11. Felületi integrál

I. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Ahol $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és A egy 3×3-as mátrix.)

1. $\operatorname{rot}(a \times r) = 2a$
2. $\operatorname{rot}(r^2 \cdot r) = 0$
3. $\operatorname{rot}((ar) \cdot r) = a \times r$
4. $\operatorname{rot}(Ar) = 0 \quad \Leftrightarrow A$ szimmetrikus
5. $\operatorname{rot}(a|r|) = \dfrac{r \times a}{|r|}$
6. $\operatorname{rot}(r^2 \cdot a) = 2r \times a$
7. $\operatorname{rot}(fg) = f \operatorname{rot} g + \operatorname{grad} f \times g$

II. Igazoljuk a

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0 \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$$

azonosságokat!

III. Számoljuk ki az $\iint\limits_F v$ felületi integrált.

1. Legyen $v(r) = |r|^3\big(r \times (0,0,1)\big)$ és F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része, valamint a felület n normálvektorára $n(0,0,1) \geq 0$ teljesüljön.
2. Legyen $v(x,y,z) = (x, 3x, -2z)$ és F az $(1,2,3)$ csúcspontú, a $z = 1$ síkban a $(x-2)^2+(y-1)^2 = 4$ vezérgörbéjű kúppalástnak a csúcspont és a vezérgörbe közötti része, $n(0,0,1) \geq 0$ irányítással.
3. Legyen $v(x,y,z) = (x,y,z)$ és F az

$$r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos v(3+\cos u), \sin v(3+\cos u), \sin u)$$

egyenletű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé mutat).