tétele[1]

Andai Attila

$t = \langle F, R, \tau \rangle$ a **hasonlósági típus**, F elemei **függvény jelek**, R elemei **reláció jelek**. Az elsőrendű logika logikai jelei:

( ) ,	zárójel, vessző
$\neg$	negáció
$\vee$	vagy
$\exists$	egzisztenciális kvantor
$x_0, x_1, \ldots$	végtelen sok változójel
$=$	egyenlőség.

$$\mathcal{L} = \{(\quad) \quad , \quad \neg \quad \vee \quad \exists \quad x_0 \ldots \quad =\}.$$

$\sum_t := F \cup R \cup \mathcal{L}$ az **ábécé**. A $\sum_t$ elemeiből álló véges hosszúságú sorozatok halmaza $\sum_t^*$ a **szavak** halmaza.

A $K(t)$ halmaz a t típusú **kifejezések** halmaza.

Az $F(t)$ halmaz a t típusú **formulák** halmaza.

Azt mondjuk, hogy $\phi \in F(t)$ **prímformula**, ha nem tartalmaz $\vee, \neg, \exists$ jeleket; ϕ **nyílt**, ha nem tartlamaz kvantort.

Egy nyílt formula **diszjunktív normál formájú**, ha $\vee$ jelekkel összekötött prímformulákból vagy tagadásukból áll.

Az $F(t)$ részhalmazait nevezzük **elméleteknek**.

Az $\mathcal{U} = \langle A, I \rangle$ egy **t-típusú struktúra**. Az A az **alaphalmaz** és I az **interpretáció**.

A változójelek $\mathcal{U}$ **feletti értékelése** egy e függvény.

Egy $k \in K(t)$ kifejezés **helyettesítési értéke** $k_{\mathcal{U}}[e]$.

A $\phi \in F(t)$ formula az $\mathcal{U}$ feletti e **értékelése igaz** $\mathcal{U} \models \phi\{e\}$. A ϕ **igaz** $\mathcal{U}$-n, vagy $\mathcal{U}$ **modellje ϕ-nek** $\mathcal{U} \models \phi$.

A ϕ formula **szabad változóinak** a halmaza $V(\phi)$. A ϕ formula **zárt**, ha $V(\phi) = \emptyset$, ezek halmaza $F^0(t)$.

PA: Peano axiómák $t^{PA} = \langle (0,0), (1,0), (+,2), (*,2) \rangle$:

(PA1) $\quad x + 1 \neq 0,$

(PA2) $\quad x + 1 = y + 1 \to x = y,$

(PA3) $\quad x + 0 = x,$

(PA4) $\quad x + (y + 1) = (x + y) + 1,$

(PA5) $\quad x * 0 = 0,$

(PA6) $\quad x * (y + 1) = x * y + 1,$

[1] Forrás: Csirmaz László, Logika.

és minden $\phi \in F(t^{PA})$ forumlára:

(PA7) $$\{\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(x+1))\} \to \forall x \phi(x).$$

T: Legyen $\mathcal{U} \models PA$. Ekkor $\mathcal{U}$-ban igazak:

(1) $x + y = y + x$, $x * y = y * x$,
(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x * y) * z = x * (y * z)$,
(3) $(y + z) * x = y * x + z * x$,
(4) $x + z = y + z \to x = y$,
(5) $x + y = 0 \to x = 0 \wedge y = 0$, $x * y = 0 \to x = 0 \vee y = 0$,
(6) $x \neq 0 \to \exists y(x = y + 1)$.

A $\phi \in F(t)$ **szemantikus következménye** a $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek :$\Gamma \models \phi$.

Új kétváltozós relációjel: $\approx$:

(1) $x \approx x$,
(2) $x \approx y \to y \approx x$,
(3) $x \approx y \wedge y \approx z \to x \approx z$,
(4) Minden n-változós r relációjelre:

$$x_1 \approx y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \approx y_n \to (r(x_i) \to r(y_i)),$$

(5) Minden n-változós f függvényjelre:

$$x_1 \approx y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \approx y_n \to (f(x_i) \approx f(y_i)).$$

Ha a ϕ formulában szereplő =-t $\approx$-ra cseréljük $\tilde{\phi}$-t kapunk.

T: A $\Gamma \models \phi$ akkor és csak akkor, ha $\tilde{\Gamma} \models \tilde{\phi}$.

A Γ-ból **levezethető** ϕ, vagy **bizonyítható** ϕ: $\Gamma \vdash \phi$.

Gödel teljességi tétele: Minden $\Gamma \subset F(t)$-re és $\phi \in F(t)$ formulára $\Gamma \models \phi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash \phi$.

A Γ elmélet **ellentmondástalan**, ha nincs olyan ϕ formula, melyre $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

A Γ elmélet **konzisztens**, ha van modellje.

T: Egy elmélet akkor és csak akkor konzisztens, ha ellentmondás mentes.

Gödel kompaktsági tétele: Ha Γ minden véges részének van modellje, akkor van Γ-nak is.

