12. Integráltételek

I. Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1. Csavarfelület, melynek paraméterezése

$$P : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v).$$

2. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \leq a$ és a paraméterezés

$$P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b \cos \varphi) \cos \vartheta, (a + b \cos \varphi) \sin \vartheta, b \sin \varphi).$$

II. Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1. Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése

$$P : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

2. Legyen $v(x, y, z) = \left(\frac{1}{xz}, \frac{1}{yz}, \frac{1}{xy}\right)$ és F az a felület, melynek paraméterezése

$$P : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos^3 u \cos v, \cos^3 u \sin v, \sin^3 u).$$

3. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része.
4. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része.

III. Legyen F egy sima felület, mely egy egyszeresen összefüggő V térfogatú tartomány határa, legyen $a \in \mathbb{R}^3$ adott vektor és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Igazoljuk a következőket.

1. $\displaystyle\iint_F r \, \mathrm{d}F = 3V$
2. $\displaystyle\iint_F a \, \mathrm{d}F = 0$
3. $\displaystyle\iint_F c \, \mathrm{d}F = 0$

IV. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Igazoljuk, hogy ha

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad r \mapsto \frac{\ln |r|}{|r|^2} r$$

$$\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0),$$

akkor $\displaystyle\oint_\gamma v = 0$ teljesül.

2. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az n normálisvektorára teljesüljön az $\langle n, (0,0,1) \rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$

Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F \operatorname{rot} v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.

3. Számoljuk ki a

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$

vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.

4. Legyen

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x, y, -2z)$$

és F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n, (0,1,0) \rangle \geq 0$ irányítással, ahol n felület normálvektora. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.