Kvantumlogika [1]

Méretfüggő logika?

A kvantumlogika feladata a fizikai, főként kvantummechanikai jeleségek sajátos logikájának a vizsgálata.

A klasszikus matematikai logika alapjait Boole állította fel, amikor tanulmányozta a 'helyes gondolkodás' alaptörvényeit.

Amire mindenképp szükségünk van a klasszikus gondolkodáshoz:

A *Boole-logika* kellékei:
1) B: *halmaz*: események, logikai állitasok halmaza,
2) $\wedge$: *és*: események közti logikai kapocs,
3) $\vee$: *vagy*: események közti logikai kapocs,
4) $'$: *nem*: esemény tagadása,
5) 1: *igaz*: biztos esemény,
6) 0: *hamis*: lehetetlen esemény.

A Boole-algebrák nélkülözhetetlenné váltak a matematika megalapozásánál és a fizika főbb ágaiban. Ha Boole-logikát alkalmazunk a kvantummechanika folyamatainak a megértéséhez, ellentmondásokat, paradoxonokat kapunk. Ezért a Boole-algebráknál lazább, kevesbé merev logikai gondolkodásmód szükséges az ellentmondásmentes, ugyanakkor a kísérletekkel egyező matematikai modell felepítéséhez.

Nehézségek az új logika megtalálásánál:
1) Ha nagyon általános, akkor matematikailag nem kezelhető.
2) Ha nagyon speciális, akkor a kvantummechanikában nem alkalmazható eredményesen.

A fizikában az alapfogalom az **ESEMÉNY**.

`Amit mindenképp szeretnénk megtartani a klasszikus logikából:`

Egy L nemüres halmazt $\vee$ (*és*) és $\wedge$ (*vagy*) műveletekkel *hálónak* nevezünk, ha a következő azonosságok teljesülnek:
1) $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$. (Kommutativitás.)
2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. (Asszociativitás.)

[1] Andai Attila, 2000.10.14.

3) $x \wedge x = x$ és $x \vee x = x$. (Idempotencia.)
4) $x = x \vee (x \wedge y)$ és $x = x \wedge (x \vee y)$. (Elnyelési tulajdonság.)

Elemek közti összehasonlítás: ('buta' következtetés)

Ha L háló, akkor értelmezzük L elemei között a $\leq$ relációt (részbenrendezést): legyen $a \leq b$ pontosan akkor, ha $a = a \wedge b$.

`A fizikában létezik biztos esemény és lehetetlen esemény.` Ennek a matematikai megfelelője:

Egy L háló *korlátos*, ha létezik $0, 1 \in L$, hogy $0 \neq 1$ és minden b-re:

$$0 \leq b \leq 1.$$

`Példa`: Egy egyenes mentén lévő test helyzetét vizsgáljuk. Ekkor a valós számok bizonyos A részhalmazaira tekinthetjük azt az eseményt, hogy a test az A-részhalmazban található. Ekkor az 1 (a biztos esemény), hogy a test a valós számok halmazában van, a 0 (lehetetlen esemény), hogy a test az üres halmazban található. Legyen a esemény, hogy a test a $[0, 10]$ intervallumban van, b esemény pedig, hogy a $[2, 4]$ intervallumban van. Ekkor

$$0 < b \leq a < 1$$

teljesül.

`Amit még klasszikusan megszoktunk:`

Egy hálót *disztributívnak* nevezzünk, ha igaz benne valamelyik azonosság:
1) $x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
2) $x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Sajnos ez a kvantummechanikában nem teljesül, gyengébb feltételre van szükség...

`Az` *és*, *vagy* `logikai kapcsolatok mellett jó lenne a` *nem* `szót is matematikailag definiálni.`

Egy $' : L \to L \quad a \mapsto a'$ leképzést *ortokomplementációnak* nevezünk, ha teljesíti az alábbi azonosságokat:
1) $(a')' = a$.

2) Ha $a \leq b$ akkor $b' \leq a'$.
3) $a \wedge a' = 0$.
4) $a \vee a' = 1$.

A megszokott Boole-logikánk ekkor az alábbi módon definiálható.