Két struktúra $\mathcal{U}$ és $\mathcal{B}$ izomorf: $\mathcal{U} \approx \mathcal{B}$.

A Γ elmélet **κ-kategórikus**, ha van κ számusságú modellje, de közülük bármely kettő egymással izomorf.

T: Legyen t a függvény és reláció jelek nélküli típus és legyen Γ az

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j \wedge \forall z (\bigvee_{i\leq n} x_i = z))$$

formulából álló elmélet. Ez n-kategórikus.

T: A végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete ω-kategórikus, de semmilyen $\kappa > \omega$ esetén sem κ-kategórikus.

A $\mathcal{U}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák **elemien ekvivalensek**, $\mathcal{U} \sim \mathcal{B}$, ha minden ϕ-re: $\mathcal{U} \models \phi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{B} \models \phi$.

T: A Γ elmélet **teljes**, ha bármely két modellje elemien ekvivalens.

A Γ elmélet pontosan akkor teljes, ha bármely zárt ϕ formulára vagy $\Gamma \models \phi$ vagy $\Gamma \models \neg\phi$.

T: A végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete teljes.

A $\mathcal{B}$ struktúra **részstruktúrája** $\mathcal{U}$-nak: $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$.

T: Legyen $\mathcal{A}$ egy struktúra, és $X \subset A$ és legyen $\kappa = \max(|X|, |t| \cdot \omega)$. Ekkor az X által generált részstruktúra számossága legfeljebb κ.

A $\mathcal{B}$ **elemi része $\mathcal{U}$-nak**, ($\mathcal{B} \prec \mathcal{U}$) ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ és minden e értékelésre és ϕ formulára $\mathcal{B} \models \phi[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{U} \models \phi[e]$. Ekkor $\mathcal{U}$ **elemi bővítése** $\mathcal{B}$-nek és $\mathcal{B}$ **elemien beágyazható** $\mathcal{U}$-ba.

T: Leszálló Lövenheim-Skolem tétel: Legyen $\kappa \geq |t|\omega$ és $\mathcal{U}$ struktúra alaphalmazának X egy κ számosságú része. Van $\mathcal{U}$-nak olyan $\mathcal{B}$ elemi része, mire $X \subset B$ és $|B| = \kappa$.

T: Legyen $\kappa \geq |t|\omega$, és legyen Γ elmélet. Ha Γ-nak van legalább κ számosságú modellje, akkor van pontosan κ számosságú modellje is.

T: Ultraszorzatok tétele: Minden ϕ formulára $\prod \mathcal{U}_\xi / U \models \phi$ akkor és csak akkor, ha $\{\xi \in I \quad | \quad \mathcal{U}_\xi \models \phi\} \subseteq U$.

A $\mathcal{B}^I/U$ jelöli az **ultrahatványt**.

T: $\mathcal{B}$ elemien beágyazható minden $\mathcal{B}^I/U$ ultrahatványba.

T: Minden végtelen struktúrának van valódi elemi bővítése.

T: Felszálló Löwenheim-Skolem tétel: Legyen $\mathcal{U}$ egy végtelen struktúra és κ egy számosság. Ekkor van $\mathcal{U}$-nak legalább κ számosságú elemi bővítése.

T: Los-Vaught próba: Ha a Γ elméletnek csak végtelen modelljei vannak és valamilyen $\kappa \geq |t|\omega$ számosságra κ-**kategórikus**, akkor teljes is.

T: Gödel kompaktsági tétele: Ha egy elmélet minden véges része konzisztens, akkor az egész elmélet is az.

T: Struktúrák egy osztálya akkor és csak akkor

(1) axiómatizálható, ha zárt az elemi ekvivalenciára és az ultraszorzatra;
(2) végesen axiómatizálható, ha a komplementere is axiómatizálható.

T: Nem zártak az elemi ekvivalenciára:

(1) jólrendezett, valamint a lineárisan rendezett, de nem jólrendezett struktúrák;
(2) torziócsoportok, szabad csoportok;
(3) a racionális számtest feletti polinomgyűrűkkel izomorf gyűrűk;
(4) összefüggő gráfok.

T: Zártak az elemi ekvivalenciára, de az ultraszorzatra nem:

(1) véges csoportok,
(2) pozitív karakterisztikájú testek,
(3) körgráfok.

T: Az alábbi axiómatizálhatók, de nem végesen:

(1) nem véges csoportok, torziómentes Abel csoportok, osztható torziómentes Abel csoportok,
(2) 0 karakterisztikájú testek, algebrailag zárt testek, valósan zárt testek,
(3) körmentes gráfok.

T: Az alábbi elméletek teljesek:

(1) végpontok nélküli sűrű rendezés,
(2) kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés,
(3) osztható torziómentes Abel csoportok,
(4) végtelen Abel csoportok, melyekben minden elem rendje egy prímszám
(5) 0 valamint p karakterisztikájú algebrailag zárt testek,
(6) valósan zárt testek,
(7) atommentes Boole-algebrák.