4. Függvények

I^{A} . Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz létezik egyértelműen $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, melyre $n = \dfrac{k(k+1)}{2} + j$ és $j \leq k$ teljesül. Ennek a segítségével adjunk meg egy $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekciót.

II^{A} . Legyen E tetszőleges halmaz, és $A, B \subseteq E$. Mutassuk meg, hogy minden $x \in E$ elemre

1. $\chi_{E \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x)$;
2. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
3. $\chi_{A \cap B}(x) + \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

teljesül, ahol tetszőleges $Z \subseteq E$ halmaz esetén

$$\chi_Z : E \to \{0,1\} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \notin Z, \\ 1 & \text{ha} \quad x \in Z. \end{cases}$$

$\mathrm{III}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $n, m \in \mathbb{N}^+$, $E = \{1, \dots, n\}$ és $F = \{1, \dots, m\}$. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Az $f : E \to F$ bijekciók száma 0, ha $m \neq n$, illetve $n!$, ha $n = m$.
2. Az $f : E \to F$ injekciók száma 0, ha $n > m$, illetve $\frac{m!}{(m-n)!}$, ha $n \leq m$.

3*. Az $f : E \to F$ szürjekciók száma $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$.

IV^{H} . Legyen $S = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, vagyis S az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$C : S \to S \qquad s \mapsto \left(n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s(k) \right)$$

$$T : S \to S \qquad s \mapsto \left(n \mapsto (-1)^n s(n) \right)$$

1. Mutassuk meg, hogy
$$C \circ T \circ C \circ T = \mathrm{id}_S$$
teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $C \circ T$ bijekció.
3. Mutassuk meg, hogy C is bijekció, és $C^{-1} = T \circ C \circ T$.