

7. A valós és a komplex számok elemi topológiája

I^A . Legyen $A =]-2, -1[\cup \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup [2, 3]$. Határozzuk meg az A halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontjait az $\mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{C}$ számtest felett.

II^A . Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ egy részhalmaza pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.

III^A . Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ halmaz sűrű a $\mathbb{C}$ halmazban.

IV^{Gv} . Igazoljuk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{K}$ esetén

$$\overline{\{z \in \mathbb{K} \mid |x - z| < r\}} = \{z \in \mathbb{K} \mid |x - z| \leq r\}$$

teljesül.

V^A . Bizonyítsuk be, hogy ha az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor $\inf A \in \overline{A}$, illetve, ha felülről korlátos, akkor $\sup A \in \overline{A}$.

VI^A . Mutassuk meg, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely zárt és nyílt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}$ teljesül.

VII^H . Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Használjuk fel azt a számelméleti tételt, mely szerint minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen létezik olyan egész értékű $(\mu_p(x))_{x \in \mathbb{P}}$ sorozat és olyan $e \in \{-1, 1\}$ elem, hogy a $\{p \in \mathbb{P} \mid \mu_p(x) \neq 0\}$ halmaz véges, és

$$x = e \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\mu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges prímszám, és definiáljuk az

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} p^{-\mu_p(x)}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Igazoljuk, hogy $|\cdot|_p$ abszolútérték.

VIII^H . Legyen G zárt, valódi részcsoportja az $(\mathbb{R}, +, 0)$ csoportnak. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre $G = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$.