5. Elemi komplex függvények

I. Elemi számítások.

1. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket.

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \quad (1+2\,\mathrm{i})^{3+4\,\mathrm{i}} \quad \ln \mathrm{i}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$\sin z = 2 \quad \cos z = 3\,\mathrm{i} \quad \operatorname{ch} z = -1 \quad i^z = 1+2\,\mathrm{i}$$

3. Az Euler-formula segítségével igazoljuk az alábbi egyenlőségeket minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ elemre.

$$1.\quad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{\cos(n+1)x - 1}{\cos x - 1} - \frac{\sin(n+1)x}{2}$$

$$2.\quad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{1-\cos(n+1)x}{2} - \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\cos x - 1}$$

$$3.\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x} \cos\sin x$$

$$4.\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x} \sin\sin x$$

$$5.\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)!} = (\sin\cos x)(\operatorname{ch}\sin x)$$

$$6.\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)!} = (\cos\cos x)(\operatorname{sh}\sin x)$$

II. Komplex sorozatok, sorok és határértékek.

1. Vizsgáljuk a következő komplex sorozatok és sorok konvergenciáját, ahol lehet számoljuk ki a határértéket valamint a sorösszeget.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{i+1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+in)^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

2. Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2 e^z}{\overline{z}} \quad \lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} \quad \lim_{z\to i} \frac{1}{1+z^2}$$

III. Nézzük meg, hogy a következő komplex függvények differenciálhatók-e, ahol $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenciálható függvény.

$$g(x+y\,\mathrm{i}) = x^2 + \mathrm{i}\,y^2 \quad g(z) = \overline{z} \quad g(z) = \operatorname{Re} z$$

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad g(x+y\,\mathrm{i}) = |x^2-y^2| + 2\,\mathrm{i}\,|xy| \quad g(z) = \exp(z)$$

$$g(z) = \sin(z) \quad g(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/z^2} & \text{ha} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad z = 0 \end{cases} \quad g(z) = z^3$$

IV. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{C}$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi $u(x, y)$ függvény egy reguláris komplex függvény valós része legyen, valamint határozzuk meg a hozzá tartozó reguláris függvényt is.

1. $u(x, y) = ax^2 + 2xy - 4y^2 + 3$
2. $u(x, y) = ax^3 + 36xy^2 + xy$
3. $u(x, y) = -x^3 + axy^2 - y$