

2. Relációk, függvények

I^A . Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
4. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times (B \setminus D)) \cup ((A \setminus C) \times (B \cap D)) \cup (C \times D)$

II^{Gy} . Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció. Bizonyítsuk be a következőket.

1. Az R pontosan akkor reflexív, ha $\text{id}_X \subseteq R$.
2. Az R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.
3. Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\bar{R} = R$.
4. Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \bar{R} \subseteq \text{id}_X$.
5. Pontosán akkor teljesül, hogy $R^{-1} \circ R = \emptyset$, ha $R = \emptyset$.

III^A . Az alábbi relációk közül melyik reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, szimmetrikus, rendezés, illetve ekvivalenciareláció? Az ekvivalenciarelációknál adjuk meg az ekvivalenciaosztályokat és a faktorhalmazokat.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$
3. $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \exists c \in \mathbb{R}((x_1 - x_2 = 2c) \wedge (y_1 - y_2 = 3c))\}$

IV^{Gy} . Bizonyítsuk be az alábbiakat.

1. Ha A halmaz és $\{x, y\} \in A$, akkor $x, y \in \cup A$.
2. Ha A halmaz és $(x, y) \in A$, akkor $x, y \in \cup \cup A$.
3. Ha f függvény, akkor $\text{Ran } f, \text{Dom } f \in \mathcal{P}(\cup \cup f)$.
4. Ha $f : A \rightarrow B$ függvény, akkor $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$.

V^A . Legyen f függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor injektív, ha $\bar{f}$ függvény.

VI^{Gy} . Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Mutassuk meg a Descartes-szorzat definíciója alapján, hogy

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

nem minden esetben teljesül.

VII^A . Mutassuk meg, hogy a reláció kompozíciója asszociatív művelet. Vagyis minden $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$ és $R_3 \subseteq Z \times V$ relációra

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

teljesül.

VIII^H . Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden függvénynek létezik jobbinverze. Azaz minden f függvényhez létezik olyan $g : \text{Ran } f \rightarrow \text{Dom } f$ függvény, hogy $f \circ g = \text{id}_{\text{Ran } f}$.

IX^H . Legyen $(A_i)_I$ olyan halmazrendszer, melynek minden A_i halmaza egyelemű. Vagyis

$$\forall i \in I ((\exists x(x \in A_i)) \wedge (\forall x, y ((x \in A_i \wedge y \in A_i) \rightarrow x = y))).$$

A kiválasztási axiómára való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

X^{Gv} . Mutassuk meg, hogy egy háromelemű halmazon

1. a relációk száma 512;
2. a reflexív relációk száma 64;
3. a szimmetrikus relációk száma 64;
4. az antiszimmetrikus relációk száma 216;
5. a tranzitív relációk száma 171;
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma 8;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma 27;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma 29;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 8;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma 15;
11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 152;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma 5;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 19;
15. a szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 8;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

XI^H . Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmazon

1. a relációk száma $2^{\binom{n}{2}}$;
2. a reflexív relációk száma $2^{n(n-1)}$;
3. a szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
4. az antiszimmetrikus relációk száma $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
5. a reflexív és szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
6. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
7. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 2^n ;
8. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
9. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma E_n , ahol az E_n sorozatot a $E_0 = 1$, $E_1 = 1$ kezdeti értékekkel és $n \geq 2$ esetén a

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} E_k$$

rekurzióval definiálhatjuk;

10. a szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 2^n ;
11. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.