

## 7. Integrálformulák

I. Minden  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex számra és  $R \in \mathbb{R}^+$  paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0, R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto z_0 + R e^{2\pi t i}.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

$$\begin{array}{lll} 1. \oint_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^{i z^2}}{z^2 + 9} dz & 2. \oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z \cos z^2 dz & 3. \oint_{\gamma_{2i,3}} \frac{\sin i z}{(z-1)(z^2+4)} dz \\ 4. \oint_{\gamma_{0,4}} \frac{z^2+3}{z(z-2)^3} dz & 5. \oint_{\gamma_{1,3}} \frac{e^{\pi z}-1}{(z-i)z} dz & 6. \oint_{\gamma_{-1,3}} \frac{\sin z}{z(z-i)^2} dz \end{array}$$

(Útmutatás: Használjuk fel, hogy ha  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olyan differenciálható függvény, melyre  $\text{Dom } f$  konvex és  $\text{Ran } \gamma_{z_0, R} \subseteq \text{Dom } f$ , akkor minden  $n \in \mathbb{N}$  számra és  $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma_{z_0, R}$  paraméterre

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, R}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \begin{cases} f^{(n)}(w) & \text{ha } |w - z_0| < R, \\ 0 & \text{ha } |w - z_0| > R \end{cases}$$

teljesül. )

II. Számoljuk ki a következő körintegrálokat, ahol csak a  $\gamma$  szakszonként folytonosan differenciálható görbe képét adtuk meg, azzal a konvencióval, hogy a  $\gamma$  görbe egyszer kerüli meg a 0 pontot pozitív irányítással.

$$\begin{array}{lll} 1. \oint_{|z-1|+|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-5i)^3} dz & 2. \oint_{|\text{Re } z|+|\text{Im } z|=1} \frac{\cos z}{4z-3-3i} dz & 3. \oint_{\max\{|\text{Re } z|, |\text{Im } z|\}=1} \frac{\cos z}{4z-3-3i} dz \end{array}$$

III. Cauchy integrálformula következményei.

1. Igazoljuk az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p \cos x + p^2} dx = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

egyenlőséget, ahol  $p \in ]0, 1[$ .

(Útmutatás: A  $z = e^{x i}$  helyettesítéssel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)

2. Igazoljuk, hogy minden  $a \in \mathbb{R}^+$  számra

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx &= \frac{3\pi}{8a^5} \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx &= \frac{\pi e^{-a}}{2a} \end{aligned}$$

teljesül.

(Útmutatás: Mindkét esetben legyen  $R \in ]a, \infty[$  és integráljunk a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} -R + 4tR & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ R e^{\pi(2t-1)i} & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az  $R \rightarrow \infty$  határértéket.)

3. Igazoljuk, hogy minden  $a, b \in \mathbb{R}^+$  paraméterre

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

teljesül.

(Útmutatás: Legyen  $r \in ]0, \min(a, b)[$ ,  $R \in ]\max(a, b), \infty[$ , és az

$$f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$$

függvényt integráljuk a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R - r) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{4}[, \\ R e^{\pi(4t-1)i} & \text{ha } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[, \\ -R + (4t - 2)(R - r) & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[, \\ r e^{4\pi(1-t)i} & \text{ha } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az  $R \rightarrow \infty$  és  $r \rightarrow 0$  határértékeket!

4. Legyen  $p \in ]0, 1[$ , bizonyítsuk be az

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

egyenlőséget.

(Útmutatás: Legyen  $R \in ]p, \infty[$  és integráljuk az

$$f(z) = \frac{e^{pz}}{1 + e^z}$$

függvényt a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} -R + 8tR & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{4}[, \\ R + (4t - 1)2\pi i & \text{ha } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[, \\ R - 2R(4t - 2) + 2\pi i & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[, \\ -R + (1 - t)8\pi i & \text{ha } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az  $R \rightarrow \infty$  határértéket!