3. Egzakt differenciálegyenletek

I. Oldjuk meg az egzakt differenciálegyenleteket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter.

1. $2x^3 - xy^2(x) + (2y^3(x) - x^2y(x))y'(x) = 0,\ y(1) = 1$
2. $2xy(x) + (b + x^2)y'(x) = 0,\ y(0) = a$
3. $y'(x) = \dfrac{\sin y(x) + y(x)\sin x}{\cos x - x\cos y(x)}, y(0) = 1$
4. $y(x)(y(x) - 2x) - x(x - 2y(x))y'(x) = 0,\ y(1) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

II. Keressünk megfelelő multiplikátort, hogy egzakttá tegyük az alábbi differenciálegyenleteket, és oldjuk meg azokat.

1. $xy(x) + x^2 + 1 + x^2y'(x) = 0,\ y(1) = -\dfrac{1}{2}$
2. $x^5y^4(x) + x^7y^3(x)y'(x) = 0,\ y(1) = 2\,\mathrm{e}$
3. $y'(x)(y(x)e^x - 1) + y(x) = 0,\ y(0) = 2$

III. Oldjuk meg az inverz függvényre felírt differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x + y(x)^2},\ y(1) = 1$
2. $y'(x) = \dfrac{y(x)^2}{y(x)^2 + 2xy(x) - x},\ y(1) = 1$

IV. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletrendszereket.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - e^{2t} \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - \cos t \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin t \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + t \end{cases}$