Tételgyűjtemény a Tomita-Takesaki elméletéből

Andai Attila

Az itt szereplő tételekhez szükséges fogalmak és bizonyítások megtalálhatók a V. S. Sunder: An invitation to von Neumann algebras könyvben. Ez tanulási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák!

Tomita-Takesaki elmélet

1. Bevezetés

Legyen $S, T \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ekkor a következők teljesülnek:

(1) ha $S \subseteq T$, akkor $T' \subseteq S$;
(2) minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ természetes számra $S \subseteq S'' = S^{(2n)}$ és $S' = S^{(2n-1)}$;
(3) ha S önadjungált, akkor S' is önadjungált;
(4) az S' gyengén zárt részalgebrája $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-nak és $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \in S'$.

Legyen M nem degenerált önadjungált részalgebrája $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-nak. Ekkor a következők ekvivalensek:

(1) $M = M''$;
(2) M gyengén zárt;
(3) M erősen zárt.

Legyen A egységelemes C^*-algebra. Minden $a \in A$ elem felírható négy unitér operátor konvex kombinációjaként.

Legyen $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ és M Neumann-algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-ban. Az x operátor pontosan akkor eleme M-nek, ha minden $u \in M'$ unitér operátorra $uxu^* = x$ teljesül.

Legyen M Neumann-algebra és $x \in M$.

(1) Ha $x = u|x|$ polár felbontása x-nek, akkor $u, |x| \in M$.
(2) Ha x normális, akkor minden $F \subseteq \mathrm{Sp}(x)$ Borel-halmazra $1_F(x) \in M$.

A $\mathcal{H}$ önadjungált operátorainak minden uniform korlátos monoton általánosított sorozata gyengén konvergens.

Legyen M Neumann-algebra és $e, f \in P(M)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(1) $exf = 0$ minden $x \in M$ elemre;
(2) $c(e)c(f) = 0$, ahol $c(e)$ az e projektor centrális fedése:

$$c(e) = \wedge\{f \in P(M) \cap Z(M) \quad | \quad e \leq f\}.$$

Ha e és f nem nulla projekciók az M Neumann-faktorban, akkor létezik olyan $u \in M$ nem nulla parciális izometria, hogy $u^*u \leq e$ és $uu^* \leq f$.

2. Murray-Neumann osztályozása a faktoroknak

Legyenek $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ és $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ az M Neumann-faktorba befoglalt (*affiliated to M*) zárt alterek. A $\sim$ reláció $P(M)$-en megszámlálhatóan additív az alábbi értelemben: ha $\mathcal{M}_n \sim \mathcal{N}_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén valamint minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ számra $\mathcal{M}_m \perp \mathcal{M}_n$ és $\mathcal{N}_m \perp \mathcal{N}_n$, akkor

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n \sim \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_n.$$

Legyenek $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ az M Neumann-faktorba befoglalt zárt alterek. Ha $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ és $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$, akkor $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.

Legyenek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ az M Neumann-faktorba befoglalt zárt alterek. Ekkor vagy $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ vagy $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$.

Legyenek $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ az M Neumann-faktorba befoglalt zárt alterek, ahol az M elemei a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátorai. Ha $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ és $\mathcal{N}$ véges, akkor $\mathcal{M}$ is véges, vagyis ha létezik végetlen $\mathcal{M}$ akkor $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ az M-be foglalt olyan zárt alterek, hogy $\mathcal{N} \neq \{0\}$. Ekkor létezik $\mathcal{M}$-nek olyan páronként ortogonális $(\mathcal{N}_i)_{i\in I}$ altérrendszere és olyan $\mathcal{R}$ lineáris altere $\mathcal{M}$-nek, hogy

(1) minden $i \in I$ esetén $\mathcal{N}_i$ és $\mathcal{R}$ az M-be foglalt lineáris alterek,

(2)
$$\mathcal{M} = \left(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{N}_i\right) \oplus \mathcal{R},$$

(3) minden $i \in I$ indexre $\mathcal{N}_i \sim \mathcal{N}$,

(4) $\mathcal{R} \preceq \mathcal{N}$ és $\mathcal{R} \nsim \mathcal{N}$.

Ha ebben a felbontásban az I indexhalmaz végtelen, akkor létezik olyan felbontás is, ahol $\mathcal{R} = \{0\}$. Továbbá az I indexhalmaz számossága ($[\mathcal{M}/\mathcal{N}]$) független a felbontástól.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}$ az M-be foglalt olyan zárt altér, hogy $\mathcal{M} \neq \{0\}$.

(1) A $\mathcal{M}$ altér pontosan akkor végtelen, ha $\mathcal{M}$ felírható

$$\mathcal{M} = \mathcal{B} \oplus \left(\mathcal{M} \cap \mathcal{B}^{\perp}\right)$$

alakban, ahol $\mathcal{M} \sim \mathcal{B} \sim (\mathcal{M} \cap \mathcal{B}^{\perp})$.

(2) Ha $\mathcal{N}$ az M-be foglalt zárt altér és $\mathcal{M}$ végtelen, akkor $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ az M-be foglalt olyan zárt alterek, hogy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ és $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Ekkor létezik

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_3, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3, \quad \mathcal{B} = \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{B}_0$$

felbontása az altereknek az alábbi tulajdonságokkal:

(1) $\mathcal{B}_0, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i, \quad i \in \{1,2,3\}$ esetén az M-be foglalt lineáris alterek,

(2) $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{M}_3 = \mathcal{M} \cap \mathcal{B}^{\perp}$,

(3) $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{M}_3 = \mathcal{N} \cap \mathcal{B}^{\perp}$,

(4) $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cap \left(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_3\right)^{\perp}$,

(5) $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \cap \left(\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3\right)^{\perp}$,

(6) $\mathcal{B}_0 = \{\xi + A\xi \quad | \quad \xi \in \operatorname{Dom} A\}$, ahol az A olyan M-be foglalt zárt operátor, hogy: $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{M}_1, \quad \overline{\operatorname{Ran} A} = \mathcal{N}_1, \quad \ker A = \{0\}$,

(7) $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{N}_1 \sim \mathcal{B}_0$.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ az M-be foglalt olyan zárt alterek, hogy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ és $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Ekkor

$$\text{vagy} \quad \mathcal{B} \preceq \mathcal{M} \quad \text{vagy} \quad (\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \cap \mathcal{B}^{\perp} \preceq \mathcal{N}.$$

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ az M-be foglalt olyan véges zárt alterek, hogy $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Ekkor $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ is véges.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ az M-be foglalt alterek, ekkor

$$\Big((\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cap \mathcal{N}^{\perp}\Big) \preceq \mathcal{M}.$$

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ az M-be foglalt zárt alterek. Ha $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ véges, akkor $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ is véges.

Ha M II-típusú Neumann-faktor, melynek elemei a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátorai, akkor létezik M-be foglalt véges, nem zérus altereknek olyan $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$[\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n+1}] \geq 2$$

teljesül.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ M-be foglalt véges, nem zérus lineáris alterek. Ekkor

$$\left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}\right] \cdot \left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}\right] \leq \left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{N}}\right] < \left(\left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}\right] + 1\right) \cdot \left(\left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}\right] + 1\right),$$

ha $\mathcal{M} \perp \mathcal{B}$ akkor

$$\left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}\right] + \left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{N}}\right] \leq \left[\frac{\mathcal{M} \oplus \mathcal{B}}{\mathcal{N}}\right] < \left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}\right] + \left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{N}}\right] + 2.$$

teljesül.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér lineáris operátoraiból álló II típusú Neumann-faktor és $\mathcal{M}, \mathcal{B}$ M-be foglalt véges, nem zérus lineáris alterek és $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ az M alapsorozata (*fundamental sequence for M*). Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}_n}\right] \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}_n}\right] = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}_n}\right]}{\left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{N}_n}\right]} \in \mathbb{R}^+,$$

teljesül.

Legyen M Neumann-faktor, ekkor létezik

$$D : P(M) \to [0, \infty]$$

dimenziófüggvény az alábbi tulajdonságokkal:

(1) legyen $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in P(M)$ pontosan akkor $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$, ha $D(\mathcal{M}) = D(\mathcal{N})$,
(2) legyen $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in P(M)$ és $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, ekkor $D(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = D(\mathcal{M}) + D(\mathcal{N})$,
(3) a $\mathcal{M} \in P(M)$ altér pontosan akkor véges, ha $D(\mathcal{M}) < \infty$.

A D dimenziófüggvény valós pozitív számszorzó erejéig egyértelmű.

Legyen M Neumann-faktor és D a $P(M)$-en értelmezett dimenziófüggvény. Ekkor

(1) az $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in P(M)$ alterekre $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $D(\mathcal{M}) \leq D(\mathcal{N})$,

(2) a D függvény megszámlálhatóan additív az alábbi értelemben: ha $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ páronként ortogonális M-be foglalt zárt lineáris alterek, akkor

$$D\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} D(\mathcal{M}_n)$$

teljesül.

