

5. Komplex számok

I^{Gy} . Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & a + b\mathbf{i} \mapsto a \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & a + b\mathbf{i} \mapsto b \\ \bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & a + b\mathbf{i} \mapsto a - b\mathbf{i} \\ |\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & a + b\mathbf{i} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}$$

Igazoljuk a következőket.

1. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ és $z - \bar{z} = 2\mathbf{i} \operatorname{Im} z$.
2. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ és $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$.
3. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z\bar{z} = |z|^2$.
4. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z \neq 0$ esetén

$$z \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} \mathbf{i} \right) = 1.$$

5. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $|z| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z = 0$.
6. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
7. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
8. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
9. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
10. Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik olyan $v \in \mathbb{C}$ szám, melyre $z = v^2$ teljesül.

II^A . Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan rendezés a komplex számok halmazán, mellyel $\mathbb{C}$ rendezett test lenne.

III^A . (*Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $x_1, \dots, x_n \in]-1, \infty[$ számra, ha bármely $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i x_j \geq 0$ teljesül, akkor

$$1 + \sum_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i),$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

IV^{Gy} . Mutassuk meg, hogy minden $x \in [0, 1]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$$

teljesül.

V^A . Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $0 < x \in \mathbb{R}$.

1. Mutassuk meg, hogy az

$$H = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 < z, z^n < x\}$$

halmaz nem üres és felülről korlátos.

2. Legyen $y = \sup H$. Mutassuk meg, hogy az $y \in \mathbb{R}$ számra $y^n = x$ teljesül.
3. Igazoljuk, hogy ha $z \in \mathbb{R}$, $0 < z$ és $z \neq y$, akkor $z^n \neq x$.