

6. Számosságok

I^A . Határozzuk meg az alábbi halmazok számosságát.

1. $\mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$.
2. $\{x \in]0, 1[\mid x \text{ tizedesjegyeiben csak páros szám szerepel}\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

II^{Gy} . Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.
2. $|A \times B| = mn$
3. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
4. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
5. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

III^A . Mutassuk meg, hogy bármely végtelen A halmazra és legfeljebb megszámlálható számosságú B halmazra $|A \cup B| = |A|$ teljesül.

IV^A . Legyen A végtelen halmaz, és legyen $B \subseteq A$ olyan részhalmaza, melyre $|B| < |A|$ és $|B| = |B \times B|$. Mutassuk meg, hogy $|B| < |A \setminus B|$.

V^A . Igazoljuk, hogy kontinuum sok, kontinuum számosságú halmaz egyesítése kontinuum számosságú. (Használjuk fel, hogy $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.)

VI^A . Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy az E véges részhalmazainak a halmaza azonos számosságú az E halmazzal, azaz

$$|\{A \subseteq E \mid |A| < |\mathbb{N}|\}| = |E|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

VII^H . Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy az E halmaznak az E -vel ekvipotens (azonos számosságú) részhalmazainak a halmaza ekvipotens E hatványhalmazával, azaz

$$|\{A \subseteq E \mid |A| = |E|\}| = |\mathcal{P}(E)|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

VIII^H . Igazoljuk, hogy az E halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : E \rightarrow E$ függvényhez létezik $A \subseteq E$ invariáns ($f(A) \subseteq A$) nem triviális ($A \neq \emptyset, A \neq E$) halmaz!

IX^H . Felhasználva, hogy

1. a ZF axiómák alapján egy elemű halmazok Descartes-szorzata nem üres;
2. valamint Gödel és Cohen tétele alapján a ZF axiómákból nem vezethető le C

igazoljuk, hogy a

„Minden I indexhalmazra, $(A_i)_{i \in I}$ és $(B_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre ha minden $i \in I$ esetén $|A_i| \leq |B_i|$

teljesül, akkor $\left| \prod_{i \in I} A_i \right| \leq \left| \prod_{i \in I} B_i \right|$.”

állítás nem bizonyítható a ZF axiómákból.