Legyen M Neumann-faktor, mely a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátoraiból áll, D a $P(M)$ feletti dimenziófüggvény és

$$\Delta := \{D(\mathcal{M}) \quad | \quad \mathcal{M} \quad M\text{-be foglalt altér}\}, \quad \omega := D(\mathcal{H}).$$

Ekkor

(1) $\Delta \subseteq [0, \omega]$,

(2) ha $\alpha, \beta \in \Delta$ és $\beta < \alpha$, akkor $\alpha - \beta \in \Delta$,

(3) ha $\forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i \in \Delta$ és $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \leq \omega$, akkor $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \in \Delta$

teljesül.

Legyen M Neumann-faktor, mely a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátoraiból áll, D a $P(M)$ feletti dimenziófüggvény és

$$\Delta := \{D(\mathcal{M}) \quad | \quad \mathcal{M} \quad M\text{-be van foglalva}\}.$$

Ekkor Δ az alábbi halmazok közül pontosan eggyel azonosítható:

(I_n) $\{0, a, 2a, \ldots, na\}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$,

(I_∞) $\{na \quad | \quad n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}^+$,

(II_1) $[0, \omega]$, $\omega \in \mathbb{R}^+$,

$(II\infty)$ $[0, \infty]$,

(III) $\{0, \infty\}$.

3. A Tomita-Takesaki elmélet

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátorainak Neumann-algebrája és ϕ olyan normális pozitív lineáris funkcionál M-en, azaz $\phi \in M_{*,+}$, hogy ϕ hű funkcionál. Ekkor létezik egy $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \Omega_\phi)$ hármas, ahol

(1) $\mathcal{H}_\phi$ Hilbert-tér,
(2) $\pi_\phi : M \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$ *-algebra homomorfizmus,
(3) $\Omega_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ és $\mathcal{H}_\phi = \overline{\pi_\phi(M)\Omega_\phi}$,
(4) minden $x \in M$ esetén $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\Omega_\phi, \Omega_\phi \rangle$.

Ha a $(\mathcal{H}^*_\phi, \pi^*_\phi, \Omega^*_\phi)$ hármas szintén rendelkezik a fenti tulajdonságokkal akkor egyértelműen létezik egy $w : \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{H}^*_\phi$ unitér operátor, hogy $w\Omega_\phi = \Omega^*_\phi$ és minden $x \in M$ elemre $\pi^*_\phi(x) = w\pi_\phi(x)w^*$. Továbbá az M π_ϕ általi képe szintén Neumann-algebra, π_ϕ normatartó és σ-gyenge homeomorfizmus M és $\pi_\phi(M)$ között.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátorainak Neumann-algebrája és Ω ciklikus szeparáló vektora M-nek. Legyenek

$$S_0 : M\Omega \to \mathcal{H} \qquad S_0(x\Omega) := x^*\Omega,$$
$$F_0 : M'\Omega \to \mathcal{H} \qquad S_0(x\Omega) := x^*\Omega$$

konjugált lineáris operátorok. Az S_0, F_0 operátorok sűrűn definiált lezárható operátorok. Lezárásuk legyen S, F, ekkor

$$S = F^* = F_0^* \quad \text{és} \quad F = S^* = S_0^*.$$

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátorainak Neumann-algebrája és $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ polárfelbontása az S operátornak. Ekkor

(1) a J önadjungált, antiunitér operátor és Δ pozitív önadjungált invertálható operátor,
(2) az $F = J\Delta^{\frac{-1}{2}}$ teljesül és ez az F operátor polárfelbontása, továbbá $\Delta = FS$ és $\Delta^{-1} = SF$,
(3) a $J\Delta J = \Delta^{-1}$ teljesül, továbbá ha f az $\mathbb{R}_0^+$-on értelmezett mérhető függvény, akkor

$$Jf(\Delta)J = \bar{f}(\Delta^{-1}), \quad \text{speciálisan} \quad J\Delta^{it}J = \Delta^{it} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátorainak Neumann-algebrája, és $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ polárfelbontása az S operátornak. Ekkor

(1) minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$,
(2) a $JMJ = M'$ teljesül.

Legyen M a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér operátorainak Neumann-algebrája és ϕ normális hű pozitív lineáris funkcionál M-en. Legyen $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \Omega_\phi)$ a GNS hármas. Ekkor Ω_ϕ ciklikus és szeparáló vektora $\pi_\phi(M)$-nek. Legyenek S_ϕ, F_ϕ, J_ϕ és Δ_ϕ a szokásos operátorok. Ekkor

(1) az $\Omega_\phi \in \mathrm{Dom}(S_\phi) \cap \mathrm{Dom}(F_\phi)$ teljesül és $S_\phi \Omega_\phi = F_\phi \Omega_\phi = \Omega_\phi$,
(2) az $\Omega_\phi \in \mathrm{Dom}(\Delta_\phi)$ teljesül és $\Delta_\phi \Omega_\phi = J_\phi \Omega_\phi = \Omega_\phi$,
(3) legyen minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sigma_t^\phi : M \to M \qquad x \mapsto \pi_\phi^{-1}\big(\Delta_\phi^{it} \pi_\phi(x) \Delta_\phi^{-it}\big),$$

ekkor $(\sigma_t^\phi)_{t\in\mathbb{R}}$ σ-gyengén folytonos egyparaméteres $*$-automorfizmusa M-nek,
(4) az alábbi egyenlet teljesül:

$$\pi_\phi\big(\sigma_t^\phi(x)\big)\Omega_\phi = \Delta_\phi^{it} \pi_\phi(x) \omega_\phi,$$

(5) az alábbi feltételek ekvivalensek:

(a) ϕ nyomszerű,
(b) S_ϕ antiunitér,
(c) $S_\phi = J_\phi = F_\phi$,
(d) $\Delta_\phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\phi}$,
(e) $\sigma_t^\phi(x) = x, \quad \forall x \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ esetén.

Legyen ϕ súly az M Neumann-algebrán és

$$\mathcal{D}_\phi := \{x \in M_+ \quad | \quad \phi(x) < \infty\},$$
$$\mathcal{N}_\phi := \{x \in M \quad | \quad \phi(x^*x) < \infty\},$$
$$\mathcal{M}_\phi := \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \quad | \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots n\} \quad x_i, y_i \in \mathcal{N}_\phi \right\}.$$

Ekkor az alábbiak teljesülnek:

(1) A $\mathcal{D}_\phi$ öröklődően pozitív kúp (*hereditary positive cone*), vagyis

(a) ha $x, y \in \mathcal{D}_\phi, \ \lambda \in \mathbb{R}_0^+$, akkor, $\lambda x + y \in \mathcal{D}_\phi$,
(b) ha $x \in \mathcal{D}_\phi, \ z \in M_+, \ z \le x$ akkor $z \in \mathcal{D}_\phi$.

(2) Az $\mathcal{N}_\phi$ baloldali ideál M-ben.
(3) Az $\mathcal{M}_\phi$ önadjungált részalgebrája M-nek, nem szükségszerűen egységelemes és nem szükségszerűen zárt akármelyik operátortopologiában.
(4) Az $\mathcal{D}_\phi = \mathcal{M}_+ = \mathcal{M} \cap M_+$ teljesül, és $\mathcal{M}_\phi$ minden eleme előállítható négy $\mathcal{D}_\phi$-beli elem lineáris kombinációjaként.
(5) Ha $x, z \in \mathcal{N}_\phi$ és $y \in M$, akkor $x^* y z \in \mathcal{M}_\phi$.
(6) Egyértelműen létezik olyan $\dot\phi$ lineáris funkcionál $\mathcal{M}_\phi$-n, hogy $\dot\phi|_{\mathcal{M}_{\phi,+}} = \phi$.

Legyen ϕ súly az M Neumann-algebrán, ekkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) a ϕ normális,

(2) létezik olyan monoton növő $(\psi_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat $M_{*,+}$-ban, hogy minden $x \in M_+$ esetén

$$\lim_{i,I} \psi_i(x) = \phi(x),$$

(3) létezik olyan $(\psi_i)_{i\in J}$ család $M_{*,+}$-ban, hogy minden $x \in M_+$ elemre

$$\phi(x) = \sum_{i\in J} \psi_i(x),$$

(4) a ϕ σ-gyengén alulról félig folytonos, vagyis ha $x_i, x \in M_+$ és

$$\lim_{\substack{i,I \\ \sigma-\text{gyengén}}} x_i = x,$$

akkor $\phi(x) \leq \liminf_{i,I} \phi(x_i)$.

Legyens ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán, valamint $\mathcal{D}_\phi, \mathcal{N}_\phi, \mathcal{M}_\phi$ a ϕ-hez asszociált alterek. Szintén ϕ jelölje az $\mathcal{M}_\phi$-re kiterjesztett lineáris funkcionált. Ekkor létezik egy $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \eta_\phi)$ hármas, ahol

(1) $\mathcal{H}_\phi$ Hilbert-tér,

(2) $\pi_\phi : M \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$ *-algebra homomorfizmus,

(3) $\eta_\phi : \mathcal{N}_\phi \to \mathcal{H}_\phi$ olyan lineáris leképezés, hogy minden $x, y \in \mathcal{N}_\phi$ és $z \in M$ esetén

$$\langle \eta_\phi(x), \eta_\phi(y) \rangle = \phi(y^*x), \quad \pi_\phi(z)\eta_\phi(x) = \eta_\phi(zx),$$

valamint $\eta_\phi(\mathcal{N}_\phi)$ sűrű $\mathcal{H}_\phi$-ben.