A $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ hatos *Boole-algebra*, ha
1) $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ disztributiv háló.
2) $x \wedge 0 = 0$ es $x \vee 1 = 1$.
3) $x \wedge x' = 0$ es $x \vee x' = 1$.

Fizikában az események halmazát szokás azonosítani hálókkal. A $\vee, \wedge$ hálóelméleti operációk eseményekhez eseményt rendelnek, az ortokomplementációt úgy értelmezzük, mint az ellentett eseményt. Fontos megjegyezni, hogy az esemény szó mint definiálatlan alapfogalom szerepel ebben a szövegöszszefüggésben.

A század elején kiderült, hogy például a disztributivitási tulajdonság nem teljesül a kvantummechanikai események körében! Azonban jó lenne valamilyen disztributivitás jellegű szabály, ezért csak speciális elemekre követeljük meg a disztributivitást.

Egy ortokomplementumos háló *moduláris*, ha $x \leq y$ elemekre

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

teljesül.

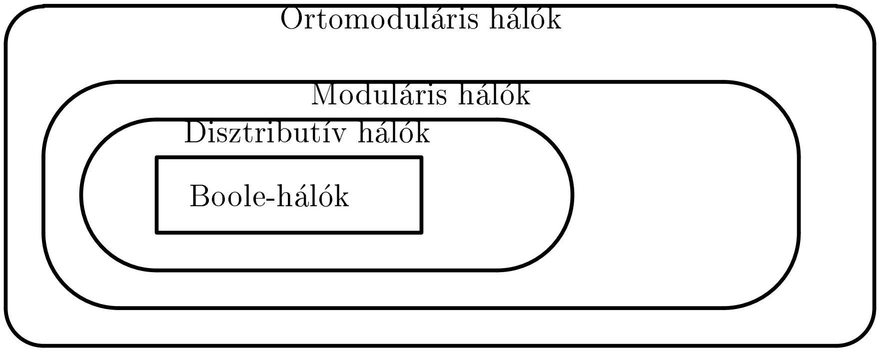
A modularitás tényleg gyengítése a disztributivitásnak: minden disztributív háló moduláris, azonban létezik nem disztributív moduláris háló.

`Sajnos a kvantummechanika még a modularitási szabályt sem teljesíti.`

Az L háló *ortomoduláris*, ha $a \leq b$ esetén

$$b = a \vee (a^{\perp} \wedge b).$$

Ez tényleg gyengítése a modularitásnak: minden moduláris háló ortomoduláris, azonban létezik nem moduláris ortomoduláris háló.



A klasszikus logika általánosításának egyik módja, hogy az állításokat egy **ortomoduláris háló** elemeinek tekintjük, az 'és' valamint a 'vagy' kötőszóknak a hálóban szereplő $\wedge$ és $\vee$ műveleteket feleltetjük meg, a 'nem' tagadószót mint ortokomplementációt értelmezzük.

(Speciális ortomoduláris háló esetén visszakapjuk a Boole-logikát.)

Fizikában alapvető logika: **ORTOMODULÁRIS HÁLÓK**!

(Jó ok van rá, hogy ennél általánosabb hálófogalom nem szükséges.)

Ennek a nagymértékű (de szükségszerű) általánosításnak messzemenő következményei vannak. Példaként nézzünk meg egy hétköznapi értelemben is használt logikai szerkezetet.

`Klasszikusan` azt mondjuk, hogy *a és b egymást kizáró események*, ha vagy csak a vagy csak b következik be (vagy egyik sem). Ez ugyan azt jelenti mint az $a \wedge b = 0$ egyenlet. (Tehát egymást kizáró események nem következhetnek be egyszerre.)

`Kvantummechanikában` azt mondjuk, hogy *a és b egymást kizáró események*, ha $a \leq b'$, jelben $a \perp b$. Igazolható, hogy ha $a \perp b$, akkor $a \wedge b = 0$. Azonban az $a \wedge b = 0$ egyenletből NEM KÖVETKEZIK, hogy $a \perp b$!

