

## 6. Komplex vonalintegrál

I. Számoljuk ki az  $f$  függvény  $\gamma$  görbe menti integrálját.

1.  $f(z) = \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z)$      $\gamma(t) = t + i t^2$      $t \in [0, 2]$
2.  $f(z) = e^{i \bar{z}}$      $\gamma(t) = \cos(\pi t) + i \sin(\pi t)$      $t \in [0, 1]$
3.  $f(z) = z e^{z^2}$      $\gamma(t) = 2t + (2 + 2t)i$      $t \in [1, 5]$
4.  $f(z) = z \sin z \cos z$      $\gamma(t) = 2 \cos(\pi t) + i \sin(\pi t)$      $t \in [1, 0]$

II. Tekintsük a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} -3 - 2i + 24t & \text{ha } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 3 - 2i + 4(4t - 1)i & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 3 + 2i - 12(2t - 1) & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ -3 + 2i - 4(4t - 3)i & \text{ha } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Határozzuk meg a görbe indexfüggvényének az értékét az  $1 + i$  pontban.

$$\left( \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi \right)$$

III. Számoljuk ki az adott  $f$  függvény és  $\gamma$  görbe mellett a  $\int_\gamma f$  vonalmenti integrálokat.

1.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$      $\gamma$  : az origó körüli 2 egység sugarú kör
2.  $f(z) = \frac{\exp z}{z - 1}$      $\gamma$  : az 1 körüli  $\pi$  egység sugarú kör
3.  $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^6}$      $\gamma$  : az origó körüli 2 egység sugarú kör
4.  $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^5}$      $\gamma$  : az origó körüli 3 egység sugarú kör
5.  $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3}$      $\gamma$  : az origó körüli 1 egység sugarú kör

(A feladatok megoldásánál használjuk fel, hogy  $\gamma(t) = R \exp(2\pi i t)$  ( $t \in [0, 1]$ ,  $R \in \mathbb{R}^+$ ) és  $f(z) = z^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) esetén

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 2\pi i & \text{ha } n = -1, \\ 0 & \text{ha } n \neq -1 \end{cases}$$

teljesül.)

IV. Legyen  $0 < r < R$  pozitív valós szám,  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  és tekintsük a

$$\gamma_{r,R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R - r) & \text{ha } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ R e^{i\pi(4t-1)/2} & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ i(R + (4t - 2)(r - R)) & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ r e^{2\pi i(1-t)} & \text{ha } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{Im} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r,R}} f \right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} = 0$$

teljesül!