Ha a $(\mathcal{H}_\phi^*, \pi_\phi^*, \eta_\phi^*)$ hármas szintén rendelkezik a fenti tulajdonságokkal akkor egyértelműen létezik egy $w : \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{H}_\phi^*$ unitér operátor, hogy minden $x \in \mathcal{N}_\phi$ esetén $w\eta_\phi(x) = \eta_\phi^*(x)$ és minden $z \in M$ elemre $\pi_\phi^*(z) = w\pi_\phi(z)w^*$. Továbbá π_ϕ normatartó és σ-gyenge homeomorfizmus M és $\pi_\phi(M)$ között.

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán, $\mathcal{D}_\phi, \mathcal{N}_\phi, \mathcal{M}_\phi$ a ϕ-hez asszociált alterek és $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \eta_\phi)$ a GNS-hármas. Mivel π_ϕ izomorfizmus azonosítsuk M-et a $\pi_\phi(M)$ térrel és tegyük fel, hogy $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$ és $\pi_\phi(x) = x$. Legyen $\mathcal{U}_\phi = \eta_\phi(\mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\phi^*)$, ha $\xi_1 = \eta_\phi(x_1)$ és $\xi_2 = \eta_\phi(x_2)$, akkor legyen

$$\xi_1\xi_2 := \eta_\phi(x_1x_2) \quad \text{és} \quad \xi_1^\sharp := \eta_\phi(x_1^*).$$

Ekkor

(1) az $\mathcal{U}_\phi$ involutív, asszociatív algebra,

(2) az $\mathcal{U}_\phi$ skalárszorzatos tér a következő tulajdonságokkal:

(a) $\langle \xi\eta, \zeta\rangle = \langle \eta, \xi^\sharp\zeta\rangle, \quad \forall \xi,\eta,\zeta \in \mathcal{U}_\phi$

(b) $\forall \xi \in \mathcal{U}_\phi : \ \eta \mapsto \xi\eta$ leképezés folytonos lineáris operátor $\mathcal{U}_\phi$-n,

(3) legyen

$$\mathcal{U}_\phi^2 := \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i, \eta_i \quad \Big| \quad n \in \mathbb{N}, \ \forall i \in \{1, 2n \dots, n\} : \ \xi_i, \eta_i \in \mathcal{U}_\phi \right\},$$

ekkor a $\mathcal{U}_\phi^2$ sűrű $\mathcal{U}_\phi$ térben,

(4) legyen $\mathcal{H}$ az $\mathcal{U}_\phi$ tér teljesítése; az

$$S_0 : \mathcal{U}_\phi \to \mathcal{U}_\phi \quad \xi \mapsto \xi^\sharp$$

konjugált lineáris operátor kiterjeszthető zárt operátorrá a $\mathcal{H}$ térben.

Legyen $M = \mathcal{L}(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$ általánosított Hilbert-algebra baloldali Neumann-algebrája. Ekkor létezik egy J önadjungált antiunitér operátor és egy Δ pozitív önadjungált operátor $\mathcal{H}$-ban, azaz $\mathcal{U}$ teljesítésében, hogy

(1) az $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ és $F = J\Delta^{\frac{-1}{2}}$ előállítás az S, F operátorok polárfelbontása,

(2) a $J\Delta J = \Delta^{-1}$ teljesül, valamint minden $\mathbb{R}_0^+$-n értelmezett f mérhető függvényre

$$Jf(\Delta)J = \bar{f}(\Delta^{-1}),$$

(3) a $JMJ = M'$ teljesül és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M.$$

Legyen M Neumann-algebra és $\phi \in M_{*,+}$ olyan funkcionál mely teljesíti a KMS-feltételt az $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ σ-gyengén folytonos egyparaméteres *-automorfizmus csoportra nézve. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\phi \circ \alpha_t = \phi$ teljesül.

Legyen ϕ egy rögzített hű, normális, pozitív funkcionál az M Neumann-algebrán és $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ olyan σ-gyengén folytonos egyparaméteres *-automorfizmus csoportja M-nek, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\phi \circ \alpha_t = \phi$. Azonosítsuk M-et a $\pi_\phi(M)$ térrel és tegyük fel, hogy létezik olyan $\Omega \in \mathcal{H}$ vektor mely ciklikus. szeparáló és minden $x \in M$ esetén

$$\phi(x) = \langle x\Omega, x\rangle.$$

Ekkor létezik $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ erősen folytonos egyparaméteres csoportja az unitér operátoroknak, hogy minden $x \in M$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$u_t x\Omega = \alpha_t(x)\Omega.$$

Legyen H az $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres unitér csoport generátora, vagyis $u(t) = e^{itH}$ és

$$\mathcal{B}_H := \mathrm{Span}\{f(H)x\Omega \mid x \in M,\ f \in \bar{C}_0^\infty\}.$$

(1) Ha $\alpha_t = \sigma_t^\phi$, akkor $u_t = \Delta^{it}$ és $H = \log\Delta$.
(2) Minden $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos g függvényre $\mathcal{B}_{H_{\log(\Delta)}}$ a lényeges magja (*core for*) $g(H_{\log\Delta})$-operátornak, vagyis

$$\mathrm{graph}\big(g(H_{\log\Delta})|_{\mathcal{B}_{H_{\log(\Delta)}}}\big) \text{ halmaz sűrű a } \mathrm{graph}\big(g(H_{\log\Delta})\big)$$

halmazban a norma topologia szerint.
(3) A $\mathcal{B}_{H_{\log(\Delta)}} \subseteq M\Omega$ teljesül.
(4) Ha $\alpha_t = \sigma_t^\phi$ akkor a $\mathcal{B}_{H_{\log(\Delta)}}$ altér invariáns az S operátorra.
(5) Ha $\xi \in \mathcal{B}_{H_{\log(\Delta)}}$ és $\eta \in \mathrm{Dom}(S)$, akkor minden $z \in \mathbb{C}$ elemre

$$\langle \Delta^z\xi, \eta^\sharp\rangle = \langle \eta, \Delta^{1-\bar{z}}\xi^\sharp\rangle,$$

valamint az

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \langle \Delta^z\xi, \eta^\sharp\rangle$$

függvény analitikus.

Legyen ϕ hű, normális, pozitív lineáris funkcionál az M Neumann-algebrán és $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ σ-gyengén folytonos egyparaméteres automorfizmus csoportja M-nek. Ekkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha_t = \sigma_t^\phi$.
(2) A ϕ funkcionál teljesíti a KMS-feltételt az $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres csoportra nézve.

Legyen ϕ hű, normális, pozitív lineáris funkcionál az M Neumann-algebrán, ekkor

$$\phi \circ \sigma_t^\phi = \phi.$$

Legyen ϕ hű, normális, pozitív lineáris funkcionál az M Neumann-algebrán és legyen

$$M^\phi := \{x \in M \mid \forall t \in \mathbb{R} :\ \sigma_t^\phi(x) = x\}$$

a fixpont algebra. Tetszőleges $x \in M$ elem esetén $x \in M^\phi$ pontosan akkor teljesül, ha minden $y \in M$ elemre $\phi(xy) = \phi(yx)$. Speciálisan $M^\phi \subseteq Z(M)$.

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán és $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ σ-gyengén folytonos egyparaméteres automorfizmus csoportja M-nek. Ekkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha_t = \sigma_t^\phi$.
(2) A ϕ funkcionál teljesíti a KMS-feltételt az $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres csoportra nézve.

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán és $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ és legyen $x \in M$. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(1) Az $x \in M^\phi$ teljesül.
(2) Minden $y \in \mathcal{M}_\phi$ esetén $\phi(xy) = \phi(yx)$ és az

$$x\mathcal{M}_\phi \subseteq \mathcal{M}_\phi, \quad \mathcal{M}_\phi x \subseteq \mathcal{M}_\phi$$

feltételek teljesülnek.

Legyen ϕ hű, normális, pozitív lineáris funkcionál az M Neumann-algerbán. A $\psi \in M_{*,+}$ funkcionálra az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) Létezik olyan $h \in M^\phi_+$, hogy $\psi = \phi(h.)$.
(2) Létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $\psi \leq c\phi$ és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\psi \circ \sigma^\phi_t = \psi$.

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán. Legyen ψ olyan normális, félig véges súly M-en, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre $\psi \circ \sigma^\phi_t = \psi$. Ekkor egyértelműen létezik olyan H pozitív, önadjungált, M^ϕ-be foglalt operátor, hogy ha

(1) minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $H_\varepsilon := H(\mathrm{Id} + \varepsilon H)^{-1}$,
(2) minden $x \in M$ esetén

$$\big(\phi(H_\varepsilon.)\big)(x) := \phi(H_\varepsilon^{\frac{1}{2}} x H_\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

(3) és $\phi(H.)$ a $\{\phi(H_\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ átlánosított sorozat $\varepsilon \to 0$ határértéke, ahol a sorozat

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow \phi(H_{\varepsilon_1}.) \leq \phi(H_{\varepsilon_2}.)$$

szerint van rendezve,

akkor

$$\psi = \phi(H.).$$

A H Radon-Nikodym sűrűségi operátor.