Ez, és az ehhez hasonló egyszerű logikai szerkezetek klasszikustól messze eltérő kvantumos változatának a furcsa tulajdonságai felelősek nagymértékben a kvantummechanika 'érthetetlenségéért'.

Főbb problémák az új logikával:

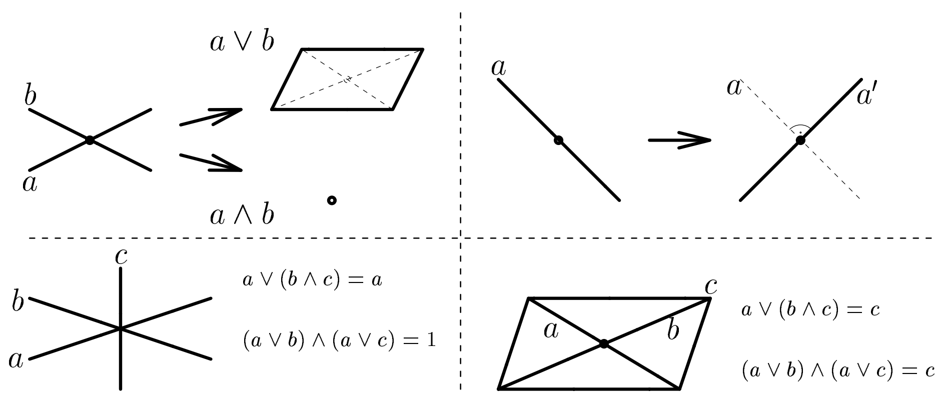
1) Matematikailag nehezen kezelhetők.
2) A definíciójuk még érthető, de nem érezhető, hogy milyen nagy szabadságot enged meg a definíció.
3) Sok ortomoduláris háló van, általanosan keveset tudunk róluk mondani.

Próbáljunk olyan ortomoduláris hálót találni amely általánosabb a klasszikus logikánál és kezelhető matematikailag és szemléletileg is!

A **Geometria** segítségével adódnak az ilyen példák.

A sík logikája

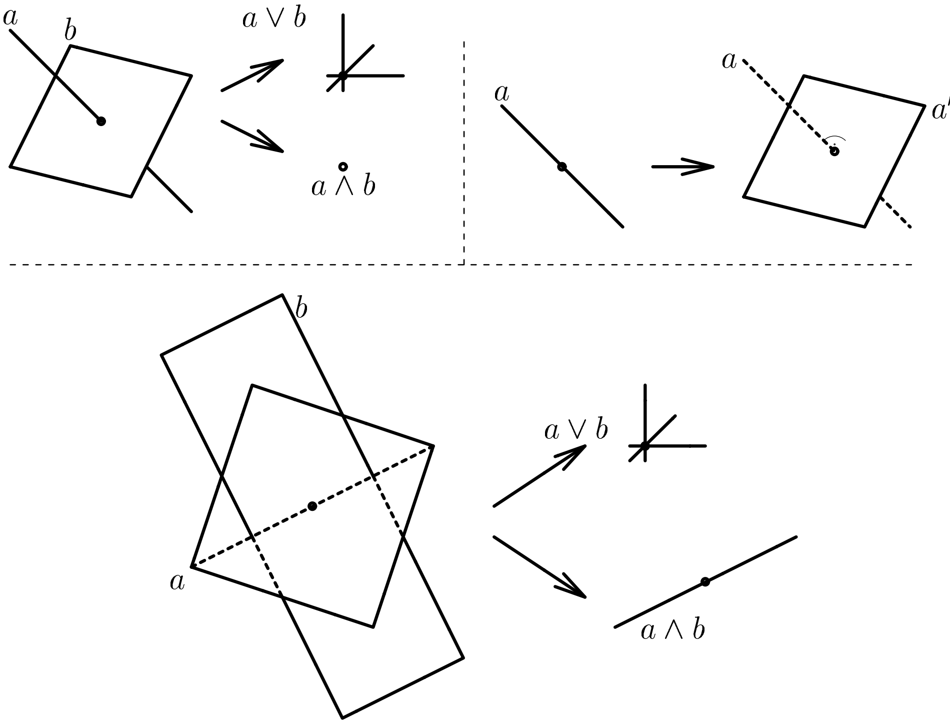
1) Az *események*: az (x, y) koordinátarendszerben az *origó*, *origón átmenő egyenesek* és az *egész sík*.
2) Az *és*: az események metszete.
3) A *vagy*: az események 'uniója'.
4) A *nem*: az esemény kiegészítője
5) Az *1*: az egész sík.
6) A *0*: az origó.



