1. Elsőrendű differenciálegyenletek

I. Keressük meg azokat az $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvényeket melyek megoldásai a következő szétválasztható, illetve szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenleteknek.

1. $y'(x) = \dfrac{x^2 \cos^2 y(x)}{\sin y(x)}$
2. $y'(x) = \dfrac{y(x)(y^2(x)+1)}{x}$
3. $y'(x) = \dfrac{1-x-y(x)}{2x+2y(x)-3}$
4. $y'(x) = \dfrac{3x^2+4x+2}{2y(x)-2}$
5. $y'(x) = \left(\dfrac{x+y(x)+2}{x+2}\right)^2$
6. $y'(x) = (y(x)-4x)^2$

II. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket a Taylor-sorfejtés segítségével, ahol $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a keresett függvény és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. $y'(x) = x^2 + y(x)$
2. $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$
3. $y'(x) = \dfrac{2x-y(x)}{1-x}$
4. $y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$

III. Szukcesszív approximációval oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatokat.

1. $y'(x) = xy(x), \quad y(0) = 1$
2. $y'(x) = x^2 + y^2(x), \quad y(0) = 1$

IV. Oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) + 3y(x) = x + e^{-2x}$
2. $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$
3. $xy'(x) + 2y(x) = \sin x$

V. Néhány fizikai alkalmazás.

1. Írjuk le homogén gravitációs erőtérben egy m tömegű test sebességének változását az idő függvényében, ha a gravitációs gyorsulás g és a közegellenállási erő kv^2, ahol v a test pillanatnyi sebessége, valamint a test sebessége a $t = 0$ időpontban v_0.

2. Egy kúp alakú tölcsérben víz van, mely a tölcsér alján lévő lyukon keresztül folyik ki a g gravitációs gyorsulás hatására. A kúp keresztmetszete h magasságban ah sugarú kör, és a kúp alján lévő lyuk keresztmetszete A. Írjuk le hogyan változik a vízszint magassága a kúpban, ha a víz viszkozitásától és belső surlódásaitól eltekintünk, valamint a $t = 0$ időpontban a víz magassága h_0.

3. Tegyük fel, hogy egy nyúl fut állandó v sebességgel a $(0, 1)$ irányba. Egy róka üldözi a nyulat állandó u sebességgel, és a róka mindig a nyúl irányába fut. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpillanatban a nyúl az origóban, a róka pedig az $(x_0, 0)$ pontban van ($x_0 \leq 0$). Írjuk fel a róka pályájának $y(x)$ függvényét.