Legyen M_0 Neumann-részalgebrája az M Neumann-algebrának és $E : M \to M_0$ egységnyi normájú, normális projekció. Ekkor

(1) az $E \geq 0$ teljesül, vagyis ha $x \in M_+$, akkor $Ex \in M_{0,+}$,
(2) ha $x \in M$, $a_0, b_0 \in M_0$, akkor

$$E(a_0 x b_0) = a_0(Ex)b_0,$$

(3) minden $x \in M$ esetén

$$(Ex)^*(Ex) \leq E(x^*x).$$

Legyen M_0 Neumann-részalgebrája az M Neumann-algebrának és ϕ hű normális állapot M-en. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(1) létezik ϕ-vel kompatibilis $E : M \to M_0$ feltételes várhatóérték,
(2) minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\sigma_t^\phi(M_0) \subseteq M_0$,
(3) legyen $\phi_0 := \phi|_{M_0}$ és legyen σ^{ϕ_0} M_0-nak a ϕ_0-ra vonatkozó moduláris automorfizmus csoportja, ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in M_0$ esetén

$$\sigma_t^\phi(x_0) = \sigma_t^{\phi_0}(x_0).$$

4. Connes osztályozása a III faktoroknak

Ha ϕ és ψ hű, normális, félig véges súlyok az M Neumann-algebrán, akkor létezik olyan

$$\tau : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(M) \qquad t \mapsto u_t$$

erősen folyton függvény, hogy

(1) minden $x \in M$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\phi u_t^*,$$

(2) minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$u_{t+s} = u_t \sigma_t^\phi(u_s).$$

Az M Neumann-algebrára a következő állítások ekvivalensek.

(1) Az M félig véges.
(2) Létezik olyan ϕ hű, normális, félig véges súly M-en, hogy a $(\sigma_t^\phi)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres automorfizmuscsoport belső (*the flow* $(\sigma_t^\phi)_{t\in\mathbb{R}}$ *is inner*).
(3) Minden ϕ hű, normális, félig véges M feletti funkcionál esetén a $(\sigma_t^\phi)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres automorfizmuscsoport belső.

Legyenek ϕ, ψ olyan hű, normális, félig véges súlyok az M Neumann-algebrán, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ elemre

$$\psi \circ \sigma_t^\phi = \psi.$$

Ekkor minden $x \in M$ és $t \in \mathbb{R}$ elemre

$$\sigma_t^\psi(x) = H^{it} \sigma_t^\phi(x) H^{-it},$$

ahol H a Radon-Nikodym sűrűségi operátor.

Legyen M Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport és $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ pontonként σ-gyengén folytonos homomorfizmus. Legyen $M(G)$ a G feletti véges, reguláris komplex mértékek tere és $\mathcal{L}_\sigma(M)$ a σ-gyengén folytonos M feletti lineáris operátorok halmaza. A

$$\alpha : M(G) \to \mathcal{L}_\sigma(M) \qquad \mu \mapsto \alpha(\mu) := \int \alpha_t d\mu(t)$$

leképezés algebra homomorfizmus és

$$\|\alpha(\mu)\| \leq \|\mu\|.$$

Legyen G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő kommutatív topologikus csoport Γ duálissal és

$$\hat{C}(G) := \{f \in L^1(G) \mid \mathcal{F}(f) \in C_0(G)\}.$$

Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha $K \subseteq U \subseteq \Gamma$ halmazok közül K kompakt és U nyílt, akkor létezik olyan $f \in \hat{C}(G)$ függvény, hogy

$$1_K \leq \mathcal{F}(f) \leq 1_U.$$

(2) Ha $K \subseteq \Gamma$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $k \in \hat{C}(G)$, hogy $\mathcal{F}(f)|_K = 1$ és

$$\|k\|_1 < 1 + \varepsilon.$$

(3) Ha $f \in L^1(G)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $k \in \hat{C}(G)$, hogy

$$\|f - k * f\|_1 < \varepsilon,$$

speciálisan $\hat{C}(G)$ sűrű $L^1(G)$-ben az $\|\cdot\|_1$ norma szerint.

Legyen G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport Γ duális csoporttal. Ha $S \subseteq L^1(G)$ akkor legyen

$$S^\perp := \{\gamma \in \Gamma \mid \forall f \in S : \ (\mathcal{F}(f))(\gamma) = 0\}$$

az S halmaz annihilátora.

(1) Ha $E \subseteq \Gamma$ zárt halmaz, akkor a

$$I_0(E) := \{f \in L^1(G) \mid \mathcal{F}(f) \text{ eltünik } E \text{ egy környezetén}\}$$

halmaz ideál $L^1(G)$-ben és $E = I_0(E)^\perp$.

(2) Ha I zárt ideál $L^1(G)$-ben és ha $f \in L^1(G)$ olyan függvény, hogy $\mathcal{F}(f)$ eltünik $I^\perp$ egy környezetén, akkor $f \in I$.

Legyen M Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport Γ duális csoporttal és $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ pontonként σ-gyengén folytonos homomorfizmus. Legyen $x \in M$, $E \subseteq \Gamma$ zárt halmaz és

(a) $\mathrm{Sp}(\alpha) := \{f \in L^1(G) \mid \alpha(f) = 0\}^{\perp}$ Arveson-spektrum,

(b) $\mathrm{Sp}_\alpha(x) := \{f \in L^1(G) \mid \alpha(f)x = 0\}^{\perp}$,

(c) $M(\alpha, E) := \{x \in M \mid \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subseteq E\}$.

Ekkor a következők teljesülnek.

(1) Az spektrumokra a

(a) $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{\gamma \in \Gamma \mid \alpha(f) = 0 \Rightarrow (\mathcal{F}(f))(\gamma) = 0\}$,

(b) $\mathrm{Sp}(\alpha)(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \alpha(f)x = 0 \Rightarrow (\mathcal{F}(f))(\gamma) = 0\}$

egyenlőségek teljesülnek.

(2) Az $x \in M(\alpha, E)$ pontosan akkor teljesül ha minden olyan $f \in L^1(G)$ függvényre, melyre $\mathcal{F}(f)$ eltünik E egy környezetén $\alpha(f)x = 0$, vagyis $M(\alpha, E)$ σ-gyenge zárt altere M-nek.

(3) A $\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$.

(4) A $\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \{0\}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $t \in G$ esetén $\alpha_t(x) = x$ és $x \neq 0$.

Legyen M Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport Γ duális csoporttal és $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ pontonként σ-gyengén folytonos homomorfizmus. Legyen $x \in M$, $E \subseteq \Gamma$ zárt halmaz és $f \in L^1(G)$. Ekkor az alábbiak teljesülnek:

(1) $\mathrm{Sp}_\alpha(x^*) = -\mathrm{Sp}_\alpha(x)$,

(2) $\forall t \in G: \quad \alpha_t(M(\alpha, E)) = M(\alpha, E)$,

(3) $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha(f)x) \subseteq \mathrm{Sp}_\alpha(x) \cap \mathrm{spt}(\mathcal{F}(f))$,

(4) $\gamma \in \mathrm{Sp}(\alpha) \Leftrightarrow M(\alpha, V) \neq \{0\}, \quad \forall V$ környezetére γ-nak,

(5) ha $\mathcal{B}$ σ-gyengén totális részhalmaza M-nek, akkor

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \left(\bigcup_{y \in \mathcal{B}} \mathrm{Sp}_\alpha(y) \right)^{-},$$

(6) ha $\mu \in M(G)$ és $\mathcal{F}(\mu)$ a $\mathrm{Sp}_\alpha(x)$ egy környezetén eltünik, akkor $\alpha(\mu)x = 0$.

Az $\mathrm{spt}(f)$ a függvény tartóját jelöli, vagyis

$$\mathrm{spt}(f) := \overline{f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})}.$$

Legyen M Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport Γ duális csoporttal és $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ pontonként σ-gyengén folytonos homomorfizmus. Legyenek E_1 és E_2 zárt alterei Γ-nak és $E := \overline{E_1 + E_2}$. Ha $x_1 \in M(\alpha, E_1)$ és $x_2 \in M(\alpha, E_2)$, akkor $x \in M(\alpha, E)$.

