

1. Halmazalgebra, teljes indukció

I^A . Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

II^{Gy} . Legyen A, B és C halmaz. Az alább definiálandó X és Y halmazra teljesül-e az $X \subseteq Y$ vagy az $Y \subseteq X$ tartalmazás?

1. $X = (A \cap B) \setminus C, Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
2. $X = A \setminus C, Y = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
3. $X = A \setminus (B \setminus C), Y = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

III^A . Bizonyítsuk a halmazrendszerekre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)$
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)$
3. $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i)$
4. $A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i)$

IV^A . Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
5. $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
6. $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
8. Legyen $a_1, d \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlettel megadott számtani sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

teljesül.

9. Legyen $a_1, q \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képlettel megadott mértani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & \text{ha } q \neq 1; \\ na_1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

V^A . Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

2. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$

3. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós szám, ahol $n \neq 0$. Igazoljuk a harmonikus, mértani és számtani közép közötti

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_k \leq n \left(\sum_{k=1}^n a_k^{-1} \right)^{-1} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_k$$

egyenlőtlenséget.

4. Minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$.

VI^A . Binomiális kifejtés.

1. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, ahol $k < n$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számra és n természetes számra

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számra és n természetes számra

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} a^k b^l c^{n-k-l}.$$