A sík logikája nem disztributív, de moduláris.

A 3 dimenziós tér logikája

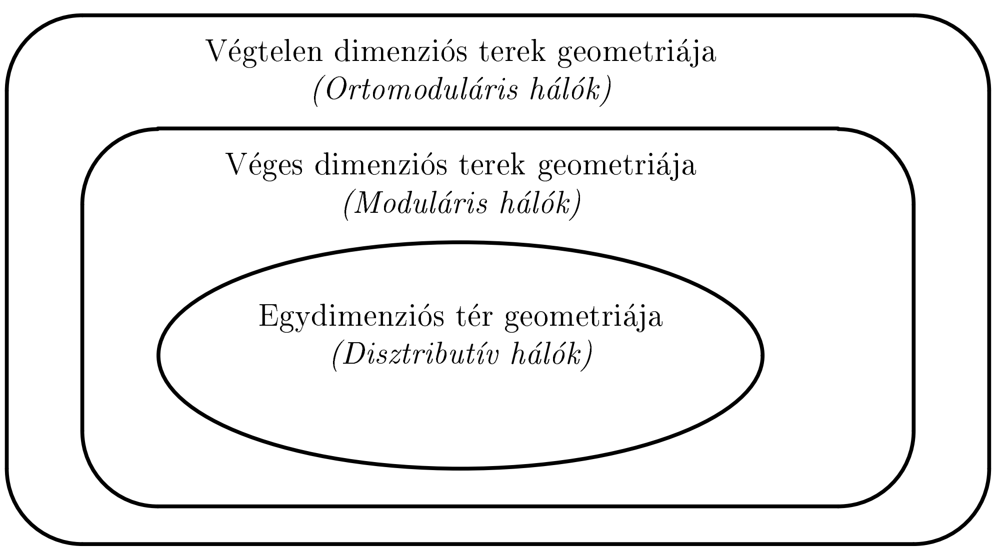
1) Az *események*: az (x, y, z) koordinátarendszerben az *origó*, *origón átmenő egyenesek*, *origón átmenő síkok* és az *egész tér*.
2) Az *és*: az események metszete.
3) A *vagy*: az események 'uniója'.
4) A *nem*: az esemény kiegészítője.
5) Az *1*: az egész tér.
6) A *0*: az origó.



A tér logikája nem disztributív, de moduláris.

A fenti konstrukció általánosítható magasabb dimenziós terekre is. Azonban minden véges dimenziós tér logikája moduláris, tehát a kvantummechanikának csak bizonyos részeiben használhatók jól.

A fenti konstrukció végtelen dimenziós terekre is általánosítható, ekkor nem moduláris, de ortomoduláris hálót kapunk.



Szubjektív megjegyzések

Történelmi fejlődés

1) Az előbb leírt geometriai modell végtelen dimenziós téren való alkalmazása az alapja a mai kvantummechanikának.
2) Ez a geometriai modell csak a kezdőlépés volt. Neumann János 1931-ben messze általánosította ezt a geometriai logikát (*Neumann-algebrák*,C^**-algebrák*).
3) A 60-as évekig volt kapcsolat a matematikusok és fizikusok között ezen a kutatási területen, utána szinte teljesen megszakadt.
4) Ma nem tanítják kötelező tananyagban a kvantummechanika logikai lényegét!

Következtetések

1) Nem hivatkozhatunk a szemléletünkre a kvantummechanikában.
2) Meglehetősen nehéz következetesen művelni a kvantumlogikát 'fejben'.
3) Nagyvonalú gondolat a kvanutmmechanikában 'paradoxonokról' beszélni.

Hf:

1) Mit jelenthet az 'a eseményből következik a b esemény' kijelentés ebben a logikai keretben?