Legyen α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán, azaz az M Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, kommutatív, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport Γ duális csoporttal és $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ pontonként σ-gyengén folytonos homomorfizmus. Legyen $e, e_1, e_2 \in P(M^\alpha)$ és $E \subseteq \Gamma$ zárt halmaz. Jelölje M_e az eMe Neumann-algebrát és legyen

$$\alpha^e : G \times M_e \to M_e \qquad (g, exe) \mapsto \alpha^e_g(exe) = e(\alpha_g(x))e$$

csoporthatás az M_e algebrán. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Érvényes az $M_e(\alpha^e, E) = M(\alpha, E) \cap M_e$ összefüggés.
(2) Ha $e_1 \leq e_2$, akkor $\mathrm{Sp}(\alpha^{e_1}) \subseteq \mathrm{Sp}(\alpha^{e_2})$.
(3) Ha $\mu \in M(G)$, $x \in M$ és $a, b \in M^\alpha$, akkor

$$\alpha(\mu)(axb) = a(\alpha(\mu)x)b.$$

(4) Ha $x \in M$ és $a, b \in M^\alpha$ invertálható operátorok M^α-ban, akkor

$$\mathrm{Sp}_\alpha(axb) = \mathrm{Sp}_\alpha(x).$$

Legyen α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán, ekkor

$$\Gamma(\alpha) = \cap\{\mathrm{Sp}(\alpha^e) \mid 0 \neq e \in P(Z(M^\alpha))\},$$

ahol

$$\Gamma(\alpha) = \cap\{\mathrm{Sp}(\alpha^e) \mid 0 \neq e \in P(M^\alpha)\}$$

a Connes-spektrum. Ha M^α Neumann-faktor, akkor $\Gamma(\alpha) = \mathrm{Sp}(\alpha)$.

Legyen α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán, $x \in M$, Γ a duális csoport, és $(V_j)_{j \in J}$ nyílt fedése M-nek. Ha $x \neq 0$, akkor létezik olyan $f \in \hat{C}$, hogy $\alpha(f)x \neq 0$ és $\mathrm{spt}(\mathcal{F}(f)) \subseteq V_j$ valamilyen $j \in J$ esetén.

Legyen α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán és $e_1, e_2 \in M^\alpha$ nemnulla, M-ben ekvivalens projekciók. Ekkor

$$\Gamma(\alpha^{e_1}) = \Gamma(\alpha^{e_2}).$$

Legyen α és β a G olyan csoporthatása az M Neumann-algebrán, hogy α és β külső ekvivalensek (*outer equivalent*), vagyis létezik olyan

$$t : G \to U(M) \qquad g \mapsto u_g$$

erősen folytonos függvény, hogy minden $g, h \in G$ és $x \in M$ esetén

$$u_{gh} = u_g \alpha_g(u_h) \quad \text{és} \quad \beta_g(x) = u_g \alpha_g(x) u_g^*,$$

jelölése $\alpha \overset{\circ}{\sim} \beta$. Ekkor létezik olyan γ hatása G-nek az $\tilde{M} = M \otimes M_2(\mathbb{C})$ Neumann-algebrán, hogy

$$\gamma_g(x \otimes e_{11}) = \alpha_g(x) \otimes e_{11} \quad \text{és} \quad \gamma_g(x \otimes e_{22}) = \beta_g(x) \otimes e_{22}$$

minden $g \in G$ és $x \in M$ esetén.

Legyen α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán. Ekkor a következők teljesülnek:

(1) $\Gamma(\alpha) + \mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}(\alpha)$,

(2) $\Gamma(\alpha)$ zárt részcsoportja Γ-nak,

(3) ha β külső ekvivalnes csoporthatás α-val akkor, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$.

Legyen M Neumann-algebra és ϕ hű, normális, félig véges súly M-en. Legyen $\Gamma(M) = \Gamma(\sigma^\phi)$, ekkor $\Gamma(M)$ valamelyike a következő halmazoknak

(0) $\Gamma(M) = \{1\}$,

(λ) $\Gamma(M) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \lambda \in]0,1[$,

(1) $\Gamma(M) = [0, \infty]$.

Ha M félig véges, akkor $\Gamma(M) = \{1\}$.

Legyen α a G csoport hatása az M III-típusú faktoron. Ekkor

$$\Gamma(\alpha) = \cap\{\mathrm{Sp}(\beta) \mid \alpha \overset{\circ}{\sim} \beta\}.$$

Legyen M Neumann-faktor és ϕ hű, normális, félig véges súly M-en és β az $\mathbb{R}$ csoport olyan hatása M-en, hogy $\sigma^\phi \overset{\circ}{\sim} \beta$. Ekkor egyértelműen létezik olyan ψ hű, normális, félig véges súly M-en, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\beta_t = \sigma_t^\psi$ teljesül.

Ha M Neumann-faktor, akkor

$$\Gamma(M) = \cap\{\mathrm{Sp}(\sigma^{\phi}) \mid \phi \text{ hű, normális, félig véges súly } M\text{-en}\}.$$

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-algebrán, ekkor

$$\mathrm{Sp}(\sigma^{\phi}) = \mathrm{Sp}(\Delta_{\phi}) \cap]0, \infty[,$$

ahol $\mathbb{R}$ duális csoportját $\mathbb{R}_*^+$-gal azonosítottuk.

Ha M Neumann-faktor, akkor

$$\Gamma(M) = \mathbb{R}_*^+ \cap \Big(\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi}) \mid \phi \text{ hű, normális félig véges súly } M\text{-en}\}\Big).$$

Az M Neumann-faktorra a következők ekvivalensek:

(1) az M félig véges,

(2) legyen

$$S(M) := \cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi}) \mid \phi \text{ hű, normális, félig véges súly } M\text{-en}\},$$

ekkor $S(M) = \{1\}$,

(3) az $0 \neq S(M)$ teljesül.

Legyen ϕ hű, normális, félig véges súly az M Neumann-faktoron. Ha $0 \neq e \in P(M^{\phi})$, akkor legyen $\phi_e = \phi|_{M_{e,+}}$. Ekkor

(1) a ϕ_e hű, normális, félig véges súly M_e-n,

(2) az

$$\Gamma(M) = \mathbb{R}_*^+ \cap \Big(\cap\Big\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi_e}) \mid 0 \neq e \in P(Z(M^{\phi}))\Big\}\Big),$$

speciálisan, ha M^{ϕ} Neumann-faktor, akkor

$$\Gamma(M) = \mathbb{R}_*^+ \cap \mathrm{Sp}(\Delta_{\phi}).$$

Legyen M Neumann-faktor és ϕ hű, normális, félig véges súly M-en. Ekkor

$$S(M) = \cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi_e}) \mid 0 \neq e \in P(Z(M^{\phi}))\}$$

teljesül.

Ha M Neumann-faktor, akkor

$$\Gamma(M) = \mathbb{R}_*^+ \cap \Big(\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi_e}) \mid 0 \neq e \in P(M^\phi)\}\Big), \tag{1}$$

$$S(M) = \cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\phi_e}) \mid 0 \neq e \in P(M^\phi)\} \tag{2}$$

teljesül.

5. Kereszt-szorzat, (*Crossed-products*)

Legyen G megszámlálható, diszkrét csoport, $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra és α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán. Legyen minden $t \in G$ esetén $\mathcal{H}_t := \mathcal{H}$ és

$$\tilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{t \in G} \mathcal{H}_t.$$

Ha $\xi \in \mathcal{H}$ és $t \in G$, akkor legyen $\tilde{\xi}^t$ az a $\tilde{\mathcal{H}}$-beli elem, hogy

$$\tilde{\xi}^t : G \to \mathcal{H} \qquad s \mapsto \delta_{t,s}\xi.$$

Ha $\tilde{x} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$, akkor minden $s, t \in G$ esetén létezik egyértelműen $\tilde{x}(s,t)$ korlátos operátor $\mathcal{H}$-n, melyre minden $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ esetén

$$\langle \tilde{x}(s,t)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{x}\tilde{\xi}^t, \tilde{\eta}^s \rangle$$

teljesül. Legyen

$$\tilde{M} := \Big\{\tilde{x} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}) \ \Big|\ \forall s,t \in G: \ \tilde{x}(s,t) \in M, \ \tilde{x}(s,t) = \alpha_{t^{-1}}(\tilde{x}(st^{-1}, e_G))\Big\}$$

az M G-vel vett α-szerinti kereszt-szorzata, más jelöléssel $M \otimes_\alpha G$. Ekkor $\tilde{M}$ Neumann-algebra $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$-ban.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, és $\tilde{M}$ az M Neumann-algebrának a G megszámlálható diszkrét csoporttal vett α-hatás szerinti kereszt-szorzata. Legyen

$$\begin{array}{llll} \pi : M \to \tilde{M} & x \mapsto \pi(x): & (\pi(x))(s,t) := \delta_{s,t}\alpha_{t^{-1}}(x) & \forall s,t \in G, \\ \lambda : G \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}) & u \mapsto \lambda(u): & (\lambda(u))(s,t) := \delta_{s,ut}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & \forall s,t \in G. \end{array}$$

Ekkor minden $u \in G$ és $x \in M$ esetén

$$\lambda(u)\pi(x)\lambda(u)^* = \pi(\alpha_u(x))$$

teljesül. Továbbá, ha $\tilde{x} \in \tilde{M}$, akkor

$$\begin{aligned} &(1) && \tilde{x} \in \pi_\alpha(M)' && \Leftrightarrow \forall y \in M,\ \forall t \in G: && \tilde{x}(t, e_G)y = \alpha_{t^{-1}}(y)\tilde{x}(t, e_G), \\ &(2) && \tilde{x} \in \lambda(G)' && \Leftrightarrow \forall t, u \in G: && \tilde{x}(utu^{-1}, e_G) = \alpha_u(\tilde{x}(t, e_G)), \end{aligned}$$

teljesül.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, és $\tilde{M}$ az M Neumann-algebrának a G megszámlálható diszkrét csoporttal vett α-hatás szerinti kereszt-szorzata. Az α hatás pontosan akkor szabad, ha

$$\tilde{M} \cap \pi_\alpha(M)' = \pi_\alpha(Z(M)).$$

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ szeparábilis, σ-véges mértéktér, és T ennek egy automorfizmusa, vagyis

(1) ha $E \in \mathcal{B}$, akkor $T(E), T^{-1}(E) \in \mathcal{B}$ (T bimérhető),

(2) ha $E \in \mathcal{B}$, akkor $\mu(E) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mu(T^{-1}(E)) = 0$.

