13. Green-tételek

I. Potenciálos terek.

1. Tegyük fel, hogy a
$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto x^3 + xy^2 + z$$
potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen $v(r)$ hely-erő vektormező származtatható a potenciálból?
2. Határozzuk meg a
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (2yz + x^2, 2xz + y^2, 2xy + z^2)$$
vektormező potenciálját! Számítsuk ki a vektormező vonalmenti integrálját tetszőleges görbe mentén a $(2, 1, 3)$ és a $(-1, 3, -2)$ pontok között!
3. Az alábbi $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezők származtathatók-e egy potenciálos térből az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

   1. $v(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \qquad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x, y, z > 0\}$
   2. $v(r) = \frac{r}{|r|^2} \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
   3. $v(x, y, z) = (y, x, 0) \qquad V = \mathbb{R}^3$
   4. $v(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}, 0\right) \qquad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \neq 0\}$
   5. $v(x, y, z) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}, 0\right) \qquad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x < y\}$
   6. $v(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \qquad V = \mathbb{R}^3$
   7. $v(x, y, z) = \left(\frac{\operatorname{ch} z^2}{x}, \frac{\operatorname{ch} z^2}{y}, 2z \ln(xy) \cdot \operatorname{sh} z^2\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
   8. $v(x, y, z) = \big(2x\,\mathrm{e}^{yz} - z\sin(xz), zx^2\,\mathrm{e}^{yz} + y, yx^2\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(xz)\big) \qquad V = \mathbb{R}^3$

II. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ reguláris határú nyílt halmaz, és $u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ olyan, hogy $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ha a $\operatorname{div} f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény μ_Ω integrálható, akkor az $\langle u, n_{\partial\Omega}\rangle : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$ integrálható és
$$\iiint_\Omega \operatorname{div} v \ \mathrm{d}\,\mu_\Omega = \iint_{\partial\Omega} \langle u, n_{\partial\Omega}\rangle \ \mathrm{d}\,\mu_{\partial\Omega}$$
teljesül, melyet Gauss-Osztrogradszkij tételnek nevezünk.
Számoljuk ki a Gauss-Osztrogradszkij tétel jobb illetve bal oldalán álló mennyiségeket abban az esetben amikor Ω az origó középpontú R sugarú gömb belseje és $v(r) = r \cdot \|r\|^n$, ahol $n \in \,]-2, \infty[$, illetve külön vizsgáljuk meg az $n = -3$ esetet.

III. Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, reguláris határú halmaz és $u_1, u_2 \in C^2(V, \mathbb{R})$. Ekkor

$$\iiint\limits_V u_1 \Delta u_2 + \langle \operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2 \rangle \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

$$\iiint\limits_V u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 - u_2 \operatorname{grad} u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

teljesül, melyet aszimmetrikus- illetve szimmetrikus Green-formulának nevezünk.
Számoljuk ki a Green-formulák jobb illetve bal oldalán álló mennyiségeket az alábbi esetekben.

1. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \|r\|^2$ és $u_2(r) = \ln \|r\|$.
2. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \langle a, r \rangle^2$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$, és $u_2(r) = \ln \|r\|$.