

3. Halmazrendszerek és függvények

I^A . Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, valamint tekintsük az alábbi relációkat.

$$F = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\} \subseteq A \times B, \quad G = \{(a, \beta), (c, \gamma), (b, \alpha)\} \subseteq B \times C$$

1. Határozzuk meg az $\bar{F}^{-1}$, $\bar{G}^{-1}$, $G \circ F$, $(G \circ F)^{-1}$, $\bar{F}^{-1} \circ \bar{G}^{-1}$ relációkat.
2. Melyik reláció függvény a fentiek közül?

II^A . Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_n halmaz.

1. Mutassuk meg, hogy a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek legfeljebb véges számú kivétellel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.
2. Mutassuk meg, hogy a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.

III^A . Legyen A és B tetszőleges halmaz és $H \subseteq \mathcal{F}(A, B)$ olyan részhalmaza az A halmazból B halmazba képező függvények halmazának melyre teljesül, hogy minden $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 \subseteq h_2$ vagy $h_2 \subseteq h_1$.

1. Mutassuk meg, hogy $f = \bigcup H$ függvény.
2. Mutassuk meg, hogy ha minden $h \in H$ függvény injektív, akkor a $f = \bigcup H$ függvény is injektív.

IV^{Gy} . Legyen $f : A \rightarrow B$ olyan függvény, melyre $f \in \text{Dom } f$. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $b \in B$ melyre $(f, b) \in f$, valamint, hogy az $E = \{f\}$, $F = \{\{f\}, \{f, b\}\}$ halmazokra $E \in F \in f \in E$ teljesül.

V^H . Legyen E, F és G tetszőleges halmaz, valamint $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ és $h : G \rightarrow E$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy ha $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ és $g \circ f \circ h$ bijekció, akkor f , g és h is bijekció.