Legyen $M = L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ és α_T a T által indukált

$$\alpha_T : M \to M \quad f \mapsto \alpha_T(f) = f \circ T^{-1}$$

automorfizmus. Az α_T hatás pontosan akkor szabad, ha minden $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) > 0$ esetén létezik $F \in \mathcal{B}$, hogy $F \subseteq E$, $\mu(F) > 0$ és $F \cap T(F) = \emptyset$.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, és $\tilde{M}$ az M Neumann-algebrának a G megszámlálható diszkrét csoporttal vett α szabad hatás szerinti kereszt-szorzata. Ekkor minden $t \in G$ elemre

$$\alpha_t(Z(M)) = Z(M).$$

Legyen α_Z az α hatás megszorítása $Z(M)$-re. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) az $M \otimes_\alpha G$ Neumann-faktor,

(2) az α_Z ergodikus hatása G-nek $Z(M)$-en, vagyis

$$(Z(M))^{\alpha_Z} = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

Legyen θ automorfizmusa az M Neumann-faktornak, ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(1) a θ hatás szabad,

(2) a θ automorfizmus külső, vagyis nincs olyan $u \in U(M)$ elem, hogy minden $x \in M$ esetén

$$\theta(x) = uxu^*$$

teljesül.

Legyen (M, G, α) diszkrét dinamikai rendszer, azaz

(1) az $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, ahol $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér,
(2) a G megszámlálható, diszktrét csoport,
(3) α a G csoport hatása az M Neumann-algebrán.

Legyen $\tilde{M} := M \otimes_\alpha G$ és ϕ hű, normális, félig véges súly M-en, ekkor a

$$\tilde{\phi} : \tilde{M} \to \mathbb{C} \quad \tilde{x} \mapsto \phi(\tilde{x}(e_G, e_G))$$

funkcionál hű, normális, félig véges súly $\tilde{M}$-en.

Legyen $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra és ϕ hű, normális, félig véges súly M-en. Legyen M standard ϕ-hez képest (*M is standard with respect to ϕ*), vagyis a $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \eta_\phi)$ GNS-hármasra $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi$ és $\pi_\phi(x) = x$ teljesül minden $x \in M$ elemre. Ha $(x_i)_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat $\mathcal{N}$-ben, hogy

$$\sup_{i,I} \|x_i\| < \infty, \qquad \lim_{\substack{i,I \\ *\sigma\text{-erősen}}} x_i = x, \quad \lim_{i,I} \eta(x_i) = \xi,$$

akkor $x \in \mathcal{N}$ és $\xi = \eta(x)$.

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges súly M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Jelölje $\tilde{\mathcal{N}}$ az $\mathcal{N}_{\tilde{\phi}}$ alteret és $\tilde{M}$ az $M \otimes_\alpha G$ kereszt-szorzatot. Ekkor $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $s \in G$ elemre $\tilde{x}(s, e_G) \in \mathcal{N}$ és

$$\sum_{s \in G} \|\eta(\tilde{x}(s, e_G))\|^2 < \infty.$$

Legyen $\tilde{\mathcal{H}} := l^2(G, \mathcal{H})$ és

$$\tilde{\eta} : \tilde{\mathcal{N}} \to \tilde{\mathcal{H}} \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{\eta}(\tilde{x}) : \quad \forall s \in G : \ \tilde{\eta}(\tilde{x})(s) := \eta(\tilde{x}(s, e_G)).$$

Ekkor $(\tilde{\mathcal{H}}, \mathrm{Id}_{\tilde{M}}, \tilde{\eta})$ GNS-hármasa $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$-nek.

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Jelölje $\tilde{M}$ az $M \otimes_\alpha G$ kereszt-szorzatot és legyen τ egy hű, normális, félig véges nyom M-en. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Egyértelműen létezik egy H pozitív, önadjungált, M-be foglalt, invertálható operátor, hogy
$$\tau = \phi(H, .).$$
(2) A H operátor $Z(M)$-be foglalt.
(3) Az $\eta(\mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\tau)$ a lényeges magja $H^{\frac{1}{2}}$-nek.
(4) Ha $x, y \in \mathcal{N}_\eta \cap \mathcal{N}_\tau$, akkor
$$\tau(y^* x) = \langle H^{\frac{1}{2}} \eta(x), H^{\frac{1}{2}} \eta(y) \rangle.$$

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Minden $t \in G$ esetén legyen H_t az a $Z(M)$-be foglalt pozitív, önadjungált invertálható operátor, melyre $\phi \circ \alpha_t = \phi(H_t, .)$. Legyen $\tilde{x} \in \tilde{M}$, ekkor a következő teljesülnek.

(1) Az $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}}^*$ pontosan akkor teljesül, ha minden $t \in G$ esetén $\tilde{x}(t, e_G) \in \mathcal{N}_{\phi\circ\alpha_t}$ és

$$\sum_{t\in G} \|\eta_{\phi\circ\alpha_t}(\tilde{x}(t, e_G))\|^2 < \infty.$$

(2) Az $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{N}}^*$ ponotsan akkor teljesül, ha

$$\forall t \in G: \ \tilde{x}(t, e_G) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_{\phi\circ\alpha_t} \quad \text{és}$$
$$\sum_{t\in G} \Big(\|\eta(\tilde{x}(t, e_G))\|^2 + \|H_t^{\frac{1}{2}} \eta(\tilde{x}(t, e_G))\|^2 \Big) < \infty.$$

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Minden $t \in G$ esetén legyen H_t az a $Z(M)$-be foglalt pozitív, önadjungált invertálható operátor, melyre $\phi \circ \alpha_t = \phi(H_t, .)$. A $\Delta_{\tilde{\phi}}$ moduláris operátor ekkor

$$\Delta_{\tilde{\phi}} = \bigoplus_{t\in G} H_t :$$
$$\mathrm{Dom}(\Delta_{\tilde{\phi}}) = \left\{ \tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}} \ \middle| \ \forall t \in G: \ \tilde{\xi}(t) \in \mathrm{Dom}(H_t) \text{ és } \sum_{t\in G} \|H_t \tilde{\xi}(t)\|^2 < \infty \right\}$$

és minden $\tilde{\xi} \in \mathrm{Dom}(\Delta_{\tilde{\phi}})$ elemre minden $t \in G$ esetén

$$(\Delta_{\tilde{\phi}} \tilde{\xi})(t) = H_t \tilde{\xi}(t)$$

teljesül.

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Ekkor

$$\pi_\alpha(M) \subseteq \tilde{M}^{\tilde{\phi}}, \quad \text{és} \quad Z(\tilde{M}^{\tilde{\phi}}) \subseteq \pi_\alpha(Z(M)).$$

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Legyen $0 \neq e \in P(Z(M))$, $\tilde{e} := \pi(e)$, $K_e = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{M}_{\tilde{e}})$ és $\tilde{p}_e = p_{K_e}$.

(1) Legyen $\tilde{x} \in \tilde{M}$, az $\tilde{x} \in \tilde{M}_{\tilde{e}}$ pontosan akkor teljesül ha minden $s \in G$ elemre

$$\tilde{x}(s, e_G) = \alpha_{s^{-1}}(e) e \tilde{x}(s, e_G).$$

(2) Minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre
$$\sigma_t^{\tilde{\phi}}(\tilde{M}_{\tilde{e}}) = \tilde{M}_{\tilde{e}}.$$
(3) Az
$$\tilde{p}_e = \bigoplus_{s \in G} (\alpha_{s^{-1}}(e)e)$$
összefüggés teljesül.

Legyen (G, M, α) diszkrét dinamikai rendszer, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olyan félig véges Neumann-algebra és ϕ olyan hű, normális, félig véges nyom M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Legyen $0 \neq e \in P(Z(M))$ és $\tilde{\Delta} := \Delta_{\tilde{\phi}}$. Ekkor
$$\tilde{p}_e \tilde{\Delta} \subseteq \tilde{\Delta} \tilde{p}_{\tilde{e}}$$
és $\Delta_{\tilde{\phi}_{\tilde{e}}}$ azonosítható az $\oplus_{t \in G} H_t$ operátor K_e-re vett megszorításával.

Legyen α szabad, ergodikus hatása a G megszámlálható diszkrét csoportnak az M félig véges Neumann-algebrán. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ számra a következők ekvivalensek.

