4. Laplace-transzformáció

Vezessük be az alábbi jelölést, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter

$$C_{\mathrm{L}}(a) = \left\{ f : [0,\infty] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ szakaszonként folytonos minden véges inter-} \\ \text{vallumon és } \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \le M\,\mathrm{e}^{ax} \end{array} \right\}.$$

Az $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvény *Laplace-transzformáltja*

$$\mathcal{L}(f) :]a,\infty[\to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}\,x.$$

Egy $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén jelölje a^+ az a pozitív részét, azaz $a^+ = 0$ ha $a \le 0$, valamint $a^+ = a$ ha $a > 0$. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények a megadott függvényosztályba tartoznak, valamint teljesülnek a Laplace-transzformáltjukra vonatkozó egyenlőségek. A függvényeknél $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ paraméterek.

1. $f(x) = x^n$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(0)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
2. $f(x) = \cos(ax)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(0)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}$
3. $f(x) = \sin(ax)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(0)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2+a^2}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p-a}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
7. $f(x) = \mathrm{sh}(ax)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(|a|)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2-a^2}$
8. $f(x) = \mathrm{ch}(ax)$ $\quad f \in C_{\mathrm{L}}(|a|)$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2-a^2}$

II. Az f és g függvények konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

képlettel értelmezük, amikor az integrál létezik. Ha valamilyen $f, g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvények konvolúciójára $f * g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ teljesül valamilyen $a \in \mathbb{R}^+$ paraméterrel akkor miden $p > a$ esetén

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p).$$

Ennek segítségével igazoljuk, hogy az alábbi Laplace-transzformáltak a megadott függvényekhez tartoznak. A feladatokban $a > 0$ paraméter.

1. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p^3+ap}$ $\quad f(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{a}x)}{a}$
2. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p^3+ap^2}$ $\quad f(x) = \dfrac{ax-1+\mathrm{e}^{-ax}}{a^2}$
3. $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{(p-a)^2}$ $\quad f(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$

III. Legyen $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ n-szer folytonosan differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

teljesül.

IV. Az alábbi differenciálegyenletek oldjuk meg Laplace-transzformációval, ahol $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ folytonosan differenciáható függvény és $A, B, C \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. Tekintsük az $y'' + 2y' + 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$ és $y'(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p+1)^2+1} + A\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + (A+B)\frac{1}{(p+1)^2+1},$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \left(f * \frac{\sin}{\exp}\right)(x) + A\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + (A+B)\,\mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

2. Tekintsük az $y''' - 2y'' + y' - 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$, $y'(0) = B$ és $y''(0) = C$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(p) = \quad & \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p-2)(p^2+1)} + \frac{1}{p-2} \cdot \frac{p^2}{p^2+1} + \\ & +(B-2A)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + (A-2B+C)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p^2+1},\end{aligned}$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \big(f * (\exp)^2 * \sin\big)(x) + A\,\mathrm{e}^{2x} - A\big((\exp)^2 * \sin\big)(x) + \\ & +(B-2A)\big((\exp)^2 * \cos\big)(x) + (A-2B+C)\big((\exp)^2 * \sin\big)(x),\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \Big(\frac{(\exp)^2 - 2\sin - \cos}{5} * f\Big)(x) + \\ & +\frac{A+C}{5}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{-2A+5B-2C}{5}\sin x + \frac{4A-C}{5}\cos x.\end{aligned}$$

3. Tekintsük az

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - \cos t \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin t$$

egyenletrendszert az $x_1(0) = A$ és $x_2(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor a keresett függvények Laplace-transzformáltjai

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1)(p) &= -\frac{1}{p^2+1} + 2\frac{1}{(p^2+1)^2} + A\frac{p}{p^2+1} + B\frac{1}{p^2+1} \\ \mathcal{L}(x_2)(p) &= 2\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} + B\frac{p}{p^2+1} - A\frac{1}{p^2+1}\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A\cos t + B\sin t - t\cos t \\ x_2(t) &= B\cos t - A\sin t + t\sin t.\end{aligned}$$