(1) Az $\lambda \in S(M \otimes_\alpha G)$ teljesül.
(2) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $0 \neq e \in P(M(Z))$ projekció, hogy
$$\exists t \in G,\ \exists 0 \neq f \in P(Z(M)) : \quad f \vee \alpha_t(f) \leq e, \text{ és } \mathrm{Sp}(H_t f|_{\mathrm{Ran}(f)}) \subseteq [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon].$$

Legyen M félig véges Neumann-faktor mely a τ hű, normális, félig véges nyom által van lényegében egyértelműen meghatározva. Legyen θ olyan automorfizmusa M-nek, hogy valamilyen $\lambda \in]0, 1[$ számra $\tau \circ \theta = \lambda \tau$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) A θ automorfizmus szabad.
(2) Legyen α a $\mathbb{Z}$ hatása M-en a $\alpha_n := \theta^n$ formulával definiálva. Ekkor $\tilde{M}$ egy III_λ típusú faktor.

Legyen G megszámlálható, diszkrét csoport és $\mathcal{H} = l^2(G)$, melynek $(\xi_t)_{t \in G}$ egy ortonormált bázisa $\xi_t(s) = \delta_{t,s}$. Minden $t \in G$ esetén legyen λ_t a baloldali hatás $(\lambda_t \xi)(s) = \xi(t^{-1}s)$. Ekkor
$$M = \{\lambda_t \mid t \in G\}''$$
a csoport Neumann-algebra, melynek jele $W^*(G)$. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) Ahhoz, hogy $W^*(G)$ Neumann-faktor legyen szükséges és elégséges feltétel az, hogy minden $e_G \neq t \in G$ esetén a
$$\{sts^{-1} \mid s \in G\}$$
konjugált osztály ne legyen véges.
(2) Ha a végtelen konjugáltosztály feltétel teljesül, akkor $W^*(G)$ II_1 típusú faktor, vagy $G = \{e_G\}$.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$, valamint

$$\bar{\mathcal{H}} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n.$$

Ha $\bar{x} \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{H}})$, akkor $\bar{x} = (\bar{x}(m,n))_{n,m\in\mathbb{N}}$ és $\bar{x}(m,n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ha $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, akkor legyen

$$\bar{M} := \{\bar{x} \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{H}}) \mid \forall m,n \in \mathbb{N}\ \bar{x}(m,n) \in M\}.$$

Ekkor $\bar{M}$ Neumann-algebra és az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha M II_1 típusú faktor, akkor $\bar{M}$ II_∞ típusú Neumann-faktor.

(2) Ha $\hat{M} \subseteq \mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}})$ II_∞ típusú Neumann-faktor, akkor létezik egy $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ II_1 típusú Neumann-faktor és egy $u : \bar{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}$ unitér operátor, hogy $u\bar{M}u^* = \hat{M}$.

Legyen $X_0 = \{1,2,\ldots,N\}$ véges halmaz és μ_0 valószínűségi mérték X_0-on. Legyen minden $j \in X_0$ esetén $p_j := \mu_0(\{j\})$, $X := X_0^{\mathbb{N}}$ és $\mathcal{F}$ a X feletti szorzat σ-algebra a $\mu = \otimes_{n\in\mathbb{N}}\mu_0$ szorzat mértékkel. Az X_0 minden σ permutációjára és minden $k \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$T_{\sigma,k} : X \to X \quad \omega \mapsto T_{\sigma,k}(\omega) : \quad (T_{\sigma,k}\omega)(m) = \begin{cases} \omega(m) \text{ ha } m \neq k \\ \sigma(\omega(k)) \text{ ha } m = k. \end{cases}$$

Legyen G a

$$\{T_{\sigma,k} \mid k \in \mathbb{N},\ \sigma \in C_N\}$$

halmaz által generált csoport, ahol C_N az X_0 ciklikus permutációinak a halmazát jelöli. Ekkor G szabadon és ergodikusan hat az $(X,\mathcal{F},\mu)$ mértéktéren. Legyen

$$r(G) := \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_0^+ \ \Big|\ \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \forall E \in \mathcal{F} :\ \mu(E) > 0 \ \Rightarrow\ \exists T \in G,\ \exists F \in \mathcal{F},$$
$$\forall\omega \in F :\ \mu(F) > 0,\ F \cup T(F) \subseteq E,\ \Big| \frac{d\mu \circ T}{d\mu}(\omega) - \lambda \Big| < \varepsilon\Big\}$$

a hányados halmaz (*ratio set*). Legyen $\Delta(G)$ a

$$\left\{\frac{p_i}{p_j} \ \Big|\ i,j \in X_0\right\}$$

halmaz által generált multiplikatív csoport a $\mathbb{R}_0^+$ halmazban. Ekkor $r(G)$ a $\Delta(G)$ halmaz lezártja.

Legyen $\lambda \in]0,1[$, $X_0 = \{1,2\}$ és

$$p(\{1\}) = \frac{1}{1+\lambda}, \quad p(\{2\}) = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Ekkor

$$r(G) = \{0\} \cup \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

teljesül.

Legyen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $X_0 = \{1, 2, 3\}$, valamint

$$p(\{1\}) = \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_2}, \quad p(\{2\}) = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_2}, \quad p(\{3\}) = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2}.$$

Ha $\frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_2} \notin \mathbb{Q}$, akkor $r(G) = [0, \infty]$.

Legyen τ hű, normális, félig véges nyom az M félig véges Neumann-algebrán. Legyen A egy maximális kommutatív Neumann-részalgebrája M-nek. Ha létezik

$$E : M \to A$$

egy normájú projekció, akkor $\tau|_{A_+}$ félig véges és $\tau \circ E = \tau$.

Legyen G megszámlálható csoport és $\beta : t \mapsto T_t$ szabad ergodikus hatása G-nek az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ szeparábilis σ-véges mértéktéren. Legyen $t \mapsto \alpha_t$ az indukált hatása G-nek az $M = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ Neumann-algebrán. Ekkor az $\tilde{M} = M \otimes_\alpha G$ Neumann-faktor és a következők teljesülnek.

(1) Az $\tilde{M}$ pontosan akkor III típusú Neumann-algebra, ha nem létezik olyan ν σ-véges, pozitív, μ-vel ekvivalens mérték, hogy minden $t \in G$ esetén $\nu \circ T_t = \nu$.

(2) Tegyük fel, hogy létezik ν σ-véges, pozitív, μ-vel ekvivalens G-invariáns mérték. Ekkor

(a) Az $\tilde{M}$ I típusú $\Leftrightarrow$ az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér tartalmaz atomot,

(b) Az $\tilde{M}$ II típusú $\Leftrightarrow$ az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér nem tartlamaz atomot,

(c) Az $\tilde{M}$ véges típusú faktor $\Leftrightarrow$ ν véges mérték.

Ha a G megszámlálható csoport ergodikusan hat az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ szeparábilis, σ-véges mértéktéren és ha a

$$G_0 := \{t \in G \mid \mu \circ t = \mu\} \neq G$$

csoport szintén ergodikusan hat az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ téren, akkor nincs olyan ν σ-véges, pozitív mérték X-en, mely G-invariáns és ekvivalens μ-vel.

Ha a G megszámlálható csoport ergodikusan és szabadon hat az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ szeparábilis, σ-véges mértéktéren, valamint α a G által indukált hatás az $M = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ téren és $\tilde{M} = M \otimes_\alpha G$ esetén $\tilde{M}$ Neumann-faktor, akkor

(1) az $\tilde{M}$ pontosan akkor III_0 típusú, ha $r(G) = \{0, 1\}$,

(2) az $\tilde{M}$ pontosan akkor III_λ típusú, ha $r(G) = \{0\} \cup \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(3) az $\tilde{M}$ pontosan akkor III_1 típusú, ha $r(G) = [0, \infty]$.

Legyen G megszámlálható csoport, mely ergodikusan és szabadon hat az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ szeparábilis, σ-véges mértéktéren. Ekkor a következő ekvivalensek.

(1) Létezik olyan ν σ-véges μ-vel ekvivalens mérték, melyre minden $t \in G$ esetén $\nu \circ t = \nu$ teljesül.
(2) Az $r(G) = \{1\}$ összefüggés teljesül.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, ϕ hű, normális, félig véges súly az M-en és β az $\mathbb{R}$-hatása a $\pi_\phi(M)$-en:

$$\beta : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}\big(\pi_\phi(M)\big) \quad t \mapsto \beta_t : \quad \forall x \in \pi_\phi(M) : \ \beta_t(x) = \Delta_\phi^{it} x \Delta_\phi^{-it}.$$

Ekkor a $(\pi_\phi(M), \mathbb{R}, \beta)$ unitér módon előállított (*unitarily implemented*) dinamikai rendszer, mely izomorf a $(M, \mathbb{R}, \sigma^\phi)$ dinamikai rendszerrel.

Minden (M, G, α) dinamikai rendszer izomorf egy unitér módon előállított dinamikai rendszerrel.

Legyen $\mathcal{H}$ szerparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoport, (M, G, α) folytonos dinamikai rendszer és

$$\lambda : G \to \mathcal{L}(L^2(G)) \quad t \mapsto \lambda_t : \quad (\lambda_t f)(s) = f(t^{-1}s)$$

a G csoport bal-reguláris ábrázolása $L^2(G)$-n valamint

$$\tilde{\lambda} : G \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}) \quad t \mapsto \lambda(t) : \quad (\lambda(t)\tilde{\xi})(s) = \tilde{\xi}(t^{-1}s)$$

a G csoport erősen folytonos ábrázolása a $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$ Hilbert-téren.

(1) Ekkor a

$$\pi_\alpha : M \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}) \quad x \mapsto \pi_\alpha(x) : \quad (\pi_\alpha(x)\tilde{\xi})(s) = \alpha_{s^{-1}}(x)\tilde{\xi}(s)$$

leképezés *-izomorfizmus.

(2) Minden $t \in G$ és $x \in M$ elemre

$$\pi(\alpha_t(x)) = \lambda(t)\pi(x)\lambda(t)^*$$

teljesül.

(3) Legyen $M \otimes_\alpha G := (\pi_\alpha(M) \cup \lambda(G))''$ a folytonos kereszt-szorzat, jele $\tilde{M}$, és legyen

$$\tilde{M}_0 := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_\alpha(x_i)\lambda(t_i) \ \middle| \ n \in \mathbb{N}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ x_i \in M, \ t_i \in G \right\}.$$

Ekkor $\tilde{M}_0$ önadjungált részalgebrája $\tilde{M}$-nek és $\tilde{M}_0$ sűrű $\tilde{M}$-ben σ-gyenge topologia szerint.

(4) Ha (M_1, G, α^1) és (M_2, G, α^2) a $\pi : M_1 \to M_2$ leképezés által izomorf dinamikai rendszerek, akkor létezik egy

$$\tilde{\pi} : M_1 \otimes_{\alpha^1} G \to M_2 \otimes \alpha^2 G$$

izomorfizmus, melyre minden $t \in G$ és $x \in M$ esetén

$$\tilde{\pi}(\pi_{\alpha^1}(x)) = \pi_{\alpha^2}(\pi(x)) \quad \text{és} \quad \tilde{\pi}(\lambda_\alpha(t)) = \lambda_\beta(t)$$

teljesül.

Legyen $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, ahol $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér és (M, G, α) az

$$u : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad t \mapsto u_t$$

unitér ábrázolással előállított folytonos dinamikai rendszer. Minden $s \in G$ és $\tilde{\xi} \in L^2(G, \mathcal{H}) = \tilde{\mathcal{H}}$ esetén az

$$(w\tilde{\xi})(s) := u_s \tilde{\xi}(s)$$

formula egy w unitér operátort definiál $\tilde{\mathcal{H}}$-n, melyre

$$w\pi_\alpha w^* = x \otimes 1 \quad \text{és} \quad w\lambda(s)w^* = u_s \otimes \lambda_s$$

teljesül, ahol $\tilde{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ térrel volt azonosítva.

Legyen G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő kommutatív topologikus csoport, Γ topologikus duális csoporttal. Minden $\gamma \in \Gamma$ esetén jelölje ν_γ a

$$(\nu_\gamma \xi)(t) := \langle t, \gamma \rangle^{-1} \xi(t)$$

unitér operátort $L^2(G)$ téren. Ekkor $\gamma \mapsto \nu_\gamma$ erősen folytonos unitér ábrázolása Γ-nak az $L^2(G)$-téren. Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra, (M, G, α) folytonos dinamikai rendszer és $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ és $t \in G$ esetén

$$\nu(\gamma)\lambda(t)\nu(\gamma)^* = \langle t, \gamma \rangle^{-1} \lambda(t), \quad \text{és} \quad \{\nu(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq \pi_\alpha(M)'$$

teljesül. Továbbá létezik egy $\tilde{\alpha}$ hatása Γ-nak az $\tilde{M}$ Neumann-algebrán melyre minden $\tilde{x} \in \tilde{M}$ esetén

$$\tilde{\alpha}_\gamma(\tilde{x}) = \nu(\gamma)\tilde{x}\nu(\gamma)^*$$

teljesül.

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő kommutatív topologikus csoport, Γ topologikus duális csoporttal, (M_1, G, α^1) és (M_2, G, α^2) a $\pi : M_1 \to M_2$ leképezés által izomorf folytonos dinamikai rendszerek és $\tilde{\pi} : \tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$ a π-ből származtatott izomorfizmus. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ elemre

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{\alpha}^1_\gamma = \tilde{\alpha}^2_\gamma \circ \tilde{\pi}$$

teljesül, vagyis

$$(M_1 \otimes_{\alpha^1} G) \otimes_{\tilde{\alpha}^1} \Gamma \cong (M_2 \otimes_{\alpha^2} G) \otimes_{\tilde{\alpha}^2} \Gamma.$$

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő kommutatív topologikus csoport, Γ topologikus duális csoporttal, (M, G, α) folytonos dinamikai rendszer. Felhasználva az

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes L^2(G) \cong L^2(G, \mathcal{H}), \tag{1}$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{H}}} = \tilde{\mathcal{H}} \otimes L^2(\Gamma) \cong \mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(\Gamma) \cong L^2(G \times \Gamma, \mathcal{H}), \tag{2}$$

$$\tilde{M} = M \otimes_\alpha G \subseteq \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}), \tag{3}$$

$$\tilde{\tilde{M}} = \tilde{M} \otimes_{\tilde{\alpha}} \Gamma \subseteq \mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}) \tag{4}$$

izomorfizmusokat és azonosításokat

$$\tilde{\tilde{M}} \cong M \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$$

teljesül.

Legyen M teljesen végtelen (*properly infinite*) Neumann-algebra és $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, ekkor

$$M \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong M$$

teljesül.

Legyen α hatása a G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, kommutatív topologikus csoportnak az M teljesen végtelen Neumann-algebrán. Jelölje $\tilde{\alpha}$ a duális hatást, vagyis a Γ duális topologikus csoport hatását az $\tilde{M}$ folytonos kereszt-szorzaton. Legyen

$$\tilde{\tilde{M}} := (M \otimes_\alpha G) \otimes_{\tilde{\alpha}} \Gamma,$$

ekkor

$$M \cong \tilde{\tilde{M}}$$

teljesül.

Ha a G lokálisan kompakt csoportnak α és β két külső ekvivalens hatása az $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebrán, ahol $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, akkor

$$M \otimes_\alpha G \cong M \otimes_\beta G$$

teljesül.

Az $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebrán, ahol $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér legyen ϕ és ψ két hű, normális és félig véges súly. Ekkor

$$M \otimes_{\sigma^\phi} \mathbb{R} \cong M \otimes_{\sigma^\psi} \mathbb{R}$$

teljesül.

Legyen $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-téren és ϕ olyan hű, normális, félig véges súly M-en, hogy M standard ϕ-hez képest. Legyen α olyan hatása a G lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, kommutatív topologikus csoprotnak, hogy minden $t \in G$ esetén

$$\phi \circ \alpha_t = \phi$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $\tilde{\phi}$ hű, normális, félig véges súly az $\tilde{M}$ folytonos keresztszorzaton, hogy a $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$ Hilbert-tér azonosítható a $\mathcal{H}_{\tilde{\phi}}$-térrel oly módon, hogy

(1) a $\pi_{\tilde{\phi}} = \mathrm{Id}_{\tilde{M}}$ összefüggés érvényes,

(2) a

$$\mathrm{Dom}(\Delta_{\tilde{\phi}}^{\frac{1}{2}}) = \left\{ \tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}} \;\middle|\; \forall t \in G: \ \tilde{\xi}(t) \in \mathrm{Dom}(\Delta_{\phi}^{\frac{1}{2}}), \ \int_G \|\Delta_\phi^{\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(t)\|^2 \, dt < \infty \right\}$$

teljesül és minden $\tilde{\xi} \in \mathrm{Dom}(\Delta_{\tilde{\phi}}^{\frac{1}{2}})$ vektorra és $t \in G$ csoportelemre

$$(\Delta_{\tilde{\phi}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\xi})(t) = \Delta_\phi^{\frac{1}{2}} \tilde{\xi}(t),$$

(3) a $\tilde{\phi}$ duális súly invariáns az $\tilde{\alpha}$ duális hatással szemben, vagyis minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\tilde{M}$-en teljesül az

$$\tilde{\phi} \circ \tilde{\alpha}_\gamma = \tilde{\phi}$$

összefüggés.

Legyen M teljesen végtelen Neumann-algebra, ekkor létezik N teljesen végtelen, félig véges Neumann-algebra és az $\mathbb{R}$ csoportnak olyan θ hatása az N algebrán, hogy

$$M \cong N \otimes_\theta \mathbb{R}$$

teljesül. Létezik olyan τ hű, normális, félig véges nyom N-en, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$\tau \circ \theta_t = e^{-t}\tau.$$

Továbbá ha M Neumann-faktor, pontosan akkor III_1 típusú, ha N II_∞ típusú Neumann-faktor.

Ha M III_λ típusú Neumann-faktor, ahol $0 < \lambda < 1$, akkor létezik N II_∞ típusú Neumann-faktor és α_1 automorfizmusa N-nek, hogy

$$\tau \circ \alpha_1 = \lambda\tau,$$

ahol τ a lényegében egyértelmű hű, normális, hű, félig véges nyom N-en, és az $\alpha_n := \alpha_1^n$ definícióval élve

$$M \cong N \otimes_\alpha \mathbb{Z}$$

teljesül.